

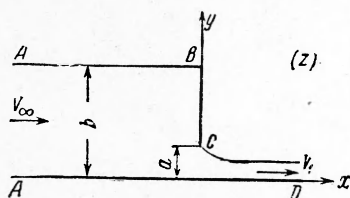
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ  
ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ  
ИЗ-ПОД ЩИТА

М. И. Гуревич, Г. Н. Пыхтеев

(Москва, Новосибирск)

Решение задач о течении тяжелой идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями связано с большими математическими трудностями. Поэтому в этой области применялись различные приближенные методы. Среди них следует отметить методы Н. Е. Кочкина [1], Э. Марки [2] и К. Воронца [3, 4]. Э. Марки при помощи предложенного им метода получил приближенное решение задачи об истечении тяжелой жидкости из-под щита [2]. Ниже дается решение этой же задачи приближенным методом, в основе которого лежат идеи К. Воронца [3, 4].

1. **Постановка задачи.** Рассматриваемое течение изображено на фиг. 1: жидкость течет между двумя параллельными горизонтальными стенками  $AB$  и  $AD$ , верхняя стенка оканчивается справа составляющим со стенкой



Фиг. 1

прямой угол щитом  $CB$ , из-под которого вытекает струя со свободной поверхностью  $CD$ . Область изменения потенциала рассматриваемого течения  $w = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$ —потенциал скорости,  $\psi$ —функция тока) представляет собой полосу шириной  $Q$ , где  $Q$ —полный расход жидкости. Примем  $\varphi = 0$  в точке  $C$  и  $\psi = 0$  на линии тока  $ABCD$  (фиг. 1). Оси координат направим, как указано на фиг. 1.

Обозначим скорость в точке  $C$  через  $V_0$ , а скорость в точке  $A$  — через  $V_\infty$ . В качестве основных определяющих безразмерных параметров течения возьмем

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \nu = \frac{V_0^2}{ga} \quad (1.1)$$

т. е. отношение характерных длин и число Фруда.

Требуется найти комплексный потенциал искомого течения  $w = w(z)$  и определить форму свободной поверхности.

2. **Приближенное решение задачи.** Будем искать комплексный потенциал рассматриваемого течения  $w = w(z)$  в параметрической форме

$$w = w(\zeta), \quad z = z(\zeta) \quad (2.1)$$

где  $\zeta = \xi + i\eta$  — комплексное переменное, изменяющееся в правом квадранте вспомогательной верхней полуплоскости. Для этого отобразим область изменения  $w$  на область изменения  $\zeta$  с соответствием точек, изображенным на фиг. 2, 3, и введем функцию Жуковского

$$\Omega(\zeta) = \ln V_0 \frac{dz}{d\zeta} \quad (2.2)$$

Учитывая, что

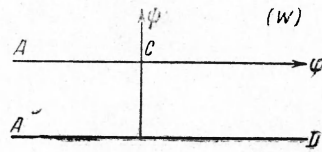
$$Q = bV_\infty = bV_0 e^{-\Omega(\infty)} \quad (2.3)$$

будем иметь

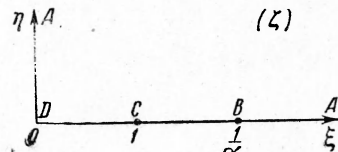
$$w = w(\zeta) = -\frac{2Q}{\pi} \ln \zeta \quad (2.4)$$

$$z = z(\zeta) = ia - \frac{2b}{\pi} e^{-\Omega(\infty)} \int_1^{\zeta} e^{\Omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (2.5)$$

Таким образом, если функция Жуковского известна, то формулы (2.4), (2.5) дадут решение поставленной задачи в форме (2.1).



Фиг. 2



Фиг. 3

В случае невесомой жидкости функция Жуковского для данного течения имеет вид

$$\Omega_0(\zeta) = \ln \frac{\zeta \sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{\zeta^2-1}}{i \sqrt{1-\alpha^2 \zeta^2}} \quad (2.6)$$

Если воспользоваться соотношениями (2.5), (2.3), учитывая, что

$$\Omega_0(\infty) = \ln \frac{1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \quad (2.7)$$

$$\int_1^{\zeta} e^{\Omega_0(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} = -i \left[ \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} (\arcsin(\alpha\zeta) - \arcsin \alpha) - \arcsin \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta \sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha \sqrt{\zeta^2-1}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right] \quad (2.8)$$

то легко найти уравнение свободной поверхности  $CD$  для невесомой жидкости

$$x_0(\xi) = \frac{2Q}{\pi V_0} \left( \operatorname{Ar th} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{Ar th} \frac{\alpha \sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} \right) \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.9)$$

$$y_0(\xi) = a - \frac{2Q}{\pi V_0} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} (\arcsin \alpha - \arcsin(\alpha\xi))$$

В случае тяжелой жидкости определение функции Жуковского представляет большие математические трудности. Применим для отыскания этой функции приближенный метод, основанный на идеях Воронца [3,4].

Предлагаемый метод исходит из следующих предположений:

1) функция Жуковского может быть представлена в виде

$$\Omega(\zeta) = \Omega_0(\zeta) + \delta \Omega_1(\zeta) \quad (2.10)$$

где  $\Omega_0(\zeta)$  — функция Жуковского для невесомой жидкости,  $\delta$  — некоторый малый безразмерный параметр;

2) параметр  $\delta$  настолько мал, что для любых двух точек  $\zeta$  и  $\zeta'$  вспомогательной полуплоскости имеет место приближенное равенство

$$e^{\delta p \Omega_1(\zeta) - \delta q \Omega_1(\zeta')} = 1 + \delta (p \Omega_1(\zeta) - q \Omega_1(\zeta')) \quad (0 \leq p, q \leq 2) \quad (2.11)$$

3) в любой точке свободной поверхности  $CD$ , в силу малости параметра  $\delta$ , выполняются условия

$$e^{-2\delta \operatorname{Re} \Omega_1} = 1 - 2\delta \operatorname{Re} \Omega_1, \quad 1 + \delta(a - y) = 1 + \delta(a - y_0) \quad (2.12)$$

где  $y_0$  — ордината точки свободной поверхности в случае невесомой жидкости;

4) в качестве параметра  $\delta$  можно брать любую безразмерную комбинацию характерных для данного течения величин, зависящую от ускорения силы тяжести  $g$  и обращающуюся в нуль при  $g = 0$ .

Мы будем везде полагать

$$\delta = \frac{Qg}{V_0^3} = \frac{Q}{aV_0^2} \quad (2.13)$$

Сделанные предположения, как это следует из формулы (2.13), тем ближе к истине, чем больше число Фруда. Используя эти предположения, легко найти решение поставленной задачи в замкнутом виде.

Подставим выражение (2.10) для  $\Omega(\zeta)$  в формулу (2.5) и воспользуемся равенством (2.11); тогда получим

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= ia - \frac{2b}{\pi} e^{-\Omega_0(\infty)} \int_1^{\zeta} e^{\Omega_0(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} - \\ &- \delta \frac{2b}{\pi} e^{-\Omega_0(\infty)} \int_1^{\zeta} [\Omega_1(\zeta) - \Omega_1(\infty)] e^{\Omega_0(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения (2.6), (2.7), (2.8), найдем:

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= ia + i \frac{2b}{\pi} \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} \left[ \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} (\arcsin(\alpha\zeta) - \arcsin \alpha) - \right. \\ &- \left. \arcsin \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta \sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right] - \\ &- \delta \frac{2b}{\pi i} \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}} \int_1^{\zeta} [\Omega_1(\zeta) - \Omega_1(\infty)] \frac{\zeta \sqrt{1 - \alpha^2} + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta \sqrt{1 - \alpha^2 \zeta^2}} d\zeta \quad (2.14) \end{aligned}$$

Остается определить функцию  $\Omega_1(\zeta)$ . Очевидно  $\Omega_1(\zeta)$  является аналитической функцией в правом квадранте верхней полуплоскости  $\zeta$  и удовлетворяет крайевым условиям

$$\operatorname{Im} \Omega_1(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} \xi = 0, & 0 \leq \eta \leq \infty \\ \eta = 0, & 1 \leq \xi \leq \infty \end{cases} \quad (2.15)$$

Найдем условие, которому должна удовлетворять искомая функция на отрезке  $[0, 1]$  оси  $\xi$ . Для этого обратимся к интегралу Бернулли, который дает

$$V^2 + 2gy = V_0^2 + 2ga \quad \text{на } CD$$

Учитывая, что при конформном отображении области течения  $z$  на область изменения  $\zeta$  свободная поверхность  $CD$  переходит в отрезок  $[0, 1]$  оси  $\xi$ , и используя равенства (2.2), (2.13), будем иметь

$$e^{-2\operatorname{Re} \Omega} = 2 \frac{V_0}{Q} [1 + \delta(a - y)] + 1 - 2 \frac{V_0}{Q} \quad \text{при } \eta = 0, 0 \leq \xi \leq 1$$

Но  $\operatorname{Re} \Omega_0 = 0$  на  $CD$ , следовательно,

$$e^{-2\delta \operatorname{Re} \Omega_1} = 2 \frac{V_0}{Q} [1 + \delta(a - y)] + 1 - 2 \frac{V_0}{Q} \quad \text{при } \eta = 0, 0 \leq \xi \leq 1$$

Заменим соответствующие величины, входящие в последнее равенство, их приближенными значениями (2.12) и воспользуемся формулами

(2.9); тогда (2.16)

$$\operatorname{Re} \Omega_1(\zeta) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{\arcsin \alpha - \arcsin(\alpha \xi)}{\alpha} \quad \text{при } \eta = 0, 0 \leq \xi \leq 1$$

Таким образом, для определения функции  $\Omega_1(\zeta)$  нужно решить смешанную краевую задачу (2.15), (2.16), которую легко свести к смешанной краевой задаче для верхней полуплоскости. Пользуясь формулами, дающими решение общей смешанной краевой задачи для полуплоскости [5,6], и применяя их к нашему случаю (2.15), (2.16), получим

$$\Omega_1(\zeta) = -\frac{8}{\pi^2} \sqrt{1-\alpha^2} \left( \frac{\pi}{4} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} + \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t, \alpha)}{t-\zeta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) \quad (2.17)$$

где

$$f(\xi, \alpha) = \frac{\pi}{4\alpha} \arcsin |\alpha \xi| \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.18)$$

Нетрудно убедиться, что найденная функция  $\Omega_1(\zeta)$  удовлетворяет краевым условиям (2.15), (2.16). Легко видеть, что

$$\Omega_1(\infty) = -\frac{4}{\pi^2} \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha) \quad (2.19)$$

Здесь

$$C(\alpha) = \frac{\pi}{2} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} - D(\alpha) \quad (2.20)$$

$$D(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \frac{\arcsin(\alpha t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\alpha \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} dt \quad (2.21)$$

Подставив в равенство (2.14) вместо входящих в него функций их значения (2.17), (2.19), найдем

$$\begin{aligned} z(\zeta) = & ia + i \frac{2b\alpha}{\pi(1+\sqrt{1-\alpha^2})} \left( \sqrt{1-\alpha^2} \frac{\arcsin(\alpha \zeta) - \arcsin \alpha}{\alpha} - \right. \\ & \left. - \arcsin \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta \sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{\alpha} \arcsin \frac{\alpha \sqrt{\zeta^2-1}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) - i\delta \frac{16b\alpha \sqrt{1-\alpha^2}}{\pi^3(1+\sqrt{1-\alpha^2})} \times \\ & \times \int_1^\zeta \left( \frac{1}{2} D(\alpha) + \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t, \alpha)}{t-\zeta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right) \frac{\zeta \sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta \sqrt{1-\alpha^2 \zeta^2}} d\zeta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Формулы (2.4), (2.22) дают решение поставленной задачи в форме (2.1). Эти формулы дают возможность рассчитать все элементы течения. Если в равенства (2.22) положить  $\zeta = \xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  и отделить действительную и мнимую части, то, вводя обозначения  $x^* = x/a$ ,  $y^* = y/a$ , получим уравнения свободной струи

$$\begin{aligned} x^*(\xi) = & \frac{2\alpha}{\lambda\pi(1+\sqrt{1-\alpha^2})} \left[ \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arth} \frac{\alpha \sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} + \right. \\ & \left. + \delta \frac{8}{\pi^2} \sqrt{1-\alpha^2} \int_1^\xi \frac{(1/2 D(\alpha) - f(\xi, \alpha)) \sqrt{1-\xi^2} + \xi \sqrt{1-\alpha^2} I(\xi, \alpha)}{\xi \sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} d\xi \right] \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$y^*(\xi) = i - \frac{8\alpha \sqrt{1-\alpha^2}}{\lambda\pi^2(1+\sqrt{1-\alpha^2})} \left[ \frac{\pi}{4} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} - \right. \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

$$\begin{aligned} & \left. - f(\xi, \alpha) - \delta \frac{2}{\pi} \int_1^\xi \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi \sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} I(\xi, \alpha) d\xi - \right. \\ & \left. - \delta \frac{4}{\pi^2} \sqrt{1-\alpha^2} \left( \frac{\pi}{4\alpha} \arcsin \alpha - f(\xi, \alpha) \right) \left( D(\alpha) - \frac{\pi}{4\alpha} \arcsin \alpha - f(\xi, \alpha) \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь

$$I(\xi, \alpha) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t, \alpha)}{i-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.24)$$

Этот интеграл рассматривается как сингулярный в смысле главного значения по Коши.

Полученное решение содержит два неопределенных параметра  $\alpha$  и  $\delta$ . Выразим основные определяющие величины  $\lambda$  и  $\nu$  через эти параметры. Положим  $\zeta = \xi$ ,  $1 \leq \xi \leq 1/\alpha$  в равенстве (2.22), а затем положим  $\xi = 1/\alpha$ , учитывая, что  $z(1/\alpha) = i\delta$ ; тогда после преобразований получим

$$\lambda = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1-\alpha^2}} (A(\alpha) - \delta \frac{16}{\pi^3} \sqrt{1-\alpha^2} B(\alpha)) \quad (2.25)$$

где

$$A(\alpha) = 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\alpha^2} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} \quad (2.26)$$

$$B(\alpha) = - \int_1^{1/\alpha} (E(\xi, \alpha) + \frac{1}{2} D(\alpha)) \frac{\xi \sqrt{1-\alpha^2 + \sqrt{\xi^2-1}}}{\xi \sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} d\xi \quad (2.27)$$

$$E(\xi, \alpha) = \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t, \alpha)}{t-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (1 \leq \xi \leq \infty) \quad (2.28)$$

При помощи равенств (2.13), (2.3), (2.10), (2.11), (2.7), (2.19) и (2.25) найдем

$$\nu = \frac{\pi}{\delta} \frac{\pi^2 + \delta^4 \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha)}{\pi^3 A(\alpha) - \delta 16 \sqrt{1-\alpha^2} B(\alpha)} \quad (2.29)$$

Соотношения (2.25), (2.29) представляют собой систему двух уравнений для определения параметров  $\alpha$  и  $\delta$  по заданным значениям  $\lambda$  и  $\nu$ .

Таблица 1

Значения  $\lambda = a/b$  ( $\lambda = 0$  при  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 1$  при  $\alpha = 1$ )

$\delta$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$
0.0	0.0819	0.1645	0.2482	0.3340	0.4226	0.5154	0.6140	0.7214	0.8432
0.1	0.0815	0.1635	0.2469	0.3324	0.4207	0.5133	0.6120	0.7196	0.8421
0.2	0.0810	0.1626	0.2456	0.3307	0.4187	0.5112	0.6099	0.7179	0.8410
0.3	0.0805	0.1617	0.2442	0.3291	0.4168	0.5092	0.6079	0.7161	0.8399
0.4	0.0800	0.1608	0.2429	0.3274	0.4148	0.5071	0.6059	0.7144	0.8388
0.5	0.0796	0.1598	0.2415	0.3258	0.4129	0.5050	0.6038	0.7127	0.8378
0.6	0.0791	0.1589	0.2402	0.3241	0.4109	0.5029	0.6018	0.7109	0.8367
0.7	0.0786	0.1580	0.2388	0.3225	0.4090	0.5008	0.5997	0.7092	0.8356
0.8	0.0781	0.1570	0.2375	0.3209	0.4070	0.4987	0.5977	0.7074	0.8345
0.9	0.0777	0.1561	0.2362	0.3192	0.4051	0.4966	0.5957	0.7057	0.8334
1.0	0.0772	0.1552	0.2348	0.3176	0.4031	0.4946	0.5936	0.7039	0.8323

Значения  $\nu = V_0^2/g\alpha$

Таблица 2

$\delta$	$\alpha=0.0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1.0$
0.0											
0.1	6.288	6.296	6.319	6.359	6.419	6.506	6.628	6.803	7.070	7.550	1.0
0.2	3.234	3.238	3.249	3.268	3.295	3.337	3.395	3.478	3.605	3.834	5
0.3	2.217	2.219	2.226	2.238	2.255	2.282	2.318	2.370	2.450	2.595	3.333
0.4	1.709	1.710	1.715	1.723	1.735	1.754	1.779	1.816	1.873	1.976	2.5
0.5	1.404	1.405	1.409	1.416	1.423	1.438	1.457	1.484	1.527	1.604	2.0
0.6	1.202	1.203	1.205	1.210	1.216	1.227	1.242	1.263	1.296	1.356	1.667
0.7	1.057	1.058	1.060	1.064	1.068	1.077	1.089	1.105	1.131	1.180	1.429
0.8	0.949	0.950	0.951	0.954	0.957	0.965	0.974	0.988	1.008	1.047	1.25
0.9	0.866	0.866	0.867	0.869	0.871	0.878	0.885	0.895	0.912	0.944	1.111
1.0	0.799	0.799	0.800	0.802	0.803	0.808	0.813	0.822	0.835	0.861	1.0

Основная трудность при доведении полученного решения до численных результатов состоит в вычислении интегралов  $I(\xi, \alpha)$ ,  $E(\xi, \alpha)$  и  $B(\alpha)$ .

Ниже будут даны формулы для вычисления указанных интегралов. Значения величин  $\lambda$  и  $\nu$ , полученные при помощи этих формул, приведены в табл. 1 и 2.

**3. Вычисление интегралов  $I(\xi, \alpha)$ ,  $E(\xi, \alpha)$  и  $B(\alpha)$ .** В работе [7] выведены формулы, которые позволяют получить приближенные выражения для сингулярных интегралов с ядром типа Коши и оценить ошибку приближения. Вычислим при помощи этих формул интеграл  $I(\xi, \alpha)$ . Введем обозначения

$$f^{(s)}(\xi, \alpha) = \left( \frac{d^s f(\cos \theta, \alpha)}{d\theta^s} \right)_{\theta = \arccos \xi} \quad (s = 0, 1, \dots)$$

$$\gamma^{(2s-1)}(\alpha) = f^{(2s-1)}(0, \alpha), \quad \gamma_2^{(2s-1)}(\alpha) = f^{(2s-1)}(1, \alpha) \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

$$a_{2m}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t, \alpha) T_{2m}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (3.2)$$

$$q_2^{(2s)}(\xi) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{2s}} U_{2m}(\xi) \quad (s = 1, 2, \dots; -1 \leq \xi \leq 1) \quad (3.3)$$

где  $T_{2m}(\xi)$ ,  $U_{2m}(\xi)$  — четные полиномы Чебышева первого и второго рода

$$T_{2m}(\xi) = \cos 2m \arccos \xi, \quad U_{2m}(\xi) = \sin 2m \arccos \xi \quad (3.4)$$

Легко видеть, что  $\gamma_2^{(2s-1)}(\alpha) = 0$ . Для  $\gamma^{(2s-1)}(\alpha)$  имеем выражения

$$\gamma^{(1)}(\alpha) = -\frac{1}{4}\pi, \quad \gamma^{(3)}(\alpha) = \frac{1}{4}\pi(1-\alpha^2), \dots \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что все  $a_{2m}(\alpha)$  выражаются через элементарные функции

$$a_0(\alpha) = D(\alpha) \quad (3.6)$$

$$a_2(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha}(1-\alpha^2) \operatorname{Arth} \alpha \right]$$

$$a_4(\alpha) = \frac{1-\alpha^2}{4\alpha^4} \left[ 3 - \frac{1}{\alpha}(3-\alpha^2) \operatorname{Arth} \alpha \right]$$

$$a_6(\alpha) = \frac{1}{18\alpha^6} \left[ 1 + 14(1-\alpha^2) + 15(1-\alpha^2)^2 - \right. \\ \left. - 3 \frac{1-\alpha^2}{\alpha} (3 + 6(1-\alpha^2) + (1-\alpha^2)^2 \operatorname{Arth} \alpha) \right]$$

Для функций  $q_2^{(2s)}(\xi)$  в работах [7] имеются таблицы.

Применим к интегралу  $I(\xi, \alpha)$  формулу (4.7) работы [7]; тогда найдем

$$(3.7)$$

$$I(\xi, \alpha) \approx I_n^{(k)}(\xi, \alpha) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^k (-1)^s \gamma^{(2s-1)}(\alpha) q_2^{(2s)}(\xi^*) + \sum_{m=1}^n a_{2m}^*(\alpha) U_{2m}(\xi)$$

где

$$\xi^* = \sqrt{1-\xi^2} \quad (3.8)$$

$$a_{2m}^*(\alpha) = a_{2m}(\alpha) + (-1)^m \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^k \frac{(-1)^s}{(2m)^{2s}} \gamma^{(2s-1)}(\alpha) \quad (3.9)$$

Рассмотрим интеграл  $I(\xi, \alpha)$  при  $\alpha = 0$

$$I(\xi, 0) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1/4 \pi |t|}{t-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \xi \operatorname{Arth} \sqrt{1-\xi^2} \quad (3.10)$$

Формула (3.7) дает

$$I(\xi, 0) \approx I_n^{(k)}(\xi, 0) = \sum_{s=1}^k q_2^{(2s)}(\xi^*) + \frac{1}{3} U_2(\xi) + \sum_{m=2}^h \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)^{2k} (4m^2 - 1)} U_{2m}(\xi) \quad (3.11)$$

Вычислим в различных точках интервала  $[0, 1]$  приближенное значение интеграла  $I(\xi, 0)$  по формуле (3.11) при  $n = 1, k = 4$  и сравним его с точным значением (3.10). Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\xi$	$I(\xi, 0)$	$I_1^{(4)}(\xi, 0)$	$\xi$	$I(\xi, 0)$	$I_1^{(4)}(\xi, 0)$
$\cos 90^\circ$	0.0	0.0	$\cos 40^\circ$	0.2922112	0.2922117
$\cos 80^\circ$	0.2115246	0.2115246	$\cos 30^\circ$	0.2378565	0.2378572
$\cos 70^\circ$	0.2967734	0.2967726	$\cos 20^\circ$	0.1674431	0.1674443
$\cos 60^\circ$	0.3292395	0.3292382	$\cos 10^\circ$	0.0863804	0.0863808
$\cos 50^\circ$	0.3248275	0.3248273	$\cos 0^\circ$	0.0	0.0

Отсюда вытекает, что

$$|I(\xi, 0) - I_1^{(4)}(\xi, 0)| < 0.000001 \quad (3.12)$$

Если в формуле (3.11) положить  $n = 2, k = 2$ , то будем иметь [7]

$$|I(\xi, 0) - I_2^{(2)}(\xi, 0)| < 0.0001 \quad (3.13)$$

Очевидно, оценки (3.12), (3.13) справедливы для любого  $\alpha$ .

Рассмотрим интеграл  $E(\xi, \alpha)$ , который является регулярным интегралом на отрезке  $[1, \infty]$ . В работе [8] для таких интегралов выведены формулы, которые позволяют получить их приближенные выражения и оценить ошибку приближения. Применяя формулу (4.7) работы [8] к интегралу  $E(\xi, \alpha)$ , получим

$$E(\xi, \alpha) \approx E_n^{(k)}(\xi, \alpha) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^k (-1)^s \gamma^{(2s-1)}(\alpha) N_2^{(2s)}(\xi^{**}) - \frac{1}{2} D(\alpha) - \sum_{m=1}^n a_{2m}^*(\alpha) \xi^{**2m} \quad (3.14)$$

где

$$\xi^{**} = \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (3.15)$$

$$N_2^{(2s)}(\xi^{**}) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)^{2s}} \xi^{**2m} \quad (3.16)$$

Для функций  $N_2^{(2s)}(\xi^{**})$  в работе [8] имеются таблицы. При  $\alpha = 0$  рассматриваемый интеграл выражается через элементарные функции [8]

$$E(\xi, 0) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\pi/4 |t|}{t-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (3.17)$$

Формула (3.14) при  $\alpha = 0$  дает

$$E(\xi, 0) \approx E_n^{(k)}(\xi, 0) = \quad (3.18)$$

$$= \sum_{s=1}^k N_{2^{(2s)}}(\xi^{**}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \xi^{**2} + \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^m}{(2m)^{2k} (4m^2 - 1)} \xi^{**2m}$$

Вычислим интеграл  $E(\xi, 0)$  по точной формуле (3.17) и по приближенной (3.18) при  $n=2, k=2$ , а затем сравним полученные результаты.

Таблица 4

$\xi$	$E(\xi, 0)$	$E_2^{(2)}(\xi, 0)$	$\xi$	$E(\xi, 0)$	$E_2^{(2)}(\xi, 0)$
$\text{ch ln } \frac{10}{10}$	-0.785398	-0.7853	$\text{ch ln } \frac{10}{5}$	-0.579560	-0.5796
$\text{ch ln } \frac{10}{9}$	-0.736886	-0.7370	$\text{ch ln } \frac{10}{4}$	-0.551734	-0.5517
$\text{ch ln } \frac{10}{8}$	-0.691610	-0.6916	$\text{ch ln } \frac{10}{3}$	-0.529480	-0.5295
$\text{ch ln } \frac{10}{7}$	-0.649987	-0.6499	$\text{ch ln } \frac{10}{2}$	-0.513228	-0.5132
$\text{ch ln } \frac{10}{6}$	-0.612476	-0.6125	$\text{ch ln } \frac{10}{1}$	-0.503327	-0.5033
$\text{ch ln } \frac{10}{5}$	-0.579560	-0.5796	$\infty$	-0.5	-0.5

Из этих данных вытекает, что

$$|E(\xi, 0) - E_2^{(2)}(\xi, 0)| < 0.0001 \quad (3.19)$$

Очевидно оценка (3.19) имеет место для любого  $\alpha$ .

Для вычисления интеграла  $B(\alpha)$  подставим в равенство (2.27) вместо  $E(\xi, \alpha)$  его приближенное значение (3.18). После преобразований получим для  $B(\alpha)$  приближенную формулу

$$B(\alpha) \approx B_n^{(k)}(\alpha) = \sum_{m=1}^n a_{2m}^*(\alpha) B_{2m}(\alpha) - \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^k (-1)^s \gamma^{(2s-1)}(\alpha) G^{(2s)}(\alpha) \quad (3.20)$$

где

$$B_{2m}(\alpha) = \int_1^{1/\alpha} \frac{\xi \sqrt{1-\alpha^2} + \sqrt{\xi^2-1}}{\xi \sqrt{1-\alpha^2 \xi^2}} (\xi - \sqrt{\xi^2-1})^{2m} d\xi \quad (3.21)$$

$$G^{(2s)}(\alpha) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)^{2s}} B_{2m}(\alpha) \quad (3.22)$$

Подстановкой

$$\xi = \frac{(1+\sigma^2)(1+u^2)}{2\sqrt{(\sigma^2+u^2)(1+\sigma^2 u^2)}}, \quad \sigma = \frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}$$

интеграл  $B_{2m}(\alpha)$  приводится к виду

$$B_{2m}(\alpha) = (1-\sigma^2)^2 \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u^2} \left( \frac{\sigma^2+u^2}{1+\sigma^2 u^2} \right)^{m-1} \frac{du}{(1+\sigma^2 u^2)^2}$$

Таким образом вычисление интеграла  $B(\alpha)$  свелось к вычислению интегралов  $B_{2m}(\alpha)$ , которые выражаются через элементарные функции.

Формула (3.20) при одних и тех же  $n$  и  $k$  будет значительно точнее, чем формулы (3.7) и (3.14). Это легко видеть для случая  $\alpha = 0$ . Дейст-



вительно, при  $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} B(0) &= - \int_1^{\infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \left( \frac{1}{2} + E(\xi, 0) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \left( 2\xi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} - 1 \right) d\xi \end{aligned}$$

или

$$B(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} - G \right) \quad (G = 0.915965594 \dots) \quad (3.23)$$

где  $G$  — постоянная Каталана.

Формула (3.20) при  $\alpha = 0$  принимает вид

$$B(0) \approx B_n^{(k)}(0) = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)^{2k} (4m^2 - 1)} B_{2m}(0) - \sum_{s=1}^k G^{(2s)}(0)$$

где

$$\begin{aligned} B_{2m}(0) &= 2 \sum_{p=2}^m \frac{(-1)^p}{2m+1-2p} - \frac{1}{2m-1} + (-1)^{m+1} \frac{\pi}{2} \\ G^{(2s)}(0) &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)^{2s}} B_{2m}(0) \end{aligned}$$

Отсюда

$$B_2^{(2)}(0) = \frac{\pi - 2}{6} - \frac{10 - 3\pi}{23040} - G^{(2)}(0) - G^{(4)}(0) \quad (3.24)$$

Сравнивая (3.23) и (3.24), получим оценку

$$|B(0) - B_2^{(2)}(0)| < \frac{14 - \pi - 12G}{24} + \frac{10 - 3\pi}{23040} + G^{(2)}(0) + G^{(4)}(0) < 0.0000012$$

**4. Исследование формы струи и определение коэффициента сжатия.** Покажем, что свободная струя  $CD$ , определяемая уравнением (2.23), имеет наименьшее по ширине сечение в бесконечно-удаленной точке  $D$ , т. е. функция  $y^*(\xi)$  является монотонно-возрастающей на отрезке  $(0, 1)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dy^*}{d\xi} &= \frac{2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{\lambda\pi(1 + \sqrt{1 - \alpha^2})} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 \xi^2}} \times \\ &\times \left[ 1 + \delta \frac{8}{\pi^3} \left( \sqrt{1 - \alpha^2} f(\xi, \alpha) + \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} l(\xi, \alpha) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} D(\alpha) \right) \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dy^*}{d\xi} &= \frac{2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{\lambda\pi(1 + \sqrt{1 - \alpha^2})} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 \xi^2}} \times \\ &\times \left[ 1 + \delta \frac{8}{\pi^3} \left( \frac{1 - \xi^2}{\xi} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t, \alpha) - \frac{1}{4} \pi |t|}{t - \xi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \Phi(\xi) \right) \right] \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \sqrt{1 - \alpha^2} f(\xi, \alpha) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \xi^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} D(\alpha) \\ &\quad (0 \leq \xi \leq 1) \end{aligned}$$

Легко видеть

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t, \alpha) - 1/4 \pi |t|}{t-\xi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.1)$$

Так как  $\Phi'(\xi) < 0$ , то  $\min \Phi(\xi) = \Phi(1) = \frac{1}{2} \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha) \geq 0$ , т. е.

$$\Phi(\xi) \geq 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (4.2)$$

Из неравенств (4.1) и (4.2) следует  $dy^*/d\xi > 0$  на отрезке (0.1), что и требовалось показать.

Коэффициентом сжатия  $\varepsilon$  назовем отношение наименьшего по ширине сечения свободной струи  $CD$  к ширине открытия щита  $a$ . Так как наименьшее сечение струи находится в бесконечно-удаленной точке  $D$ , то

$$\varepsilon = y^*(0) = y(0)/a \quad (4.3)$$

В силу постоянства расхода

$$V_\infty b = V_1 y(0), \quad \text{или} \quad y(0) = \frac{V_\infty}{V_1} b \quad (4.4)$$

Подставляя в равенство (4.3) вместо  $y(0)$  его значение (4.4), найдем

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda} \frac{V_\infty}{V_1} = \frac{1}{\lambda} e^{-\Omega(\infty) - \rho\Omega(0)}$$

Отсюда, используя равенства (2.10), (2.11), (2.6), (2.7) и (2.25), имеем

$$\varepsilon = \frac{\pi}{1 + \delta(A(\alpha) - 1)} \frac{\pi^2 + \delta 4 \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha)}{\pi^3 A(\alpha) - \delta 16 \sqrt{1-\alpha^2} B(\alpha)} \quad (4.5)$$

Значения коэффициента сжатия  $\varepsilon$ , вычисленные по формуле (4.5), приведены в табл. 5.

Таблица 5

Значения  $\varepsilon = Q / V_1 a^2$

$\delta$	$\alpha=0.0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1.0$
0.0	0.6110	0.6118	0.6142	0.6185	0.6249	0.6340	0.6467	0.6651	0.6932	0.7434	1.0
0.1	0.5912	0.5920	0.5946	0.5990	0.6056	0.6151	0.6285	0.6477	0.6771	0.7298	1.0
0.2	0.5738	0.5746	0.5772	0.5818	0.5884	0.5984	0.6121	0.6318	0.6636	0.7172	1.0
0.3	0.5584	0.5593	0.5619	0.5665	0.5732	0.5834	0.5974	0.6177	0.6489	0.7054	1.0
0.4	0.5448	0.5456	0.5483	0.5529	0.5596	0.5700	0.5842	0.6047	0.6365	0.6943	1.0
0.5	0.5326	0.5335	0.5361	0.5408	0.5474	0.5579	0.5721	0.5928	0.6250	0.6839	1.0
0.6	0.5218	0.5226	0.5253	0.5299	0.5364	0.5469	0.5612	0.5820	0.6144	0.6742	1.0
0.7	0.5120	0.5128	0.5155	0.5201	0.5264	0.5370	0.5512	0.5720	0.6046	0.6650	1.0
0.8	0.5032	0.5040	0.5066	0.5112	0.5174	0.5280	0.5421	0.5628	0.5955	0.6563	1.0
0.9	0.4952	0.4961	0.4987	0.5032	0.5092	0.5198	0.5338	0.5544	0.5869	0.6481	1.0
1.0	0.4882	0.4890	0.4915	0.4959	0.5018	0.5122	0.5261	0.5466	0.5790	0.6403	1.0

**5. Определение коэффициента сжатия в одном частном случае. Сравнение с экспериментом.** Рассматриваемое течение, как легко видеть из полученного решения, будет полностью определено, если будут заданы два определяющих безразмерных параметра  $\lambda$  и  $\delta$  или  $\lambda$  и  $\nu$ . Задание одного из параметров  $\delta$  или  $\nu$  равносильно заданию разности между давлением в бесконечно удаленной точке верхней стенки и на свободной поверхности. Э. Марки [3] провел числовые расчеты коэффициента сжатия только для случая, когда эта разность давлений равна нулю. Мы также рассмотрим этот частный случай. На свободной поверхности  $CD$  в рассмат-

риваемом случае в силу интеграла Бернулли будет иметь место соотношение

$$V_{\infty}^2 + 2gb = V_0^2 + 2ga, \quad \text{или} \quad e^{-2\Omega(\infty)} + \frac{2}{v} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) - 1 = 0$$

Используя равенства (2.11), (2.25) и (2.29), получим для определения  $\delta$  квадратное уравнение

$$\frac{32}{\pi^3} \sigma \left( B(\alpha) + \pi \frac{\sigma^2}{\pi} \sqrt{1-\alpha^2} C^2(\alpha) \right) \delta^2 + 2 \left( 1 + \frac{2}{\pi^2} \sigma (3\sigma^2 - 1) \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha) - \sigma A(\alpha) \right) \sigma - \sigma(1-\sigma^2) = 0$$

Отсюда

$$\delta = \sigma(1-\sigma^2)H(\alpha) \tag{5.1}$$

$$H(\alpha) = \sqrt{R^2(\alpha) + \sqrt{1-\alpha^2} \sigma(1-\sigma^2)S(\alpha) + R(\alpha)}$$

$$S(\alpha) + \frac{32}{\pi^3} \left( B(\alpha) + \frac{\sigma^2}{\pi} \sqrt{1-\alpha^2} C^2(\alpha) \right) \tag{5.2}$$

$$R(\alpha) = 1 + \frac{2}{\pi^2} \sigma (3\sigma^2 - 1) \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha) - \sigma A(\alpha)$$

Подставляя в формулы (2.25) и (4.5) вместо  $\delta$  выражение (5.1), найдем

$$\lambda = \sigma A(\alpha) - \frac{16}{\pi^3} (1-\sigma^2) \sigma^2 \sqrt{1-\alpha^2} \frac{B(\alpha)}{H(\alpha)} \tag{5.3}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi H(\alpha)}{H(\alpha) + (1-\sigma^2)\sigma^2(A(\alpha) - 1)} \frac{\frac{32}{\pi^3} \pi^2 H(\alpha) + 4(1-\sigma^2)\sigma \sqrt{1-\alpha^2} C(\alpha)}{\pi^3 H(\alpha) A(\alpha) - 16(1-\sigma^2)\sigma \sqrt{1-\alpha^2} B(\alpha)} \tag{5.4}$$

Приводим значения  $\varepsilon$  и  $\lambda$ , вычисленные по формулам (5.3) и (5.4) при  $p_{\infty} = p_0$  для различных значений

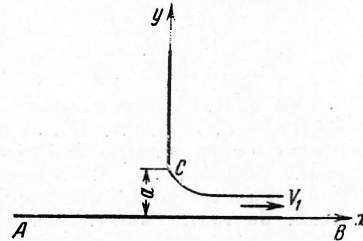
$\alpha = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4
$\lambda = 0.0$	0.0878	0.1638	0.2469	0.3315
$\varepsilon = 0.6110$	0.6061	0.6006	0.5987	0.5961
$\alpha = 0.5$	0.6	0.7	0.8	0.9
$\lambda = 0.4183$	0.5088	0.6048	0.7098	0.8295
$\varepsilon = 0.5946$	0.5952	0.5984	0.6079	0.6302

Для сравнения полученных выше результатов с опытными данными Джентилини, опубликованными в работе [9] были проведены некоторые вычисления, так как Джентилини вместо коэффициента сжатия  $\varepsilon$  вводил величину

$$\mu = \varepsilon / \sqrt{1 + \lambda \varepsilon} \tag{5.5}$$

По формулам (5.3) — (5.5) были проведены вычисления величин  $\lambda$  и  $\mu$ . Результаты этих вычислений дали зависимость  $\mu$  от  $\lambda$ , близкую к зависимости  $\mu$  от  $\lambda$ , которая получается на основании опытных данных Джентилини.

**6. Истечение тяжелой жидкости из отверстия бесконечно большого сосуда.** Искомое течение изображено на фиг. 4. Тяжелая несжимаемая жидкость ограничена горизонтальным дном и твердой вертикальной стенкой, из-под которой вытекает струя со свободной поверхностью. Легко видеть, что рассматриваемое течение может быть получено из течения, изображенного на фиг. 1, если положить в последнем  $\lambda = 0$  или, что одно и то же,  $\alpha = 0$ .



Фиг. 4

Полагая в полученных выше формулах  $\alpha = 0$ , будем иметь

$$\varepsilon = \frac{\pi^2}{\pi + 2\delta} \frac{\pi^2 + \delta 2(\pi - 2)}{\pi^2(\pi + 2) - \delta 2(\pi + 2 - 4G)} \quad (6.1)$$

$$(G = 0.915965594 \dots)$$

$$\nu = \frac{\pi}{\delta} \frac{\pi^2 + \delta 2(\pi - 2)}{\pi^2(\pi + 2) - \delta 2(\pi + 2 - 4G)} \quad (6.2)$$

где  $G$  — постоянная Каталана. Уравнение струи примет вид

$$y^*(\xi) = \frac{1}{\pi^2(\pi + 2) - \delta 2(\pi + 2 - 4G)} \left[ \pi^2(\pi + 2\xi) - \delta 2(\pi + 2\xi + \pi(1 - \xi^2)) - \right. \\ \left. - 2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \xi^2} + 4L\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \xi\right) + \right. \\ \left. + 4L\left(\frac{1}{2} \arcsin \xi\right) - 4L\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

$$x^*(\xi) = \frac{2\pi^2}{\pi^2(\pi + 2) - \delta 2(\pi + 2 - 4G)} \left[ \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \xi^2} - \sqrt{1 - \xi^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\delta}{\pi^2} \left( \sqrt{1 - \xi^2} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \xi \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} \xi \sqrt{1 - \xi^2} + (\xi^2 - 2) \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right] \quad (6.3)$$

где

$$L(u) = - \int_0^u \ln \cos t dt$$

Приводим значения  $\varepsilon$  и  $\nu$ , вычисленные по (6.1) и (6.2), при  $\lambda = 0$  для различных значений  $\delta$ .

$\delta=0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\nu=\infty$	6.2885	3.2343	2.2169	1.7088	1.4044
$\varepsilon=0.6110$	0.5912	0.5738	0.5584	0.5448	0.5326
$\delta=0.0$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\nu=\infty$	1.2018	1.0574	0.9494	0.8657	0.7989
$\varepsilon=0.6110$	0.5218	0.5120	0.5032	0.4952	0.4882

Поступила  
23 V 1960

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. О движении тяжелой жидкости в канале с дном, имеющим уступ. ДАН СССР, 1938, т. XIX, № 8, 599—601 (Собр. соч. т. 2, Изд. АН СССР, 1949).
2. Marchi E. Sui fenomeni di efflusso piano da luci a bottente. Ann. Mat pura ed appl., 1953, 35.
3. Wogonetz C. L'influence de la pesanteur sur la forme du jet liquide. C. R. Acad. de Sci., 1953, т. 236, № 3.
4. Wogonetz K. L'influence des forces exterieures sur l'ecoulement par les arifices. Pubs. Inst. Acad. Serbe sci., 1953, 5.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. Физматгиз, 1958.
7. Пыхтеев Г. Н. О вычислениях сингулярных интегралов с ядром типа Коши. ПММ, т. XXIII, вып. 6, 1959.
8. Пыхтеев Г. Н. О вычислениях некоторых интегралов с регулярным ядром типа Коши. ПММ, т. XXIV, вып. 6.
9. Gentilini V. Sui processi di efflusso piano. L'Energia Elettrica, 1941.