К АНАЛИЗУ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

В. И. Розенблюм (Ленинград)

В теории приспособляемости имеют фундаментальное значение известные теоремы Мелана и Койтера (см., например, [1]), совместное использование которых, в принципе, позволяет получать двусторонние оценки приспособляющих нагрузок. Отметим, что в приложениях нашла применение пока лишь теорема Мелана.

Для некоторых областей техники значительный интерес представляют переменные режимы, обусловленные наличием нестационарных температурных полей. Приспособляемость неравномерно нагретых тел и соответствующее обобщение теоремы Мелана рассматривались в работах [2–6] и др. В настоящей работе предлагается аналогичное обобщение теоремы Койтера и рассматриваются некоторые возможные приемы приближенного анализа, основанные на этой теореме.

1. Пусть упруго-идеально-пластическое тело подвергается воздействию нагрузок, изменяющихся между заданными пределами, и нестационарной температуры $\theta\ (x, y, z, t)$, меняющейся в каждой точке между некоторыми заданными значениями. Обозначим через $\sigma_{ij}^e\ (t)$, $\varepsilon_{ij}^e\ (t)$ (фиктивное) термоупругое решение, отвечающее идеально упругому поведению. Значения $\sigma_{ij}^e(t)$, $\varepsilon_{ij}^e\ (t)$ связаны зависимостью:

$$\varepsilon_{ij}^e = C_{ijhk}\sigma_{hk}^e + \delta_{ij}\alpha\theta \tag{1.1}$$

где C_{ijhk} — тензор упругости ($C_{ijhk} = C_{hkij}$), δ_{ij} — символ Кронекера.

Истинные (упруго-пластические) напряжения и деформации в любой момент времени можно представить в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \rho_{ij}, \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + e_{ij} \tag{1.2}$$

Здесь, согласно теореме о разгрузке, ρ_{ij}, e_{ij} — (мгновенные) остаточные напряжения и деформации. Полную деформацию ε_{ij} можно также представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}' + \varepsilon_{ij}'' \qquad (\varepsilon_{ij}' = C_{ijhk}\sigma_{hk} + \delta_{ij}\alpha\theta) \tag{1.3}$$

Здесь ε_{ij}', ε_{ij}'' — упругая и пластическая составляющие.

Комбинируя зависимости (1.1) — (1.3), нетрудно установить, что остаточные напряжения и деформации удовлетворяют соотношению

$$e_{ij} = C_{ijhk}\rho_{hk} + \varepsilon_{ij}'' \tag{1.4}$$

Все введенные тензоры напряжений и деформаций являются медленно меняющимися функциями времени. Напряжения σ_{ij}, σ_{ij}^e представляют собой статически возможные поля, уравновешенные мгновенными внешними нагрузками на поверхности и в объеме; остаточные напряжения ρ_{ij} образуют самоуравновешенное поле; деформации ε_{ij}, ε_{ij}^e, e_{ij} — кинематически возможны, т. е. они совместны, причем соответствующие поля смещений удовлетворяют принятым кинематическим краевым условиям [1] на поверхности; наконец, составляющие ε_{ij}'' и ε_{ij}' не являются совместными.

При пластическом течении тела имеет место основное неравенство [1] (локальный принцип максимума)

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\,\dot{\varepsilon}_{ij}'' > 0 \tag{1.5}$$

где σ_{ij}^* — произвольное напряженное состояние внутри поверхности текучести (точкой обозначено дифференцирование по времени).

Наряду с действительными пластическими деформациями $\varepsilon_{ij}''\ (t)$, рассмотрим некоторое произвольное поле пластических деформаций $\varepsilon_{ij0}''\ (t)$, которое будем называть «допустимым», если приращения пластической деформации

$$\Delta\varepsilon_{ij_0}'' = \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ij_0}'' dt \tag{1.6}$$

подсчитанные за некоторый интервал времени T, образуют кинематически возможное поле. Положив в (1.4) $\varepsilon_{ij}'' = \varepsilon_{ij_0}''\ (t)$, найдем некоторое (единственное) распределение

---

[1] В дальнейшем будем рассматривать лишь случай, когда кинематические краевые условия (если такие условия заданы) соответствуют обращению в нуль некоторых компонент вектора смещения.

«сопровождающих» остаточных напряжений ρ_{ij_0} остаточных деформаций ε_{ij_0} и остаточных смещений u_{i0} [1]. Заметим, что вследствие условия (1.6) и соотношения (1.4) сопровождающие остаточные напряжения в конце цикла возвращаются к значениям, имевшим место в начале цикла

$$\rho_{ij_0}\big|_{t=0} = \rho_{ij_0}\big|_{t=T} \tag{1.7}$$

2. Теорему Койтера для случая неравномерно нагретого тела можно сформулировать следующим образом: приспособления не произойдет, если можно найти допустимый цикл скоростей пластической деформации $\varepsilon_{ij_0}{}^{\cdot\prime\prime}(t)$ и некоторую программу изменения нагрузок и температуры (в заданных пределах), при которых

$$\int_0^T dt \left\{ \int_v F_i u_{i_0}^{\cdot}\, dv + \int_{S_p} p_i u_{i_0}^{\cdot}\, ds + \int_v \alpha\theta \dot{\rho}_{ii_0}\, dv \right\} > \int_0^T dt \int_v W(\dot{\varepsilon}_{ij_0}'')\, dt \tag{2.1}$$

Напротив, система приспособится, если при всех допустимых циклах скоростей пластической деформации и при всевозможных изменениях нагрузок и температур (внутри заданных пределов) соотношение (2.1) будет выполняться с противоположным знаком неравенства. В (2.1) через $W(\varepsilon_{ij_0}{}^{\cdot\prime\prime})$ обозначена скорость пластической диссипации энергии на допустимых скоростях деформации $\varepsilon_{ij_0}{}^{\cdot\prime\prime}(t)$.

Для доказательства первой части теоремы предположим, следуя [1], что хотя существует цикл, удовлетворяющий (2.1), приспособляемость имеет место. Тогда, согласно теореме Мелана для неравномерно нагретого тела [2,4], можно найти стационарное поле остаточных напряжений $\rho_{ij}{}^{\circ}$ такое, что сумма

$$\sigma_{ij}^{e} + \overset{\circ}{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{*} \tag{2.2}$$

нигде не превзойдет предел текучести. Согласно принципу виртуальных работ

$$\int_v F_i u_{i_0}\, dv + \int_{S_p} p_i u_{i_0}^{\cdot}\, dS = \int_v \sigma_{ij}^{*} \dot{e}_{ij_0}\, dv \tag{2.3}$$

Учитывая, что, согласно (1.4),

$$\dot{e}_{ij_0} = C_{ijhk} \dot{\rho}_{hk_0} + \dot{\varepsilon}_{ij_0}'' \tag{2.4}$$

и используя (2.2), представим правую часть (2.3) в виде

$$\int_v \sigma_{ij}^{*} \dot{e}_{ij_0}\, dv = \int \sigma_{ij}^{e} C_{ijhk} \dot{\rho}_{hk_0}\, dv + \int_v \rho_{ij}{}^{\circ} C_{ijhk} \dot{\rho}_{hk_0}\, dv + \int_v \sigma_{ij}^{*} \dot{\varepsilon}_{ij_0}''\, dv \tag{2.5}$$

Первое слагаемое правой части преобразуем при помощи (1.1):

$$\int_v \sigma_{ij}^{e} C_{ijhk} \dot{\rho}_{hk_0}\, dv = \int_v \varepsilon_{ij}^{e} \dot{\rho}_{ij_0}\, dv - \int_v \alpha\theta\delta_{ij} \dot{\rho}_{ij_0}\, dv \tag{2.6}$$

В силу принципа виртуальных работ первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю. Если теперь проинтегрировать соотношение (2.5) по времени от $t = 0$ до $t = T$, то вследствие (1.2) обратится в нуль второе слагаемое правой части (2.5). В результате получим соотношение

$$\int_0^T dt \left\{ \int_v F_i u_{i_0}^{\cdot}\, dv + \int_{S_p} p_i u_{i_0}^{\cdot}\, ds + \int_v \alpha\theta \dot{\rho}_{ii_0}\, dv \right\} = \int_0^T dt \int_v \sigma_{ij}^{*} \dot{\varepsilon}_{ij_0}''\, dv \tag{2.7}$$

Наличие противоречия между (2.1) и (2.7), которое легко обнаруживается при помощи неравенства (1.5), доказывает первую часть теоремы. Вторая часть теоремы доказывается при помощи аналогичного обобщения доказательства Койтера.

3. Отметим следующее следствие: стационарные температурные поля не влияют на приспособляемость. Действительно, если θ не зависит от времени, то температурное слагаемое в соотношении (2.1) принимает вид

$$\int_0^T dt \int_v \alpha\theta \dot{\rho}_{ii_0}\, dv = \int_v \alpha\theta \left[\rho_{ii_0}(t = T) - \rho_{ii_0}(t = 0)\right] dv$$

---

[1] Для фактического построения этих полей необходимо, очевидно, решить краевую упругую задачу при нулевых нагрузках и заданных (нулевых) смещениях на поверхности, при наличии «наложенных» деформаций ε_{ij}''.

и обращается в нуль в силу условия цикличности (1.7). Очевидно, что приспособляемость не будет зависеть также от начальных и вообще от любых самоуравновешенных внутренних стационарных напряжений.

4. Как подчеркнуто в [1], расчет приспособляемости на базе как теоремы Мелана, так и теоремы Койтера связан с необходимостью весьма детального упругого анализа, что существенно усложняет решения по сравнению, например, с аналогичным применением теорем предельного равновесия. В частности, при использовании теоремы Койтера своеобразная упругая задача возникает в связи с необходимостью построения на основе зависимости (2.4) остаточных напряжений и деформаций, сопровождающих заданный пластический цикл $\varepsilon^{\cdot''}_{ij_0}(t)$. Для устранения этой трудности можно предложить следующий прием. Задаем вначале кинематически возможное поле остаточных скоростей $u^{\cdot}_{i0}$ и статически возможное поле скоростей остаточных напряжений $\rho^{\cdot}_{ij0}$. При этом автоматически определяется соответствующий допустимый цикл пластических скоростей деформации $\varepsilon^{\cdot''}_{ij_0}(t)$, которые, согласно (2.4), будут иметь вид

$$\varepsilon^{\cdot''}_{ij_0} = {}^1/_2\,(u^{\cdot}_{i_0,\,j} + u^{\cdot}_{j_0,\,i}) - c_{ijhk}\rho^{\cdot}_{hk_0} \tag{4.1}$$

Очевидно, что полученные распределения $u^{\cdot}_{i_0}$, $\rho^{\cdot}_{ij_0}$, $\varepsilon^{\cdot}_{ij_0}$ удовлетворяют необходимым условиям и могут быть использованы для вычислений по соотношению (2.1).

5. Для иллюстрации изложенного приема рассмотрим следующую задачу. Тонкая пластинка произвольной формы в плане защемлена по контуру и находится под воздействием переменного температурного поля

$$\theta = \Phi(t) + \frac{z}{{}^1/_2 h}\Psi(t) \tag{5.1}$$

где h — постоянная толщина пластинки, z отсчитывается от срединной плоскости по нормали, функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ произвольно и независимо изменяются в пределах

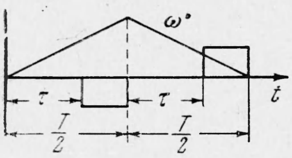
$$-\Phi_1 \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_2, \qquad -\Psi_1 \leqslant \Psi(t) \leqslant \Psi_2 \tag{5.2}$$

Не уменьшая общности, можно, согласно следствию, п. 3, ограничиться рассмотрением несколько более простого случая

$$0 \leqslant \Phi(t) \leqslant \Phi_0, \qquad 0 \leqslant \Psi(t) \leqslant \Psi_0 \tag{5.3}$$

который приводится к предыдущему посредством наложения некоторого стационарного температурного поля. Начнем с выбора статически возможных сопровождающих остаточных напряжений, которые возьмем в виде

$$\rho^{\cdot}_{x_0} = \rho^{\cdot}_{y_0} = -\frac{E}{1-\nu}\mu^{\cdot}(t)\,s(z) \tag{5.4}$$



Фиг. 1

где (фиг. 1) (5.5)

$$\mu^{\cdot} = 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \qquad \mu^{\cdot} = 0 \text{ при } {}^1/_2 T \leqslant t \leqslant \tau + {}^1/_2 T$$

$$\mu^{\cdot} = -1 \text{ при } \tau \leqslant t \leqslant {}^1/_2 T, \qquad \mu^{\cdot} = 1 \text{ при } \tau + {}^1/_2 T \leqslant t \leqslant T$$

а также

$$s(z) = 1 \quad \text{при } z^* \leqslant z \leqslant {}^1/_2 h$$

$$s(z) = 0 \quad \text{при } -{}^1/_2 h \leqslant z \leqslant z^* \tag{5.6}$$

Здесь z^* и τ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$-{}^1/_2 h \leqslant z^* \leqslant {}^1/_2 h, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant {}^1/_2 T \tag{5.7}$$

Простейшее кинематически возможное поле скоростей $u^{\cdot}_{i0}$, обращающихся в нуль на контуре, будет

$$u^{\cdot}_{x_0} = u^{\cdot}_{y_0} = 0$$

При этом скорости остаточных деформаций также тождественно обращаются в нуль, и, следовательно, согласно (4.1) (для изотропного материала), получим

$$\varepsilon^{\cdot''}_{x_0} = \varepsilon^{\cdot''}_{y_0} = \mu^{\cdot}(t)\,s(z) \tag{5.8}$$

Остается задать цикл изменения температуры, который возьмем в форме

$$\Phi(t) = \Phi_0\,\omega(t), \qquad \Psi(t) = \Psi_0\,\omega(t) \tag{5.9}$$

где

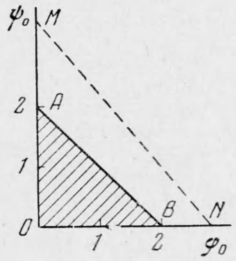
$$\omega(t) = \frac{t}{{}^1/_2 T} \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2}\right), \qquad \omega(t) = 2 - \frac{t}{{}^1/_2 T} \quad \left(\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant T\right) \tag{5.10}$$

Подставляя выражения (5.4), (5.8), (5.9) в уравнение Койтера (2.1) (с заменой знака неравенства знаком равенства), после вычислений получим

$$\varphi_0+\psi_0\frac{1+\zeta^*}{2}=2\frac{{}^1/_2T}{\tau} \tag{5.11}$$

Здесь

$$\varphi_0=\frac{E\alpha}{(1-\nu)\sigma_s}\Phi_0,\qquad \psi_0=\frac{E\alpha}{(1-\nu)\sigma_s}\Psi_0,\qquad \zeta^*=\frac{z^*}{{}^1/_2h}$$



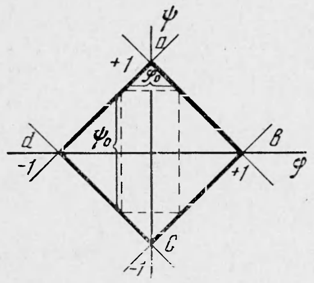
Фиг. 2

Введем плоскость переменных $\varphi_0\psi_0$. Прямая (5.11) ограничивает на этой плоскости некоторую треугольную область OMN приспособляющих нагрузок (фиг. 2). Поскольку решение (5.11) является верхней оценкой, следует выбрать значения параметров ζ^*, τ, приводящие к наиболее низкому положению этой границы. Учитывая ограничения (5.7), получим

$$\zeta^*=1,\qquad \tau={}^1/_2T \tag{5.12}$$

При этом условие (5.11) принимает вид $\varphi_0+\psi_0=2$ (прямая AB на фиг. 2).

6. Для суждения о точности полученного решения найдем при помощи теоремы Мелана нижнюю границу приспособляющей нагрузки. Для этого следует найти стационарное поле остаточных напряжений, наложение которого на термоупругое решение привело бы к чисто упругому поведению.



Фиг. 3

Термоупругое решение задач имеет вид

$$\sigma_x^e=\sigma_y^e=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\left[\Phi(t)+\frac{z}{{}^1/_2h}\Psi(t)\right] \tag{6.1}$$

Используя то обстоятельство, что напряжения (6.1) являются самоуравновешенными, возьмем остаточные напряжения в форме, аналогичной (6.1) (6.2)

$$\rho_x^\circ=\rho_y^\circ=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\left[M+\frac{z}{{}^1/_2h}N\right]\qquad (M,\ N=\mathrm{const})$$

Внося суммарные напряжения $\sigma_x^e+\rho_x^\circ$, $\sigma_y^e+\rho_y^\circ$ в условие текучести Мизеса (или Треска), получим

$$\varphi+\zeta\psi=\pm1\quad\left(\varphi=\frac{E\alpha}{(1-\nu)\sigma_s}(\Phi-M),\ \psi=\frac{E\alpha}{(1-\nu)\sigma_s}(\Psi-N),\ \zeta=\frac{z}{{}^1/_2h}\right) \tag{6.3}$$

На плоскости $\varphi\psi$ уравнение (6.3) определяет при всевозможных значениях $\zeta\ (-1\leqslant\zeta\leqslant1)$ два однопараметрических семейства (пучка) прямых, проходящих через точки $\psi=0$, $\varphi=\pm1$ (фиг. 3).

Крайние прямые пучков образуют квадрат $abcd$. Условия (5.3) ограничивают на плоскости φ,ψ некоторую прямоугольную область. Очевидно, что приспособляемость имеет место, если эта область вписывается в квадрат $abcd$. Из этого условия находим

$$\psi_0+\psi_0=2 \tag{6.4}$$

Найденная нижняя граница (6.4) совпала с верхней границей (5.12), поэтому полученное решение будет точным.

Поступила 23 I 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. Изд. иностр. лит., 1961.
2. Розенблюм В. И. О приспособляемости неравномерно нагретых упруго-пластических тел. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 7.
3. Розенблюм В. И. К теории приспособляемости упруго-пластических тел. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 6.
4. Прагер В., Приспособляемость в упруго-пластической среде, подвергнутой циклам нагрузки и температуры. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1958, № 5.
5. Прагер В., Расчет конструкций за пределом упругости при циклических температурных воздействиях. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1957, № 3.
6. Гохфельд Д. А. Некоторые результаты экспериментального исследования приспособляемости при тепловых воздействиях. Сб. «Тепловые напряжения в элементах турбомашин». Изд-во АН УССР, 1962.