

8. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел.— М.: Наука, 1983.
9. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой // ПМТФ.— 1983.— № 5.
10. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.
11. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
12. Манжиров А. В. Осесимметричные контактные задачи для неоднородно стареющих вязкоупругих слоистых оснований // ПММ.— 1983.— Т. 47, вып. 4.

Поступила 3/VII 1986 г.

УДК 539.374

## ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Э. И. Блинов, К. Н. Русинко

(Львов)

Решается задача аналитического описания связей между деформациями, напряжениями и температурой «в точке» твердого тела при его термомеханическом нагружении. Напряжения разделяются на равновесные и неравновесные. Равновесные напряжения не зависят от временных эффектов деформирования, и через них методами классической теории пластичности определяется необратимая деформация. Учитывается возврат механических свойств при повышенных температурах. Кроме неперманентной пластической деформации описываются неустановившаяся и высокотемпературная установившаяся ползучесть и температурное последствие.

**1. Основные положения.** Рассматривается состояние вещества постоянной плотности достаточно малой окрестности точки деформируемого твердого тела как элемента сплошной среды, характеризующего состояние в его точке. Вследствие специфики деформации твердого тела такой феноменологический элемент среды образует закрытую термодинамическую систему, в которой действуют законы классической термодинамики [1].

Эксперименты показывают [2, 3], что если в некоторый момент термомеханического нагружения реального твердого тела зафиксировать деформацию и температуру, то после этого происходит уменьшение напряжений, так что полное (термодинамическое) равновесие в системе наступает только после такой релаксации.

Напряжения, которые остаются после перехода системы из фактического в термодинамически равновесное состояние, назовем равновесными, а релаксирующая часть напряжений, компоненты тензора которых получаются путем вычитания компонент  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  тензора равновесных напряжений из соответствующих компонент  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений, имевших место в момент фиксирования деформации и температуры, назовем неравновесными напряжениями и обозначим  $\psi_{ij}$ . Таким образом, в каждый момент деформирования имеет место тождество

$$(1.1) \quad \psi_{ij} = \sigma_{ij} - \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

По определению неравновесные напряжения непосредственно выражают термодинамическую неравновесность, т. е. кинетику деформирования реального твердого тела во времени, отражая нулевое начало термодинамики для рассматриваемого случая.

В термомеханике тип среды в смысле «реологического закона» исследуемого материала [1] полностью зависит от специфики ее диссипации. При известной диссипативной функции соотношения, определяющие связи между напряжениями и деформациями в точке среды, т. е. тип среды, могут быть легко найдены.

Полная плотность производства энтропии в точке среды, т. е. диссипативная функция феноменологического элемента в рамках неравновес-

ной термомеханики, найдена с помощью первого и второго начал термодинамики в [4] в виде

$$(1.2) \quad \Theta = (\langle \sigma_{ij} \rangle \dot{\epsilon}_{ij}^H + \psi_{ij} \dot{\mu}_{ij} - q_i T_{,i} / T) / T,$$

причем, согласно второму закону термодинамики,  $\Theta \geq 0$ . Здесь и ниже  $\epsilon_{ij}^H = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^r$ ;  $\epsilon_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}^H$ ,  $\epsilon_{ij}^r$  — компоненты тензоров полной, необратимой и обратимой относительных деформаций соответственно;  $\mu_{ij}$  — компоненты тензорной величины, характеризующей неравновесность процесса деформации «координатно»:  $q_i$  — компоненты вектора скорости потока тепла; по повторяющимся индексам происходит суммирование; точка над символом означает дифференцирование по времени  $t$ , а запятая на уровне индексов — по следующему за ней индексу.

**2. Определяющие уравнения.** В дальнейшем ограничимся процессами, протекающими в поле однородных температур, где третий член (1.2) равен нулю, и проанализируем оставшиеся члены, учитывая, что при рассматриваемых малых деформациях их влиянием друг на друга можно пренебречь.

Первый член (1.2)  $\langle \sigma_{ij} \rangle \dot{\epsilon}_{ij}^H \geq 0$  показывает, что и при учете кинетики процесса необратимая деформация полностью определяется только равновесными напряжениями. Но процессы необратимой деформации, составленные из последовательности равновесных состояний, не зависят от времени и являются предметом классической теории пластичности [5]. В частности, при гладкой поверхности нагружения ассоциированный закон течения записывается как

$$(2.1) \quad d\epsilon_{ij}^H = F \frac{\partial f}{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle} \frac{\partial f}{\partial \langle s_{mn} \rangle} d\langle s_{mn} \rangle, \quad \frac{\partial f}{\partial \langle s_{mn} \rangle} d\langle s_{mn} \rangle \geq 0.$$

Для простоты изложения ограничимся первоначально изотропным материалом с трансляционным упрочнением, при котором уравнение поверхности нагружения имеет вид [6]

$$(2.2) \quad f(\langle \sigma_{ij} \rangle) = \frac{3}{2} (\langle s_{ij} \rangle - c\epsilon_{ij}^H) (\langle s_{ij} \rangle - c\epsilon_{ij}^H) - \langle \sigma_T \rangle^2 = 0,$$

где  $\langle \sigma_T \rangle$  — предел текучести при «равновесном» нагружении;  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  — компоненты девиатора тензора равновесных напряжений;  $f = f(\langle \sigma_{ij} \rangle)$  — поверхность нагружения;  $F$  — постоянная материала.

Согласно второму члену (1.2)  $\psi_{ij} \dot{\mu}_{ij} \geq 0$ , полагая, что  $\psi_{ij} = \psi_{ij}(\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \dots, \mu_{33})$  и что эти функции линейные, запишем

$$(2.3) \quad \psi_{ij} = r_{ijmn} \mu_{mn}.$$

Как и всякий «координатный» параметр состояния,  $\mu_{ij}$  выражается через независимые «силовые» координаты  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $\psi_{ij}$ ,  $T$ , так что если за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  равновесные напряжения получили приращение  $d\langle \sigma_{mn} \rangle$ , неравновесные —  $d\psi_{mn}$ , а температура —  $dT$ , то

$$(2.4) \quad d\mu_{ij} = a_{ijmn} d\langle \sigma_{mn} \rangle + b_{ijmn} d\psi_{mn} + r_{ij} dT.$$

Из (2.3) и (2.4) получаем  $\dot{\psi}_{ij} + A_{ijmn} \psi_{mn} = q_{ijmn} \langle \dot{\sigma}_{mn} \rangle + g_{ij} \dot{T}$  ( $A_{ijmn}$ ,  $q_{ijmn}$ ,  $g_{ij}$  — постоянные материала).

Для первоначально изотропного материала эти соотношения имеют вид

$$(2.5) \quad \dot{\psi}_{ij} + g\psi_{ij} = a \langle \dot{\sigma}_{ij} \rangle.$$

Здесь коэффициенты  $g$  и  $a$  зависят только от температуры. Уравнения (1.1), (2.1) и (2.5) определяют необратимую деформацию «в точке» твердого первоначально изотропного тела.

**3. Простое одноосное растяжение и неустановившаяся ползучесть при постоянной температуре хранения.** Разделение полных напряжений на равновесные и неравновесные позволяет описать ряд скоростных эффектов деформации: зависимость деформации от скорости нагружения, задержку ползучести, зависимость модуля догрузки от режима нагружения, неустановившуюся ползучесть, которые уже исследовались в [7] на основании концепции скольжения.

В качестве примера опишем аналитически простое одноосное растяжение и неустановившуюся ползучесть при постоянной комнатной температуре хранения.

При одноосном нагружении из (2.2)

$$(3.1) \quad \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_T \rangle + \frac{3}{2} c \varepsilon^F,$$

а из (2.5)

$$(3.2) \quad \dot{\psi} + g\psi = a\langle \dot{\sigma} \rangle$$

( $g$  и  $a$  — постоянные материала).

Подставив (1.1) и (3.1) в (3.2) и решив полученное уравнение при начальных условиях ( $t = 0$ ,  $\sigma(0) = \sigma_T$ ,  $\langle \sigma \rangle(0) = \langle \sigma_T \rangle$ ,  $\varepsilon^H(0) = 0$ ), найдем выражение

$$(3.3) \quad \varepsilon^H(t) = \frac{2}{3c(1+a)} \left[ \sigma(t) + \frac{ag}{1+a} \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(-\frac{g}{1+a}(t-\tau)\right) d\tau + \right. \\ \left. + ((1+a)\langle \sigma_T \rangle - \sigma_T) \exp\left(-\frac{g}{1+a}t\right) - (1+a)\langle \sigma_T \rangle \right],$$

определяющее необратимую деформацию в зависимости от скорости растяжения.

Установим связь между  $\sigma_T$  и  $\langle \sigma_T \rangle$ . Подставив (1.1) в (3.2) и решая полученное уравнение относительно  $\langle \dot{\sigma} \rangle$  при растяжении до предела текучести, т. е. при  $t = 0$ ,  $\sigma(0) = \langle \sigma \rangle(0) = 0$ , имеем

$$(3.4) \quad \langle \dot{\sigma} \rangle(t) = \frac{1}{1+a} \left[ \dot{\sigma}(t) + \frac{ag}{1+a} \int_0^t \exp\left(-\frac{g}{1+a}(t-\tau)\right) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right].$$

Как правило, растяжение в упругой области проводится по линейному закону  $\sigma(t) = vt$  ( $v = \text{const}$ ). Подставляя это значение в (3.4) и учитывая, что на пределе текучести  $\sigma_T = vt_T$ , запишем

$$(3.5) \quad \langle \sigma_T \rangle = \sigma_T - \frac{av}{g} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{g}{1+a} \frac{\sigma_T}{v}\right) \right].$$

«Равновесный» предел текучести  $\langle \sigma_T \rangle$  — постоянная материала. Практически это тот экспериментально получаемый предел текучести, значение которого не меняется при достаточно малых скоростях растяжения. Поэтому, согласно (3.5), полный предел текучести  $\sigma_T = f(v)$ , т. е. уравнение (3.5) дает возможность определить  $\sigma_T$  как функцию скорости растяжения. Однако практическая ценность уравнения (3.5) состоит в том, что оно дает возможность с помощью самых простых опытов на растяжение до  $\sigma_T$  с разными скоростями найти постоянные  $g$  и  $a$ . Для этого достаточно провести два эксперимента на растяжение: один за время  $t_1$  с постоянной скоростью  $v_1$  до  $\sigma_1^T$ , а второй, например, — за время  $t_2 = 2t_1$  с постоянной скоростью  $v_2$  до  $\sigma_2^T \neq \sigma_1^T$ . Подставляя эти значения в (3.5) и решив полученные уравнения, найдем

$$(3.6) \quad \frac{a}{g} = \frac{t_1 - \langle \sigma_T \rangle / v_1}{1 - \exp(\ln y)}, \quad \frac{g}{1+a} = -\frac{1}{t_1} \ln y,$$

где

$$y = \frac{\left(2t_1 - \frac{\langle \sigma_T \rangle}{v_2}\right) \pm \left[ \left(2t_1 - \frac{\langle \sigma_T \rangle}{v_2}\right)^2 - 4 \left(t_1 - \langle \sigma_T \rangle \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2}\right) \left(t_1 - \frac{\langle \sigma_T \rangle}{v_1}\right) \right]^{1/2}}{2 \left(t_1 - \frac{\langle \sigma_T \rangle}{v_1}\right)}$$

Положив в уравнении (3.3) напряжение постоянной величиной  $\sigma = \sigma_* = \text{const}$ , имеем

$$(3.7) \quad \varepsilon^H(t) = \frac{2}{3c(1+a)} \left[ \sigma_* - \sigma_T \exp\left(-\frac{g}{1+a} t\right) + (\sigma_* a - (1+a) \langle \sigma_T \rangle) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \exp\left(-\frac{g}{1+a} t\right)\right) \right].$$

Вычитая из (3.7) значение необратимой деформации при мгновенном растяжении до  $\sigma_*$ , получим формулу для необратимой деформации при постоянном напряжении  $\Delta \varepsilon_n^H(t) = \frac{2}{3c(1+a)} (\sigma_* a - \sigma_T - (1+a) \langle \sigma_T \rangle) \left(1 - \right.$

$\left. - \exp\left(-\frac{g}{1+a} t\right)\right)$ , которая определяет неустановившуюся ползучесть после мгновенного растяжения.

**4. Высокотемпературная деформация.** Необратимая деформация искажает структуру материала. Однако при достаточно высокой температуре искаженная деформацией структура возвращается в исходное естественное состояние. Происходит температурное разупрочнение или «отдых» материала. Такое разупрочнение — специфическая особенность высокотемпературной деформации, порождающей качественно новые эффекты (установившуюся ползучесть и температурное последствие [8, 9]).

Ограничимся снова материалом с линейным трансляционным упрочнением, при котором поверхность нагружения перемещается в поле напряжений как жесткое целое. При этом температурное разупрочнение может быть выражено движением центра поверхности нагружения в первоначальное положение, которое она занимала до направленного деформационного упрочнения. Как и всякий термоактивируемый процесс, такое разупрочнение протекает во времени, и для его учета ассоциированный закон течения (2.1) запишем в виде

$$(4.1) \quad d\varepsilon_{ij}^H = F \frac{\partial f}{\partial \langle s_{ij} \rangle} \frac{\partial f}{\partial \langle s_{mn} \rangle} d\Sigma_{mn};$$

$$(4.2) \quad d\Sigma_{mn} = d \langle s_{mn} \rangle + K(T) \alpha_{mn} dt,$$

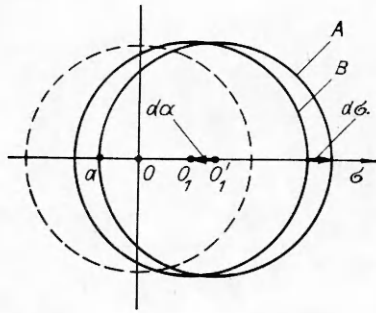
а уравнение поверхности нагружения — в виде

$$(4.3) \quad f(\langle \sigma_{ij} \rangle) = \frac{3}{2} (\langle s_{ij} \rangle - \alpha_{ij}) (\langle s_{ij} \rangle - \alpha_{ij}) - \langle \sigma_T \rangle^2 = 0;$$

$$(4.4) \quad d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^H - K(T) \alpha_{ij} dt.$$

Первое слагаемое (4.4) показывает, что упрочнение материала обусловлено необратимой деформацией. В частности, при  $K(T) = 0$  и нулевых начальных условиях  $\alpha_{ij} = c\varepsilon_{ij}^H$ , т. е. при равновесных процессах имеет место случай теории пластичности [6]. Второе слагаемое (4.4) отражает свойство материала разупрочняться при достаточно высоких температурах, поэтому параметр  $K$  зависит от температуры так, что при отсутствии такого разупрочнения  $K(T) = 0$ .

Уравнения (1.1), (2.5), (4.1)–(4.4) представляют собой полную систему реологических уравнений неизотермической деформации с учетом температурного разупрочнения. Используем их для аналитического описания и объяснения условий существования таких специфических эффектов высокотемпературной деформации, как установившаяся ползучесть и температурное последствие.



Р и с. 1

**5. Установившаяся ползучесть.** Предположим, что установившаяся ползучесть происходит при той же постоянной температуре  $T_*$ , как и предварительное нагружение. Причем эта температура достаточно высокая для того, чтобы неравновесных напряжений вообще не существовало и происходило высокотемпературное разупрочнение, так что в любой произвольный момент времени  $\psi_{ij} = 0$ , и, следовательно,  $\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}$ . При этом в (3.2)  $a = 0$  и соотношения между напряжениями и необратимыми деформациями при мгновенном предварительном

нагружении до  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$ ,  $\sigma_{ij}^* = \text{const}$  представляются соотношениями (4.1)–(4.4) при  $dt = 0$ , т. е. уравнениями варианта теории течения [6].

Механизм деформации в условиях температурного разупрочнения при постоянных напряжениях и температуре объясним на примере поведения образца после простого одноосного растяжения, когда, согласно (4.4),

$$(5.1) \quad d\alpha = c d\epsilon^H - K(T)\alpha dt.$$

Пусть образец из первоначального изотропного материала в условиях температурного разупрочнения растянут при постоянной температуре до  $\sigma_* > \sigma_T$ , а затем напряжение поддерживается постоянным. При  $\sigma_* = \text{const}$  происходит температурное разупрочнение, в результате которого центр поверхности нагружения  $O'_1$ , занимавшей в момент достижения напряжением значения  $\sigma_*$  положение  $A$  (рис. 1, где исходное положение сферы текучести показано штрихами), возвращается к исходному положению  $O$  и за промежуток времени  $dt$  переместится на элементарное расстояние  $O'_1 O_1 = d\alpha$ , так что сама поверхность нагружения займет положение  $B$ . При этом необратимой деформации не происходит ( $d\epsilon^H = 0$ ) и из (5.1)

$$(5.2) \quad d\alpha = -K(T)\alpha dt.$$

Но изменение положения жесткой поверхности нагружения (сферы постоянного радиуса  $\sigma_T$ ), вызванное элементарным смещением ее центра на величину  $d\alpha$ , определяемую равенством (5.2), при фиксированном растягивающем напряжении означает его приращение по отношению к новому положению этой поверхности на элементарную величину  $d\sigma = -d\alpha$  (рис. 1). Как известно из теории течения, это вызывает мгновенное элементарное приращение необратимой деформации  $d\epsilon^H$ , которая упрочняет материал, возвращая тем самым поверхность нагружения в исходное состояние (из положения  $B$  в положение  $A$ ).

При мгновенном элементарном приращении напряжения второе слагаемое в (4.4) отсутствует и, следовательно,

$$(5.3) \quad d\sigma = |d\alpha| = c d\epsilon^H.$$

Так как поверхность нагружения перемещается как жесткое целое и  $d\sigma = -d\alpha$ , то из (5.2) и (5.3)

$$(5.4) \quad \dot{\epsilon}^H(t) = K(T_*)\alpha(t)/c.$$

С другой стороны, подставляя (4.3) в (4.1) для одноосного нагружения, получаем с учетом (4.2) и (4.4) при  $d\sigma = 0$

$$(5.5) \quad \dot{\epsilon}^H(t) = 4F\sigma_T^2 K(T_*)\alpha(t).$$

Из сопоставления (5.4) и (5.5) находим постоянную материала  $c = 1/(4F\sigma_T^2)$ .

При постоянном напряженном состоянии, когда, согласно (4.3),  $\alpha_{ij}$  (а значит, и  $\alpha$  при одноосном нагружении) — фиксированная величина

на, формула (5.4) определяет необратимую деформацию с постоянной скоростью.

Таким образом, одновременное протекание процессов механического упрочнения и механического возврата при постоянном напряженном состоянии приводит к необратимой деформации с постоянной скоростью, т. е. к установившейся (линейной) ползучести.

Нетрудно убедиться, что к аналогичному результату (т. е. к формуле (5.4)) приводит формальная подстановка в (5.1) значения  $\alpha = \text{const}$ , так что приведенные выше рассуждения необходимы только для объяснения механизма установившейся ползучести. Изменение поверхности нагружения из-за возврата механических свойств, но не связанное с деформацией ползучести, отмечено в [10].

**6. Температурное последствие.** Явление «самопроизвольного» изменения формы изделия при многократном циклическом изменении температуры, которое может происходить и при отсутствии внешней нагрузки, называется температурным последствием. При изменении температуры поликристаллического тела в нем из-за плотного прилегания друг к другу хаотически расположенных частиц (кристаллов, зерен и т. п.) возникают термические микроструктурные напряжения (второго рода) [7, 11]. Равенство нулю среднего значения микроструктурных напряжений феноменологического элемента свободного от внешних сил тела при любом безградиентном изменении его температуры говорит об их равномерном случайном распределении. Поэтому при изменении температуры они увеличиваются одинаково во всех направлениях, достигая впервые поверхности текучести или во всех ее точках сразу (если эта поверхность — сфера с центром в нулевой точке поля напряжений), или в той ее точке, которая наименее удалена от центра поля напряжений (см. рис. 1, точка *a*). При продолжающемся росте термоструктурных напряжений тело необратимо макродеформируется в направлении, определяемом положением «минимальной» точки на поверхности нагружения (на рис. 1 температурное уменьшение длины).

Если упрочняющийся материал в некотором направлении необратимо деформируется непосредственно из-за изменения температуры, то в этом направлении поверхность нагружения удаляется от нулевого центра поля напряжений, т. е. происходит температурное упрочнение. Поэтому если температуру вернуть к исходному значению, а затем вновь изменять, как и раньше, то для начала необратимой деформации в прежнем направлении она должна достигнуть максимального предшествующего значения и изменение формы тела при циклических одновеличинных изменениях температуры происходить не будет. Однако это утверждение верно только при отсутствии температурного разупрочнения. При его наличии при фиксированной измененной температуре материал разупрочнится. Это разупрочнение будет сопровождаться необратимой деформацией, механизм происхождения которой тот же самый, как и установившейся ползучести, только здесь она образуется при релаксационном уменьшении термоструктурных микронапряжений, что делает ее скорость переменной (постепенно затухающей).

Преимущественное направление необратимой деформации материала из-за изменения температуры может быть создано и приложенными внешними силами. Действительно, если к телу приложена некоторая внешняя нагрузка, пусть не выводящая материал из области упругих деформаций, то при изменении температуры термоструктурные напряжения в некотором направлении будут складываться с силовыми. Если изменение температуры достаточно велико для того, чтобы эта суммарная величина напряжений превысила предел текучести, то в этом направлении непосредственно при изменении температуры произойдет необратимая деформация. Если же, кроме того, имеется температурное разупрочнение, то форма изделия изменится и при циклических одноамплитудных теплосменах аналогично рассмотренному.

Термоструктурные напряжения, возникающие в изделии при изменении его температуры, охарактеризуем некоторой усредненной изотропной мерой, которую введем в ассоциированный закон течения. Эта мера, отражая свойства таких напряжений, должна зависеть от всей истории изменения температуры: убывать с течением времени при постоянной температуре и давать приращение необратимой деформации как при увеличении, так и при уменьшении температуры. Таким требованиям удовлетворяет скалярная величина

$$(6.1) \quad Q(t) = \left| \int_0^t \dot{T}(s) R(t-s) ds \right|,$$

где  $R(t-s)$  — убывающая функция с ростом аргумента  $t-s$ , описывающая релаксацию термоструктурных микронапряжений. Поэтому ядро  $R$  в (6.1) принимается в виде (6.2)  $R = B \exp(-\beta(t-s))$  ( $B$  — постоянная, а  $\beta$  — параметр материала).

Меру термоструктурных микронапряжений прибавим к действующим напряжениям в условиях температурного разупрочнения, записав (4.2) в виде

$$(6.3) \quad d\Sigma_{mn} = d\langle s_{mn} \rangle + K(T)\alpha_{mn}dt + dQ(t).$$

Найдем вначале необратимую деформацию из-за мгновенного изменения температуры  $\Delta T = T_* - T_0$  (т. е. при тепловом ударе), при котором  $dt = 0$  и, следовательно,  $d\langle s_{mn} \rangle = 0$ . Так как в случае простого одноосного нагружения с растяжением, подставляя (4.3) в (4.1), имеем

$$(6.4) \quad d\varepsilon^H = 4F\langle \sigma_T \rangle^2 d\Sigma,$$

а согласно (6.3)  $d\Sigma = Bd \left[ \int_0^t \dot{T}(s) \exp(-\beta(t-s)) ds \right]$ , то, интегрируя (6.4) и учитывая, что при  $t^0 = 0$   $\Delta T = 0$ ,  $\varepsilon^H = \varepsilon^H(0) = \varepsilon_0^H$  — необратимая деформация в начале теплового удара,  $F = 1/(4c\sigma_T^2)$ , получаем

$$(6.5) \quad \varepsilon_*^H = \varepsilon_c^H + B|\Delta T|/c$$

$\varepsilon_*^H$  — необратимая деформация в конце теплового удара).

Теперь найдем обратимую деформацию в результате теплового удара. Для этого зафиксируем измененную температуру и растягивающее напряжение, т. е. положим  $T = T_* = \text{const}$  и  $\sigma = \sigma_* = \text{const}$ , и, решая систему уравнений (5.1) и (6.3), имеем

$$(6.6) \quad c\varepsilon^F = c\Delta\varepsilon_*^H + K\alpha_*t + \frac{B}{\beta} \left[ Kt - \left(1 - \frac{K}{\beta}\right) \left(1 - \exp(-\beta t)\right) \right] |\Delta T|.$$

Для одноосного растяжения из (4.3) находим равенство  $(3/2)\alpha = \langle \sigma \rangle - \langle \sigma_T \rangle$ , которое при высокотемпературной ползучести без упрочнения, т. е. при  $\langle \sigma \rangle = \sigma = \sigma_* = \text{const}$  и  $\alpha = \alpha_* = \text{const}$ , принимает вид  $\alpha_* = (2/3)(\sigma_* - \sigma_T)$ . Подставляя это значение  $\alpha_*$  и  $\Delta\varepsilon_*^H = \varepsilon_*^H - \varepsilon_0^H$  из (6.3) в (6.6), получаем основную расчетную формулу

$$(6.7) \quad \varepsilon^H(t) = \frac{1}{c} \left[ \frac{2c}{3} K (\sigma_* - \sigma_T) t + B \left( 1 - \frac{K}{\beta} t - \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{K}{\beta} \right) (1 - \exp(-\beta t)) \right) \right] |\Delta T|,$$

которая учитывает основные характерные особенности деформации при колебании температуры в условиях высокотемпературной ползучести, отмеченные в экспериментах [8, 9, 11].

**7. Ползучесть цинка при циклических теплосменах.** На рис. 2 кривая 2 представляет собой деформацию ползучести поликристаллического цинка при  $T_1 = 325$  К и  $\sigma_* = 60$  МПа, а 1 — его деформацию при

циклически меняющейся температуре [8], показанной здесь же. Из диаграмм следует, что циклические изменения температуры многократно увеличивают ползучесть цинка, делая неоспоримо важным учет этих особенностей в теории.

Расчетная формула для деформации в описанных условиях вытекает непосредственно из формулы (6.7)

$$(7.1) \quad \Delta \epsilon^n(t) = [L + Rt + M(1 - \exp(-\beta t))]| \Delta T |,$$

где  $L$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $\beta$  — постоянные материала, подлежащие определению из экспериментов.

Постоянную  $L$ , характеризующую мгновенное приращение деформации при скачке температуры, найдем, воспользовавшись результатами испытаний цинка, приведенными в [8, 9, 12], из которых следует, что при  $\Delta T = 40$  К и  $\sigma_* = 60$  МПа с ростом температуры  $\Delta \epsilon^n = 7,7 \cdot 10^{-5}$ . Подставляя эти значения в (7.1) при  $t = 0$ , получаем  $L_{\text{в}} = 1,925 \cdot 10^{-6}$  К $^{-1}$ . При понижении температуры  $\Delta \epsilon^n = 5,55 \cdot 10^{-5}$  и  $L_{\text{н}} = 1,387 \cdot 10^{-6}$  К $^{-1}$ . Здесь  $L_{\text{в}}$  и  $L_{\text{н}}$  — значения  $L$  при повышении и понижении температуры.

Для определения постоянной  $M$ , характеризующей температурное последствие, вновь воспользуемся результатами, приведенными в [8, 9, 12], согласно которым при  $\Delta T = 40$  К и  $\sigma_* = 60$  МПа температурное последствие цинка образует деформацию  $\epsilon_1^n = 3,3 \cdot 10^{-5}$ . Подставляя эти данные в (7.1) при  $L = R = 0$  и  $t \rightarrow \infty$ , имеем  $M = 8,26 \cdot 10^{-7}$  К $^{-1}$ .

Анализ графиков деформации температурного последствия, приведенных в [8, 9, 12], показывает, что в цинке она прекращается не позже чем через 2 ч после скачка температуры. Принимая время релаксации  $t_p = 7200$  с, получаем из (7.1) (при  $L = R = 0$ )  $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$  с $^{-1}$ .

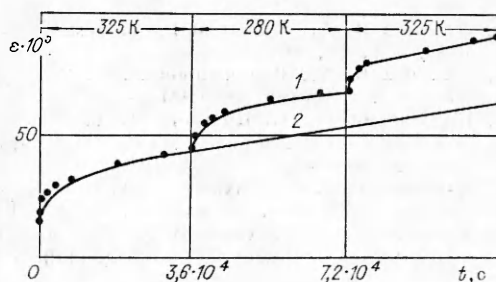
Для определения постоянной  $R$  воспользуемся кривой изотермической ползучести 2 (рис. 2), согласно которой через 10 ч при  $T = 325$  К, когда прошли все релаксационные процессы, вызванные изменением температуры,  $\epsilon^n = 4,25 \cdot 10^{-4}$ . При этом из (7.1) находим  $R = 1,86 \cdot 10^{-10}$  (К $\cdot$ с) $^{-1}$ .

Подставляя найденные значения постоянных в (7.1), определим искомую расчетную формулу деформации цинка при циклических тепломенах. Результаты расчетов, соответствующие опытным данным, показаны на рис. 2.

Полученная теория неизотермической деформации выражает новый подход к явлению деформирования твердого тела, подтвержденный для некоторых наиболее характерных случаев нагружения опытными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вакуленко А. А. О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах // Исследования по упругости и пластичности. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.
2. Вавакин А. С., Виктор В. В., Механикова И. И. и др. Экспериментальное и теоретическое изучение влияния временных эффектов на пластическое деформирование сталей при комнатной температуре. — М., 1983. — (Препринт/ИПМ АН СССР; 211).
3. Борздыка А. И., Гецов Л. Б. Релаксация напряжений в металлах и сплавах. — М.: Металлургия, 1978.
4. Русинко К. Н., Блинов Э. И. Аналитическое описание термоупругопластического деформирования твердого тела // ПМ. — 1981. — Т. 17, № 11.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т. 2.
6. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. — 1954. — Т. 6, № 3.
7. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. — Львов: Вища шк., 1981.



Р и с. 2



8. Лихачев В. А., Малыгин Г. А. Температурное последствие в цинке //ФММ.— 1963.— Т. 16, вып. 5.
9. Лихачев В. А., Владимиров В. И. Роль упрочнения в ползучести и температурном последствии // ФММ.— 1965.— Т. 19, вып. 1.
10. Кадашевич Ю. И., Кузьмин М. А. Описание возврата пластических свойств конструкционного материала на основе учета микропластической неоднородности // Пробл. прочности.— 1982.— № 4.
11. Давиденков Н. Н., Лихачев В. А. Необратимое формоизменение металлов при циклическом тепловом воздействии.— М.; Л.: Машгиз, 1962.
12. Малыгин Г. А., Лихачев В. А. Роль анизотропии теплового расширения и тепловых микронапряжений // Завод. лаб.— 1966.— Т. 32, № 3.

Поступила 20/V 1986 г.

УДК 539.3

## НЕДИССИПАТИВНЫЕ НЕУПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Г. В. Иванов  
(Новосибирск)

Упругие деформации элемента сплошной среды — часть деформаций элемента, которая после его разгрузки (снятия внешних воздействий) исчезает. Неупругие (остаточные) деформации — часть деформаций элемента, которая остается в нем после его разгрузки. Наряду с неупругими деформациями элемента, при которых механическая энергия переходит в тепло, возможны недиссипативные неупругие деформации, т. е. такие, при которых механическая энергия не переходит в тепло.

Одним из простейших наглядных примеров процесса деформирования с недиссипативными неупругими деформациями может быть деформирование системы из двух упругих пружинок и стержня (рис. 1 из [1]). При деформировании этой системы механическая энергия в тепло не переходит, но из-за односторонних зажимов  $A$  процесс разгрузки протекает иначе, чем процесс нагружения, вследствие чего зависимость между приложенной к стержню силой  $p$  и перемещением  $\Delta$  стержня будет иметь вид, указанный на рис. 2, где  $\Delta^*$  — недиссипативная неупругая деформация системы.

В данной работе формулируются уравнения, определяющие недиссипативные неупругие деформации элемента сплошной среды.

1. Деление деформаций на упругие и неупругие. В качестве тензора деформаций примем [2]

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij} e^i e^j = \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} \mathfrak{A}^\alpha \mathfrak{A}^\beta, \quad \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathfrak{A}_\alpha \cdot \mathfrak{A}_\beta - \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta)$$

( $\mathfrak{A}^\alpha$ ,  $\mathbf{e}^i$  — базисные векторы лагранжевой и декартовой систем координат).

Состояние элемента среды, от которого отсчитываются деформации, назовем начальным. Полагаем, что напряжения в начальном состоянии равны нулю, плотность и температура равны заданным, отличным от нуля значениям  $\rho_0$ ,  $T_0$  и на любом этапе процесса деформирования элемента среды можно его «полностью разгрузить» до состояния с равными нулю напряжениями и температурой  $T_0$  (вырезая элемент из среды, нагревая или охлаждая его до температуры начального состояния и давая ему возможность свободно деформироваться).

В газообразных средах равенство нулю напряжений возможно лишь при равной нулю плотности. В этом случае в качестве начального принимается состояние, в котором среднее напряжение и температура равны заданным, отличным от нуля значениям, а под «полной разгрузкой» понимается переход в состояние со средним напряжением и температурой, равными их значениям в начальном состоянии.

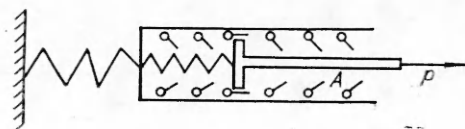


Рис. 1

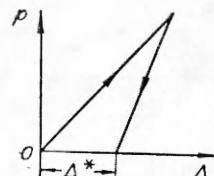


Рис. 2