

**ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН ГОРЕНИЯ**

*А. П. Алдушин, Б. А. Маломед  
(Черноголовка)*

К числу наиболее интересных нестационарных режимов горения относятся спиновые волны, обнаруженные вначале в явлениях детонации (см. обзор [1]) и значительно позже — в горении фильтрационных [2, 3] и безгазовых [4] систем. В отличие от автоколебательного нестационарного горения, когда фронт реакции остается плоским, в спиновых режимах возникают бегущие очаги реакции, искривляющие фронт и оставляющие спиральный след на поверхности сгоревшего цилиндрического образца [3, 4]. В работах [5, 6] высказано предположение, что спиновое горение есть проявление двумерной неустойчивости процесса к малым поперечным возмущениям. Это позволило построить единую математическую модель неустойчивого горения и провести ее исследование численными методами на ЭВМ.

Данная работа посвящена развитию феноменологического описания пространственно неоднородных волн горения, начатого в [7, 8] и основанного на рассмотрении нестационарного горения как распределенного автоколебательного процесса. Ниже развивается гипотеза, рассматривающая возникновение спиновых режимов в некоторых случаях как топологический эффект, связанный с замкнутостью цилиндрической поверхности. Важную роль в механизме спинового горения играет также наличие максимума в спектре инкрементов возмущений при определенной длине волны искривления фронта реакции. Это обстоятельство обнаружено в [9] и подтверждено далее в [10] при исследовании устойчивости стационарного распространения бесконечно тонкой зоны экзотермического превращения в однородной среде.

Заключая вводную часть, отметим, что феноменологический подход, подобный реализуемому ниже, широко и с успехом используется для описания автоволновых явлений при концентрационных колебаниях в химических и биологических системах [11]. Вопросы общей теории волновых процессов в распределенных автоколебательных системах рассмотрены в обзоре [12].

**Феноменологическое уравнение  
нестационарного горения**

Исходным пунктом феноменологического описания является известный факт колебательной неустойчивости плоского фронта стационарного горения. Эта неустойчивость обнаружена в случае горения пороха, связанного с превращением его в газ [13], а затем — для безгазового горе-

ния [14]. Известны также попытки привлечь одномерную неустойчивость стационарного фронта к объяснению детонационного спина [15].

В работе [14] показано, что в области неустойчивого горения безгазовых составов смещение фронта реакции относительно среднего положения равновесия периодически описывает предельный цикл с конечной амплитудой колебаний. В предположении бесконечно тонкой зоны горения, пренебрегая распределением температуры и концентрации в зоне прогрева, положение отдельного элемента фронта можно описать одной координатой  $\xi = x_{1/2} - ut$ , где  $x_{1/2}$  — мгновенная координата точки, где реакция прошла наполовину. В таком случае одномерная неустойчивость может быть описана динамической системой (системой обыкновенных дифференциальных уравнений) для двух величин: указанной координаты  $\xi$  и скорости  $\dot{\xi}$  (или температуры  $T_0$  зоны реакции). Эта динамическая система или эквивалентное ей уравнение второго порядка должно воспроизводить колебательную неустойчивость стационарного режима, т. е. тривиального решения  $\xi \equiv 0$ , и стабилизацию возникающих колебаний нелинейными членами, т. е. вывод колебаний на предельный цикл. При небольшом удалении в область неустойчивости конкретная форма нелинейности слабо влияет на параметры предельного цикла. Частота колебаний определяется из линейного анализа точных уравнений горения [9, 10], а амплитуда цикла  $A_0$  может быть вычислена из поправок третьего порядка к стационарному решению уравнений горения аналогично [16].

Возможность такого описания ограничена небольшим удалением от границы устойчивости, когда колебания близки к гармоническим. В области сильной нестационарности автоколебательный цикл, как показывает численный опыт [14], сильно усложняется и в конечном счете регулярность сменяется стохастичностью [17]. Эта область параметров рассматриваться не будет.

Смоделировав автоколебательное уравнение для отдельных плоских участков, надо также учесть теплопроводностную связь соседних участков, благодаря которой выступающие участки фронта охлаждаются и тормозятся, чем обеспечивается выравнивание фронта. Всеми перечисленными свойствами обладает следующее феноменологическое уравнение нестационарного движения фронта реакции

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 2\varphi \left[ \dot{\xi} \left( 1 - \frac{4/3}{A_0^2 \omega^2} \dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} \right]. \quad (1)$$

Линейная часть (1) описывает самовозбуждающиеся (при  $\varphi > 0$ ) колебания с частотой  $\omega$  и инкрементом  $\varphi$ . Корреляционная длина  $\lambda$ , как легко видеть из линеаризованного варианта (1), имеет смысл максимальной длины волны такого искривления фронта, которое еще подавляет колебательную неустойчивость. Нелинейное слагаемое в (1) ограничивает рост амплитуды колебаний величиной  $A_0$ . Ниже описаны спиновые режимы горения сплошного и полого цилиндров, подробно изученные в [7, 8], исследован вопрос об устойчивости отдельных спиновых мод и произведена модификация уравнения (1) для лучшего его согласования с исходными уравнениями горения, феноменологическое описание распространяется также на случай произвольной поверхности вращения с медленно меняющимся радиусом. На основе (1) может быть построена теория горения теплоизолированной полосы, и вычислены отличные от спиновых нестационарные режимы горения сплошного цилиндра, однородные по угловой координате. Эти два вопроса будут рассмотрены в отдельных работах.

## Горение цилиндра

Волны горения на тонкостенном цилиндре описываются решениями уравнения (1), удовлетворяющими условию периодичности по координате  $y$ , отсчитываемой вдоль окружности цилиндра:  $\xi(t, y) = \xi(t, y + 2\pi r n)$ , где  $n$  — целое число. Для данного радиуса  $r$  существует конечное число таких решений — спиновых мод [7], имеющих при  $\varphi \ll \omega$  следующий вид в Ван-дер-Полевском приближении:

$$\xi_n(t, y) = A_0 \sqrt{1 - \lambda^2 n^2 / 4\pi^2 r^2} \cos(\omega t - ny/r), \quad (2)$$

$$0 \leq n < [2\pi r/\lambda].$$

Решение с  $n=0$ , существующее для всех  $r$ , описывает синфазные колебания всех точек окружности; с  $n \neq 0$  —  $n$ -головый спин, когда траектория яркого пятна на фронте горения является  $n$ -заходной спиралью (в каждый момент на окружности имеются  $n$  пятен). Решения (2) получаются из (1) как предельный цикл после перехода к обыкновенному дифференциальному уравнению введением автомодельной переменной  $z = \omega(t - y/v)$ , поэтому устойчивы относительно стационарных возмущений, т. е. возмущений, сохраняющих автомодельность. Вопрос о нестационарных возмущениях будет рассмотрен в следующем разделе. Зависимость амплитуды отдельных спиновых мод от  $r$  изображена на рис. 1.

Теория такого типа для горения сплошного цилиндра развита в [8]. В частности, показано, что радиус  $r_1$ , при котором может возникнуть первая спиновая мода и равный, согласно (2),  $\lambda/2\pi$  для полого цилиндра, увеличивается при переходе к сплошному цилиндру примерно в 2 раза:  $r_1 \approx 1,8 \lambda/2\pi$ . Поверхность искривленного фронта описывается периодической функцией угловой переменной  $\psi$ , зависящей также от радиуса  $r$ ,

$$\xi = A_n(\rho) \cos(n\psi + \omega t), \quad \rho = 2\pi r/\lambda, \quad (3)$$

где амплитуда  $A_n(\rho)$  определяется следующим уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2 A_n}{d\rho^2} + \rho^{-1} \frac{dA_n}{d\rho} - n^2 \rho^{-2} A_n + \left(1 - \frac{A_n^2}{A_0^2}\right) A_n = 0, \quad (4)$$

дополненным условием теплоизоляции на границе цилиндра радиуса  $r_0$

$$\left. \frac{dA_n}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \rho_0 = 2\pi r_0/\lambda. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) с граничным условием (5) может быть описано аналитически [8], однако ввиду громоздкости соответствующих формул приводится лишь окончательный результат — графики функции  $A_n(\rho)$  для различных спиновых мод, существующих при заданном  $\rho_0$  (рис. 2). Количество спиновых мод, разрешенных при данном радиусе  $\rho_0$ , определяется числом корней бесселевой функции  $J_0(\rho)$  на отрезке  $[0, \rho_0]$ . Как видно на рис. 2, спиновые моды могут различаться не только номером, т. е. угловой скоростью движения яркого пятна вокруг оси цилиндра, но и при заданном номере — распределением амплитуды вдоль радиуса.

Например, при  $\rho_0 = 5$  наряду со второй спиновой модой существуют решения, отвечающие синфазным колебаниям с однородным либо осциллирующим распределением амплитуды. При дальнейшем возрастании радиуса начинают появляться первые, вторые и т. д. спиновые моды с монотонной и осциллирующей амплитудой. Для осциллирующих решений существуют узловые линии — окружности, на которых амплитуда колебаний равна нулю. В связи с многозначностью решений необходимо произвести отбор устойчивых мод из числа всех формально существующих.

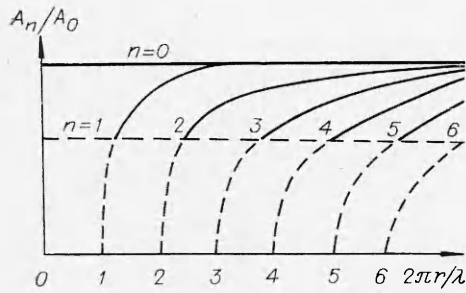
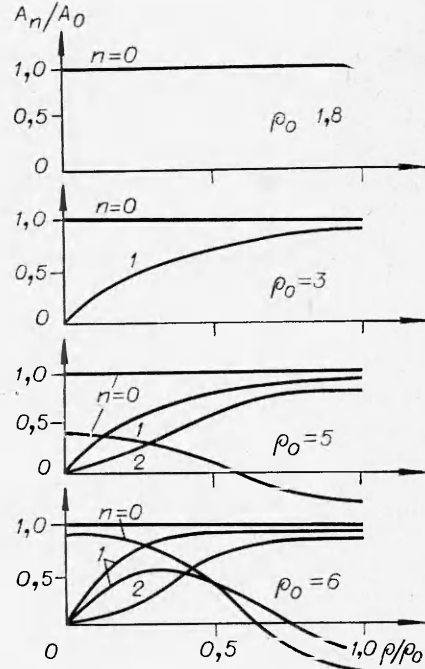


Рис. 1. Зависимость амплитуды  $A_n$  спиновых мод от радиуса цилиндрической поверхности. Штриховые участки кривых отвечают неустойчивым спиновым волнам.

Рис. 2. Распределение амплитуды спиновых мод вдоль радиуса цилиндрического образца.



Оставляя подробности специальной работе, отметим здесь, что для сплошного цилиндра наряду со спиновыми существуют также азимутально однородные решения уравнения (1), описывающие распространение концентрических волн от оси к периферии и обратно.

#### Устойчивость спиновых мод

Исследуем устойчивость решения (2) для полого цилиндра в наиболее простом случае, когда имеются только синфазная и первая спиновая моды, т. е. будем искать решение в виде

$$\xi = \xi_0(t) + \xi_1(t) \sin \psi + \xi_2(t) \cos \psi, \quad (6)$$

где  $\psi = y/r$  — угловая координата. Подставляя (6) в (1) и сохраняя члены, пропорциональные  $\text{const}$ ,  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$ , получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_0 + \omega^2 \xi_0 &= \varphi \left( \dot{\xi}_0 - \frac{3}{2} \dot{\xi}_0 \dot{\xi}_1^2 - \frac{3}{2} \dot{\xi}_0 \dot{\xi}_2^2 - \dot{\xi}_0^3 \right), \\ \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 &= \varphi \left( \alpha^2 \dot{\xi}_1 - \frac{3}{4} \dot{\xi}_1^3 - 3 \dot{\xi}_0 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 - \frac{3}{4} \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2^2 \right), \\ \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 &= \varphi \left( \alpha^2 \dot{\xi}_2 - 3 \dot{\xi}_2 \dot{\xi}_0^2 - \frac{3}{4} \dot{\xi}_2^3 - \frac{3}{4} \dot{\xi}_2 \dot{\xi}_1^2 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\alpha^2(r) = 1 - \lambda^2/4\pi^2 r^2$ . Далее примем для удобства  $\omega = 1$  и  $\frac{3}{4} A_0^2 = 1$ . В силу (2) квадрат амплитуды первой спиновой моды пропорционален  $\alpha^2(r)$ .

Будем искать функции  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  в следующем виде:  $\xi_0 = B_0 \sin t$ ,  $\xi_1 = B_1 \sin t$ ,  $\xi_2 = B_2 \cos t$ . Подставляя эти выражения в (6) и считая  $\varphi \ll 1$ , получим следующую систему укороченных уравнений для медленно изменяющихся функций  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ :

$$\begin{aligned} 2\dot{B}_0 &= \varphi \left( B_0 - \frac{9}{8} B_0 B_1^2 - \frac{3}{8} B_0 B_2^2 - \frac{3}{4} B_0^3 \right), \\ 2\dot{B}_1 &= \varphi \left( \alpha^2 B_1 - \frac{9}{16} B_0^2 B_1 - \frac{3}{16} B_1 B_2^2 \right), \\ 2\dot{B}_2 &= \varphi \left( \alpha^2 B_2 - \frac{9}{16} B_2^3 - \frac{3}{4} B_0^2 B_2 - \frac{3}{16} B_2 B_1^2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Исследуем особые точки системы (8) и их устойчивость. Вначале обратимся к устойчивым особым точкам. Одна из них отвечает первой спиновой моде и имеет следующие координаты:  $B_0^2 = 0$ ,  $B_1^2 = B_2^2 = 4/3\alpha^2$ . Для исследования ее устойчивости надо линеаризовать (8) вблизи этой точки и вычислить собственные числа характеристической матрицы линеаризованной системы. В результате получаем что область устойчивости определяется неравенством  $\alpha^2 > 1/2$ . При  $\alpha^2 < 1/2$  в спектре собственных чисел появляется одно положительное, отвечающее подавлению спиновой моды нарастающей синфазной. Другая устойчивая особая точка соответствует синфазным колебаниям и имеет координаты  $B_1^2 = B_2^2 = 0$ ,  $B_0^2 = 4/3$ . Область ее устойчивости  $\alpha^2 < 1$  (а при  $\alpha^2 > 1$  синфазная мода давится спиновой).

Для полноты описания перечислим также неустойчивые особые точки системы (8). Первая из них имеет координаты

$$B_0^2 = \frac{4}{15}(2\alpha^2 - 1),$$

$$B_1^2 = \frac{4}{15}(4 - 3\alpha^2),$$

$$B_2^2 = \frac{4}{3}\alpha^2.$$

Эта точка существует в области  $1/2 < \alpha^2 < 4/3$ , и всюду в этой области она имеет в спектре собственных чисел два отрицательных и одно положительное, будучи, таким образом, неустойчивой как седло. Имеются еще четыре особые точки с той же седельной неустойчивостью

$$B_1^2 = 0, B_0^2 = 4 - \frac{8}{3}\alpha^2, B_2^2 = \frac{16}{3}(\alpha^2 - 1),$$

$$B_2^2 = 0, B_0^2 = \frac{4}{15}(2\alpha^2 - 1), B_1^2 = \frac{16}{15}(3 - \alpha^2),$$

$$B_1^2 = B_0^2 = 0, B_2^2 = \frac{16}{9}\alpha^2,$$

$$B_2^2 = B_0^2 = 0, B_1^2 = \frac{16}{9}\alpha^2.$$

Итак, при  $\alpha^2 < 1/2$ , чему отвечает  $r < \pi^{-1}/\sqrt{2} \cdot \lambda$ , могут реализоваться только синфазные колебания точек фронта. Формально существующая при всех  $r > \lambda/2\pi$  первая спиновая мода в интервале  $\lambda/2\pi < r < \lambda/\sqrt{2}\pi$  неустойчива. Включение первой спиновой моды в число устойчивых решений происходит жестко (с конечной амплитудой  $A = 1/2 \cdot \sqrt{3}/2A_0$ ), начиная с критического радиуса  $r_* = \lambda/\sqrt{2}\pi$ .

При  $r > r_*$  могут в зависимости от начальных условий реализоваться как автоколебательное, так и спиновое решения. Для реализации спинового режима надо в качестве начального состояния задать искривленное температурное поле, автоколебательный режим реализуется при зажигании однородным по азимуту тепловым импульсом.

### Нелокальное обобщение феноменологического уравнения

Прежде чем переходить к анализу устойчивости высших спиновых мод, следует проверить, сохраняются ли результаты, полученные в предыдущем разделе при некоторых модификациях исходного уравнения (1). Основанием для проверки является некоторое качественное отличие

дисперсионной кривой  $\varphi_1(k)$ , описывающей зависимость инкремента неустойчивости тривиального решения  $\xi = 0$  уравнения (1) от волнового числа возмущения  $k$ , и соответствующей зависимости  $\varphi_0(k)$ , определяемой из линейного анализа точных уравнений горения [9, 10]. Последняя, как показано на рис. 3, имеет слабо выраженный максимум в области волновых чисел  $k \sim 2\pi/l_T$ , где  $l_T$  — толщина прогретого слоя в стационарном фронте горения, в то время как кривая  $\varphi_1(k)$  падает монотонно. Желаемая коррекция этой дисперсионной кривой достигается заменой (1) его обобщением:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 2\varphi \left[ \dot{\xi} \left( 1 - \frac{4/3}{A_0^2 \omega^2} \dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \xi + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{0 - \Delta \xi} \right]. \quad (9)$$

В (9) введен нелокальный оператор, действующий на произвольную функцию  $f$  по следующему правилу:

$$\sqrt{0 - \Delta} f = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sqrt{\delta - \Delta} f).$$

Здесь имеем дело с так называемым слабым операторным пределом.

Дисперсионная кривая  $\varphi(k)$  для (9) имеет тот же вид, что и  $\varphi_0(k)$ , причем величины  $k_0$  и  $k_1$  (см. рис. 3) связаны с параметром  $\beta$  следующим образом:

$$k_0 = \pi\beta/\lambda, \quad k_1 = 2\pi/\lambda(\beta/2 + \sqrt{\beta^2 + 4}/2). \quad (10)$$

Помимо формального воспроизведения дисперсионной кривой можно высказать некоторые дополнительные соображения в пользу избранного способа обобщения феноменологического уравнения. Представление о локальном тепловом взаимодействии участков фронта, принятое при записи (1), довольно грубое. В действительности температура  $T_0$  в зоне реакции, а вместе с ней скорость и ускорение точек фронта определяются взаимодействием тепловых слоев, примыкающих к зоне реакции. Структура этих слоев определяется не только температурой и скоростью продвижения прилегающего участка реакционной поверхности, но и распределением температуры вдоль всего фронта реакции. Это обстоятельство вносит элемент нелокальности в схему тепловой связи участков фронта, отражением чего является избранный способ модификации (1).

Отметим, что более точному описанию дисперсионной кривой  $\varphi_0(k)$  отвечает оператор  $\sqrt{\delta - \Delta}$  при  $\delta \neq 0$ . В этом случае аппроксимирующей кривой  $\varphi(k)$  можно придать не только экстремальный характер, но и правильную асимптотику при малых  $k$ :  $\varphi_0(k) \sim a_0 + a_1 k^2$ . Учитывая, однако, отсутствие качественных эффектов, связанных с конечностью  $\delta$ , ограничимся более простым в описании случаем  $\delta = 0$ . Уравнения (1) и (9) имеют решения в виде спиновых волн

$$\xi = A_n \cos(\omega t - yn/r)$$

с амплитудой

$$A_n = \alpha_n A_0, \quad \alpha_n^2 = 1 - \frac{\lambda^2 n^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{\lambda\beta_n}{2\pi r}. \quad (11)$$

Индекс  $n$  указывает на принадлежность определенной спиновой моде. Зависимости  $\alpha_n^2(r)$  для различных  $n$  приведены на рис. 4. Все кривые имеют максимум с ординатой  $\alpha_{\max} = 1 + \beta^2/4$ , общей для всех  $n$ , и абсциссой  $r_n^{\max} = \lambda n/\pi\beta$ .

Перейдем к исследованию устойчивости различных решений, уравнения (9). Используя результаты предыдущего параграфа, отметим, что синфазная мода теряет устойчивость относительно возбуждения  $n$ -й мо-

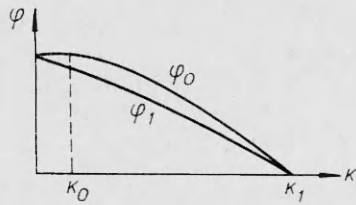


Рис. 3. Зависимость инкремента малых возмущений для точных уравнений горения ( $\varphi_0$ ) и феноменологического уравнения (1).

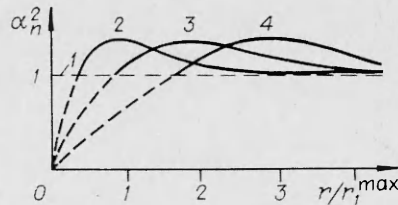


Рис. 4. Зависимость квадрата безразмерной амплитуды спиновых волн от радиуса цилиндрической поверхности. Устойчивым волнам отвечают сплошные участки кривых.  
1 —  $n=0$ ; 2 —  $n=1$ ; 3 —  $n=2$ ; 4 —  $n=3$ .

ды, когда начинает выполняться неравенство  $\alpha_n^2 > 1$ . Несложные вычисления на основе (10) показывают, что синфазная мода устойчива при  $r_0 < \lambda/2\pi\beta$ . (12)

Для рассмотрения устойчивости произвольной  $m$ -й моды относительно возбуждения  $n$ -й надо рассмотреть сложную систему уравнений, связывающую все формально существующие при данном радиусе моды (т. е. те, для которых  $\alpha_n^2(r) > 0$ ). Условие устойчивости сведется к требованию отсутствия у соответствующей характеристической матрицы собственных значений с положительной вещественной частью. Ввиду сложности вычисления этих собственных чисел ограничимся получением лишь необходимого, но не достаточного условия устойчивости, заменяя строгий критерий требованием отрицательности вещественной части суммы всех этих чисел, т. е. следа соответствующей матрицы. Далее устойчивость будет пониматься именно в таком ослабленном смысле. Отбрасывая в соответствии с этим недиагональные элементы, запишем линеаризованные уравнения для малых возмущений

$$\begin{aligned} 2\dot{A}_{n_1} &= \varphi \left( \alpha_n^2 - \frac{3}{8} A_{n_1}^2 - \frac{3}{8} A_{m_2}^2 \right) A_{n_1}, \\ 2\dot{A}_{n_2} &= \varphi \left( \alpha_n^2 - \frac{9}{8} A_{m_2}^2 - \frac{3}{8} A_{n_1}^2 \right) A_{n_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) аналогично (5) подразумевается  $\xi = A_{n_1} \sin t \sin n\psi + A_{n_2} \cos t \cos n\psi$ . Условие устойчивости  $m$ -й моды сводится после простых вычислений к соотношению  $\alpha_n^2 < \frac{3}{2} \alpha_m^2$ . Рассмотрим при фиксированном  $r$   $\alpha_m^2(r)$  как функцию формально непрерывного аргумента  $m$ . Максимальное значение  $\alpha_{\max}^2(r) = 1 + \beta^2/4$  достигается при

$$m = m_{\max} = \pi\beta\lambda^{-1}.$$

Таким образом, при данном  $r$  устойчивы лишь те спиновые моды, для которых  $\alpha_m^2(r) > \frac{2}{3} \alpha_{\max}^2$ . Решая это неравенство, можно получить следующую область номеров  $m$  устойчивых спиновых мод: соответственно при  $\beta^2 < 2$  и  $\beta^2 > 2$  получаем

$$\begin{aligned} m < \pi r \lambda^{-1} (\beta + \sqrt{\beta^2/3 + 4/3}), \\ \pi r \lambda^{-1} (\beta - \sqrt{\beta^2/3 + 4/3}) < m < \pi r \lambda^{-1} (\beta + \sqrt{\beta^2/3 + 4/3}). \end{aligned} \quad (14)$$

Результат (14) графически изображен на плоскости с координатами  $n, r$  (рис. 5), где указан сектор, выделенный неравенствами (14), внутри которого лежат устойчивые моды. Осевая линия внутри этого сектора отвечает наиболее устойчивой при данном  $r$  моде с номером

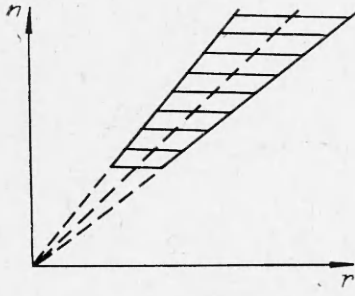


Рис. 5. Сектор устойчивости (заштрихован) спиновых волн с номерами  $n \gg 1$  на цилиндре радиуса  $r$ .

$n = \pi\beta r/\lambda$ , т. е. моде с максимальной амплитудой (речь здесь идет о номерах  $n \gg 1$ , где дискретностью параметра  $n$  можно пренебречь). Из рис. 5 видно, что любая мода с фиксированным номером станет неустойчивой на достаточно больших радиусах, если  $\beta^2 > 2$ .

Заметим также, что система уравнений типа (7) не имеет, по-видимому, предельных циклов, так как все неустойчивые точки оказались неустойчивыми как седла, а не как фокусы. Еще одно замечание состоит в следующем. Пусть одновременно существуют несколько устойчивых точек — аттракторов, каждая из которых имеет свою область притяжения в пространстве начальных значений. Как указано выше, каждая такая точка при прохождении радиуса  $r$  через бифуркационное значение  $r_0$  превращается не в предельный цикл, а в седло, поэтому естественно предположить, что область ее притяжения исчезает, когда  $r \rightarrow r_0$ . Можно оценить объем этой области  $V \approx \text{const} (r - r_0)^{2N(r_0)}$  при  $r \rightarrow r_0$ , где  $N(r_0) = 2\pi r_0/\lambda \cdot (\beta/2 + \sqrt{\beta^2/4 + 1})$  — число формульно существующих мод при  $r = r_0$ .

Вопрос о строгом исследовании устойчивости спиновых мод горения сплошного цилиндра представляет значительно большую трудность. Однако на этот вопрос можно получить ответ, исходя из следующих рассуждений. Сравнивая формулы (10) и (14), видим, что инкремент неустойчивости тривиального решения (см. рис. 3) для полого цилиндра принимает максимальное значение для возмущений с теми значениями числа  $n$ , которые лежат в центре области устойчивости (14), причем соответствующие им спиновые моды обладают наибольшими амплитудой и декрементом затухания возмущений. Естественно предположить, что это соответствие между наиболее быстро развивающейся модой в спектре малых возмущений плоского фронта сохранится и в случае сплошного цилиндра. Для реализации этого соображения будем искать решение линеаризованного уравнения (9) в следующем виде:

$$\xi_n^{(i)} = J_n(r/r_n^{(i)}) \cos(\omega t - n\psi) \exp(\theta_n^{(i)} t). \quad (15)$$

Здесь  $r_n^{(i)} = R/x_n^{(i)}$ , где  $R$  — радиус сплошного цилиндра, а  $x_n^{(i)}$  —  $i$ -й экстремум функции  $J_n(x)$ . Подставляя (15) в линеаризованное уравнение (9), найдем

$$\theta_n^{(i)} = \varphi \left[ 1 - \frac{\lambda^2 (x_n^{(i)})^2}{4\pi^2 R^2} + \frac{\beta \lambda x_n^{(i)}}{2\pi R} \right]. \quad (16)$$

Из (16) легко найти, что нарастающими будут те возмущения, для которых  $\theta_n^{(i)} > 0$ , т. е.

$$x_n^{(i)} < \pi R \lambda^{-1} (\beta + \sqrt{\beta^2 + 4}). \quad (17)$$

Поскольку для всех  $i$   $x_n^{(i)} > n$  [18, с. 995], то в силу (17) будут затухать все моды возмущений, для которых  $n \geq \pi R/\lambda \cdot (\beta + \sqrt{\beta^2 + 4})$  (такое же ограничение в соответствии с (11) имеет место и для полого цилиндра). Если  $R \gg \lambda$ , то в число нарастающих попадут возмущения с достаточно большими  $n \gg 1$ , для которых [18, с. 975]

$$x_n^{(i)} \approx \pi (i + n/2 + 1/4). \quad (18)$$



Как видно из рис. 5, для полого цилиндра с  $r \gg \lambda$  существует одна мода  $n = \pi\beta r/\lambda$ , лежащая в центре области устойчивости. В случае же сплошного цилиндра для каждого  $1 \ll n < \pi(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4})R/\lambda$  при  $R \gg \lambda$  существует своя область устойчивости с центральной модой, номер которой  $i$  при заданном  $n$  можно найти как положение максимума выражения (16) с учетом (18)

$$i(n) \approx \pi^2 \beta R \lambda^{-1} - n/2. \quad (19)$$

При этом для всех  $n < \pi(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4})R/\lambda$  инкремент (16) при  $i$ , определяемых (19), имеет примерно одинаковое максимальное значение

$$\theta_{\max} = \varphi(1 + \beta^2/4). \quad (20)$$

Таким образом, в соответствии с (19) и (20), при горении сплошного цилиндра большого радиуса должны быть одновременно устойчивы гораздо больше мод, чем в случае полого цилиндра того же радиуса.

В заключение сделаем важное замечание. Исходное уравнение (1) можно обобщить и в другом направлении, модифицируя его нелинейную часть

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 2\varphi \left[ \dot{\xi} \left( 1 - a \frac{\dot{\xi}^2}{\omega^2 A_0^2} - b \xi^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} \right]. \quad (21)$$

Подробные вычисления показывают, что в приведенном выше анализе такое обобщение ничего не изменит. Во все амплитуды войдет множитель  $3a + b$ , через который только и чувствуется конкретный вид нелинейности в (21).

### Общая поверхность вращения

Рассмотрим случай горения поверхности вращения с медленно изменяющимся радиусом, т. е.  $\dot{r}/r \ll \omega$ . Если, например, горит коническая поверхность,  $r = \theta t$  и имеется случай  $\omega t \gg 1$ . В нулевом приближении решение будет описываться прежними формулами, где теперь под  $r$  надо понимать медленную функцию времени

$$\xi_n = A_0 [1 + \lambda(\beta n)/2\pi r - \lambda^2 n^2/4\pi^2 r^2]^{1/2} \times \cos(\omega t - ny/r) = A_n \cos(\omega t - ny/r). \quad (22)$$

В следующем приближении найдем поправку к (22) за счет дополнительной нестационарности фронта, связанной с зависимостью  $r(t)$ , причем ограничимся первым порядком по  $\dot{r}$  и нулевым по  $\varphi$ . Подставляя в (9)  $\xi = \xi_n + \xi_n^{(1)}$ , получим

$$\xi_n^{(1)} = 2\omega^{-1} \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} [A_n(r) \sin(\omega t - ny/r)]. \quad (23)$$

Уравнение (23) отвечает на поставленный вопрос и показывает, что в общем случае медленное изменение радиуса со временем ведет также к слабому дополнительному искривлению фронта. Важно заметить, что даже при сколь угодно медленном монотонном изменении  $r(t)$  будем проходить в некоторые моменты времени через бифуркационные точки, т. е. точки смены мод, в окрестности которых эволюцию нельзя считать медленной. Характерное изменение  $r$  между двумя бифуркациями, как видно из (12) и (14), составляет  $\Delta r = \lambda/(\pi\beta)$ , соответствующее время —  $\Delta t = \Delta r/\theta = \lambda/\pi\beta\theta$ . Таким образом, формула (23) имеет смысл не просто когда  $\omega t \gg 1$ , а когда, к тому же  $\Delta t \gg \omega^{-1}$ , т. е.  $\lambda\omega \gg \pi\beta\theta$ .

Можно также высказать некоторые соображения о поведении амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  двух, сменяющих одна другую, мод в окрестности точки

перехода  $t_0$ . Вводя переменные  $\rho = r - r_0$ ,  $\tau = t - t_0$ , ( $\rho = \theta t$ ), можно записать, исходя из (9), систему

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \varphi [\alpha^2(r_0 + \rho) A_1 - A_1^3] - \varphi A_1 A_2^2, \\ \dot{A}_2 &= \varphi [\alpha^2(r_0 - \rho) A_2 - A_2^3] - \varphi A_2 A_1^2,\end{aligned}\quad (24)$$

которую линеаризуем в окрестности  $\tau = 0$ . Для этого положим

$$A_1 = A_1^0 + a_1, \quad A_2 = A_2^0 + a_2, \quad w_{1,2} = \varphi A_{1,2}^0 \frac{d(\alpha^2)}{dr} \Big|_{r=r_0}$$

и получим

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \varphi [\alpha^2(r_0) - 3(A_1^0)^2 - (A_2^0)^2] a_1 - 2A_1^0 A_2^0 a_2 + w_1 \tau, \\ \dot{a}_2 &= \varphi [\alpha^2(r_0) - 3(A_2^0)^2 - (A_1^0)^2] a_2 - 2A_1^0 A_2^0 a_1 + w_2 \tau.\end{aligned}\quad (25)$$

Решая (25) с условием  $a_1(0) = a_2(0) = 0$ , находим, что при  $\tau \rightarrow 0$

$$a_1 \approx w_1/2\tau^2, \quad a_2 \approx -w_2/2\tau^2. \quad (26)$$

Таким образом, в точке бифуркации  $\dot{A}_1 = \dot{A}_2 = 0$ . Тогда из (24) получим

$$(A_1^0)^2 = (A_2^0)^2 = \frac{1}{2} \alpha^2(r_0). \quad (27)$$

Формулы (26) и (27) имеют простой смысл: при  $\tau > 0$  пока  $A_1$  и  $A_2$  близки, они расходятся медленно, а по мере удаления — быстрее, пока  $A_2$  не обратится в нуль.

Авторы благодарят Я. Б. Зельдовича за инициирование работы и плодотворные дискуссии в процессе ее выполнения; А. И. Вольперта, А. Н. Иванову, А. Г. Мержанова, Б. И. Хайкина, С. И. Худяева, К. Г. Шкадинского — за обсуждение результатов и ценные замечания.

Поступила в редакцию  
23/V 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. И. Шелкин. УФН, 1965, 87, 2.
2. А. Г. Мержанов, А. К. Филопенко, И. П. Боровицкая. Докл. АН СССР, 1973, 208, 4.
3. А. К. Philonenko. Arch. Termod. spal., 1975, 1, 1.
4. Ю. М. Максимов, А. Т. Пак и др. ФГВ, 1979, 14, 3.
5. Т. П. Ивлева, А. Г. Мержапов, К. Г. Шкадинский. Докл. АН СССР, 1978, 239, 5.
6. Т. П. Ивлева, А. Г. Мержапов, К. Г. Шкадинский. ФГВ, 1980, 16, 2.
7. А. П. Алдушин, Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед. Докл. АН СССР, 1980, 251, 5.
8. А. П. Алдушин, Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед. — В сб.: Горение гетерогенных и конденсированных систем. Черноголовка, 1980.
9. Г. М. Махвиладзе, Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1974, 5.
10. А. П. Алдушин, С. Г. Каспарян. Докл. АН СССР, 1979, 244, 1.
11. В. А. Васильев, Ю. М. Ромаповский, В. Г. Яхпо. УФН, 1979, 128, 4.
12. М. И. Рабинович. Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, 4.
13. Я. Б. Зельдович, О. И. Лейлуцкий, В. Б. Либрович. Теория нестационарного горения пороха. М., Наука, 1975.
14. К. Г. Шкадинский, Б. И. Хайкин, А. Г. Мержапов. ФГВ, 1974, 7, 1.
15. К. Я. Трошин. Докл. АН СССР, 1979, 125, 4.
16. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М., Наука, 1973.
17. М. И. Рабинович. УФН, 1978, 125, 1.
18. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1963.