

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ
ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАЗМЫ
В КАНАЛЕ**

А. П. Шубин

(Москва)

В линейном приближении рассмотрены нестационарные магнитогидродинамические возмущения плоских течений хорошо проводящей, невязкой и непроводящей квазинейтральной плазмы в канале медленно меняющегося сечения с секционированными электродами. При рассмотрении учтено влияние эффекта Холла. Показано, что эволюция возмущения параметра изомагнитности B/ρ складывается из переноса вдоль канала вместе с потоком плазмы, переноса вдоль невозмущенных электронных траекторий и диффузии, связанной конечной проводимости плазмы. Время установления течения равно времени пролета плазмы через канал (область, занятую магнитным полем). Данная работа является обобщением проведенного в [1] анализа стационарных возмущений.

1. Нестационарным течениям плазмы посвящено значительное количество работ. Это объясняется необходимостью анализа процессов ускорения плазмы в импульсных системах и выяснения возможности установления течений в стационарных ускорителях и анализа проблемы устойчивости стационарных течений. Рассматриваются низкочастотные нестационарные процессы, не нарушающие квазинейтральности плазмы и поддающиеся гидродинамическому описанию.

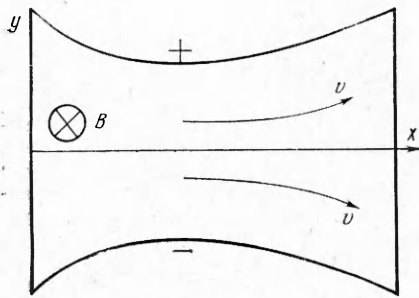
Анализ нестационарных течений проводился различными авторами без учета влияния эффекта Холла на течение. В [2] рассматривалось нестационарное одномерное ускорение плазмы с постоянной проводимостью. Было показано, что учет пространственного распределения электрического тока приводит к течению, сильно отличающемуся от рассчитанного на основе модели токового слоя. Влияние начальных условий на течение при медленном изменении характеристик разряда существенно для моментов времени, меньших времени пролета плазмы через канал.

К аналогичному выводу об установлении течений за времена порядка времени пролета плазмы через канал пришли авторы работы [3], в которой проводился численный расчет двумерных течений плазмы с постоянной проводимостью без учета эффекта Холла. Если коэффициенты переноса плазмы зависят от температуры, то ситуация может измениться: коротковолновые гидродинамические колебания в плазменном потоке могут оказаться неустойчивыми.

Нелинейный численный расчет одномерного ускорения плазмы, выполненный в [4], показывает, что если проводимость плазмы нарастает с ростом температуры, то начальные условия существенно влияют на характер течения. Если вначале ток распределен в узком слое, то в результате разогрева плазмы током возникает самоподдерживающийся токовый T -слой с высокой проводимостью и температурой. От места возникновения T -слоя распространяются две ударные волны; волна, движущаяся ко входу в канал, может, нагревая плазму, вызвать возникновение вто-

рого T -слоя и т. д. В результате ток разряда оказывается сосредоточенным в нескольких T -слоях, а ускоряющаяся плазма распределена вдоль канала в виде сгустков, следующих один за другим.

Учет влияния эффекта Холла также может приводить к потере устойчивости плазменных течений. Численный расчет двумерных течений при учете эффекта Холла [5] показал, что при течении в канале со сплошными металлическими стенками — электродами — устойчивость теряется при превышении параметром обмена [6] критического значения, зависящего от соотношения газокINETического и магнитного давлений, а также от магнитного числа Рейнольдса. Теоретическое рассмотрение устойчивости коротковолновых колебаний в холловских течениях [7] предсказывает



неустойчивость течений идеально проводящей плазмы, если существуют области, в которых непараллельны векторы градиентов плотности и полного давления (газокINETического и магнитного) плазмы.

Целью данной работы является обобщение проведенного ранее в [1] анализа стационарных слабозмущенных холловских течений плазмы в канале с секционированными электродами на случай нестационарных возмущений. Возмущения, рассмотренные в

[1], были вызваны слабой неидеальностью расщепки электродов и при сильно выраженном эффекте Холла существенно меняли картину течения. Представляет интерес рассмотрение случая, в котором наряду с возмущениями, вызванными неидеальностью расщепки, существуют возмущения, вызванные нестационарными нерегулярностями на входе в канал. Это возможно, например, при слабых нарушениях режима подачи рабочего вещества.

Рассмотрим плоское течение плазмы в бесконечно длинном канале при наличии собственного (вызванного разрядным током) поперечного магнитного поля \mathbf{B} (фигура). Вектор \mathbf{B} ориентирован вдоль оси z , векторы скорости плазмы \mathbf{v} , напряженности электрического поля \mathbf{E} и плотности электрического тока \mathbf{j} расположены в плоскости xy . Все параметры течения зависят от координат x , y и времени t ; ширина канала в направлении оси z считается бесконечной. Рассматриваем течение полностью ионизованной, квазинейтральной, невязкой и нетеплопроводной плазмы. Проводимость плазмы σ считаем постоянной, инерцией электронов пренебрегаем. В указанных предположениях течение описывается следующей системой уравнений:

$$(1.1) \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{M}{e\sigma} (\nabla P - \nabla P_i)$$

$$P = p_i + p_e + \frac{B^2}{8\pi}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad p_i = p_i(\rho), \quad p_e = p_e(\rho).$$

Здесь ρ — плотность плазмы, $p_{i,e}$ — газокINETические парциальные давления ионной и электронной компонент плазмы, которые считаем зависящими от плотности ρ политропически.

Рассмотрим канал медленно меняющегося сечения, в котором выполнены условия

$$(1.2) \quad |v_y| \ll |v_x|, \quad \left| \frac{d}{dt} v_y \right| \ll \left| \frac{d}{dt} v_x \right|.$$

Будем считать, что магнитное число Рейнольдса Re_m велико

$$(1.3) \quad Re_m = uL/v_m \gg 1 \quad (v_m = c^2/4\pi\sigma),$$

где u — характерная продольная скорость плазмы, L — характерный продольный масштаб длины, на которой существенно меняются параметры течения, v_m — магнитная вязкость плазмы.

Предположим, что радиус кривизны r линий потока плазмы $y_0(t, x)$, определяющихся уравнением

$$(1.4) \quad \partial y_0 / \partial x = v_y / v_x,$$

велик по сравнению с ионным ларморовским радиусом Λ

$$(1.5) \quad r \gg \Lambda \quad (\Lambda = Mcv_x / eB).$$

При выполнении условий (1.2), (1.3) и (1.5) можно пренебречь поперечной (вдоль оси y) компонентой в первом уравнении (1.1), а также членами j_y/σ и $(M/e\rho) (\partial P/\partial y)$ по сравнению с лоренцевым членом $v_x B/c$ в y -компоненте третьего уравнения (1.1). Следовательно, в указанном приближении получим вместо (1.1) систему уравнений

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) v_x &= - \frac{\partial P(t, x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \\ \frac{v_m}{c} \frac{\partial B}{\partial y} &= E_x + \frac{v_y B}{c} + \frac{M}{e\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial p_i(\rho)}{\partial x} \right) \\ 0 &= E_y - \frac{v_x B}{c} - \frac{M}{e\rho} \frac{\partial p_e(\rho)}{\partial y} \\ P(t, x) &= p_i(\rho) + p_e(\rho) + \frac{B^2}{8\pi}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \end{aligned}$$

Дифференцируя третье уравнение (1.6) по y и используя второе, четвертое и шестое уравнения (1.6), находим

$$(1.7) \quad \frac{v_m}{c} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \frac{\rho}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v}\nabla \right) \frac{B}{\rho} - \frac{M}{e\rho^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Для идеально проводящей плазмы без учета эффекта Холла из (1.7) следует:

$$\frac{d}{dt} \frac{B}{\rho} = 0,$$

т. е. факт «вмороженности» магнитного поля в плазму.

Рассмотрим малые нестационарные возмущения основного стационарного квазиодномерного течения плазмы в канале с секционированными электродами. Ширину секций считаем бесконечно малой. Параметры невозмущенного течения (их отметим индексом 0) описываются соотношениями

$$(1.8) \quad P_0(x) = p_0(\rho) + \frac{B_0^2}{8\pi}, \quad \varphi_0 = \varphi_{00}(x) - \frac{k_0}{c} \psi m - \frac{M}{e} \int \frac{dp_i(\rho_0)}{\rho_0}$$

$$\frac{B_0}{\rho_0} = k_0 = \text{const}, \quad \frac{v_0^2}{2} + \frac{e}{M} \varphi_{00}(x) = \text{const}, \quad \frac{d\varphi_{00}}{dx} = \frac{M}{e\rho_0} \frac{dP_0}{dx}$$

$$E_0 = -\nabla\varphi_0, \quad B_0 = B_0(x), \quad \rho_0 = \rho_0(x), \quad v_0 = v_0(x)$$

$$\rho_0 v_0 f = m \cdot = \text{const}.$$

Здесь v_x — x -компонента скорости \mathbf{v}_0 , $f(x)$ — ширина канала, $m \cdot$ — секундный массовый расход рабочего вещества (плазмы). Нормированная функция потока ψ определяется соотношением

$$(1.9) \quad \psi_1^1 = \rho_0 v_0 [y - y_k(x)] / m \cdot,$$

где $y_k(x)$ — профиль катода канала, так что на катоде $\psi=0$, а на аноде $\psi=1$.

Перейдем от переменных t, x, y к переменным t, x, ψ . Линеаризуя первое и пятое уравнения (1.6), находим

$$(1.10) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v_0 v_{1x} \right) + \rho_1 v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

$$(1.11) \quad P_1(t, x) = c_T^2 \rho_1 + B_0 B_1 / 4\pi \quad (c_T^2 = dp_0 / d\rho_0).$$

Из второго уравнения (1.6) следует

$$(1.12) \quad \partial \rho_1 / \partial t + \text{div}(\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1) = 0.$$

Обозначим через k_1 возмущение параметра изомагнитности $k = B/\rho$. Имеем

$$(1.13) \quad k_1 = \frac{B_1}{\rho_0} - k_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}.$$

Из (1.11), (1.13) получаем

$$(1.14) \quad \rho_1 / \rho_0 = P_1 / \rho_0 c_H^2 - k_1 / k_0 (c_A / c_H)^2$$

$$B_1 / B_0 = P_1 / \rho_0 c_H^2 + k_1 / k_0 (c_T / c_H)^2$$

$$c_H^2 = c_T^2 + c_A^2, \quad c_A^2 = B_0^2 / 4\pi \rho_0.$$

Линеаризуя уравнение (1.7) и используя (1.14), находим уравнение, описывающее эволюцию возмущения параметра изомагнитности

$$(1.15) \quad \frac{\partial^2 k_1}{\partial \psi^2} = \frac{1}{\Omega(\eta)} \frac{\partial k_1}{\partial t} + \frac{\partial k_1}{\partial \eta} + a(\eta) \frac{\partial k_1}{\partial \psi}$$

$$(1.16) \quad \Omega = v_m \frac{\rho_0 v_0}{m \cdot} \left(\frac{c_T}{c_H} \right)^2, \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{\Omega}{v_0}$$

$$a(\eta) = \frac{Mc}{em \cdot B_0} \left(\frac{c_A}{c_H} \right)^2 \frac{dP_0}{d\eta} \geq 0.$$

Уравнение (1.15) является обобщением на нестационарный случай полученного в [1] стационарного уравнения.

2. Рассмотрим эволюцию малых возмущений параметра изомагнитности. Переходя от переменных t, η, ψ к переменным θ, η, ψ , где θ определяется соотношением

$$(2.1) \quad \theta = t - \int_{x_{\infty}}^x \frac{d\xi}{v_0(\xi)} = t - \int_{\eta_{\infty}}^{\eta} \frac{d\mu}{\Omega(\mu)}$$

(считаем, что на входе в канал, т. е. при $x=x_0$, скорость v_0 отлична от нуля, так что θ всюду конечна), получим

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 k_1}{\partial \psi^2} = \frac{\partial k_1}{\partial \eta} + a(\eta) \frac{\partial k_1}{\partial \psi}.$$

Переменная θ входит в уравнение (2.2) как параметр. Отсюда и из определения (2.1) следует, что нестационарное возмущение k_1 сносится потоком плазмы вдоль канала. Если ввести электронную функцию потока ψ_e соотношениями

$$(2.3) \quad \mathbf{v}_{e0} = \mathbf{v}_0 - M \mathbf{j}_0 / e \rho_0, \quad \rho_0 \mathbf{v}_{e0} = m \nabla \psi_e \times \mathbf{n}_z$$

(\mathbf{n}_z — единичный вектор в направлении оси z), так что

$$B_0 = 4\pi e m (\psi - \psi_e) / M c,$$

то можно убедиться, что оператор $\partial/\partial\eta + a\partial/\partial\psi$ в правой части (2.2) соответствует оператору дифференцирования вдоль электронной невозмущенной траектории $\psi_e = \text{const}$. При идеальной проводимости плазмы ($\sigma \rightarrow \infty$, $v_m \rightarrow 0$) получаем

$$(2.4) \quad k_1 = k_1(\theta, \psi_e).$$

Левая часть уравнения (2.2) описывает диффузию, обязанную конечной проводимости плазмы. Эволюция возмущения k_1 складывается из переноса вместе с потоком плазмы, переноса вдоль невозмущенных электронных траекторий и диффузии вследствие конечной проводимости плазмы.

Анализ уравнения (2.2) при $a = a_0 = \text{const}$ был проведен в [1], где показано, что в случае слабого влияния эффекта Холла ($a \rightarrow 0$) возмущения проникают с электродов в поток скиповым образом (толщина скин-слоев определяется диффузией плазмы в магнитном поле); в случае сильно выраженного эффекта Холла ($a \rightarrow \infty$) функция k_1 имеет вид

$$(2.5) \quad k_1 \approx g_1(\theta, \eta - \psi/a_0) + g_2(\theta, \eta + \psi/a_0) \exp(a_0 \psi).$$

Зависимость (2.5) означает, что возмущения переносятся вдоль электронных траекторий с катода на анод и образуется прианодный электромагнитный слой.

3. Рассмотрим интегральные соотношения. Интегрируя (1.10) по ψ от 0 до 1, получаем первое интегральное соотношение

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) v_0^2 \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi = -v_0 \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} + v_0 \frac{dv_0}{dx} \int_0^1 \frac{\rho_1}{\rho_0} d\psi \right).$$

Из уравнения непрерывности (1.12) находим

$$(3.2) \quad \frac{\partial v_{1y}}{\partial \psi} = -\frac{m}{\rho_0 v_0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\rho_0 v_{0y}}{m} \frac{\partial v_{1x}}{\partial \psi} + \frac{v_{1x}}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} \right].$$

На стенках канала $y=y_-(x)$ ($\psi=0$) и $y=y_+(x)$ ($\psi=1$) выполняются условия

$$(3.3) \quad v_y|_{\psi=0} = v_x|_{\psi=0} dy_-/dx, \\ v_y|_{\psi=1} = v_x|_{\psi=1} dy_+/dx.$$

Интегрируя (3.2) по ψ от 0 до 1, используя (3.3) и равенство

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\rho_0 v_{0y}}{m} = - \frac{1}{\rho_0 v_0} \frac{d\rho_0 v_0}{dx},$$

получим второе интегральное соотношение

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_0^1 \frac{\rho_1}{\rho_0} d\psi + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi = 0.$$

Подставив в (3.1) и (3.4) значение ρ_1/ρ_0 , из (1.14) имеем

$$(3.5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) v_0^2 \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi = - v_0 \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{P_1}{\rho_0 c_H^2} v_0 \frac{dv_0}{dx} - \right. \\ \left. - \left(\frac{c_A}{c_H} \right)^2 v_0 \frac{dv_0}{dx} \int_0^1 \frac{k_1}{k_0} d\psi \right] \\ v_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{P_1}{\rho_0 c_H^2} - \left(\frac{c_A}{c_H} \right)^2 \int_0^1 \frac{k_1}{k_0} d\psi \right].$$

Соотношения (3.5) дают возможность получить уравнение, связывающее возмущение P_1 и величину $\int_0^1 k_1 d\psi$. Если последняя известна, то из полученного уравнения определяется $P_1(t, x)$.

4. Рассмотрим далее точное решение и ультрахолловский режим. Стационарные возмущения, рассмотренные в [1], удовлетворяют соотношениям

$$(4.1) \quad \int_0^1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{v_{1x}}{v_0} \right) d\psi = 0 \\ v_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi + v_0 \frac{dv_0}{dx} \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0.$$

Будем считать, что секции слабо закорочены через чисто омические сопротивления и что ток через каждую соответствующую пару секций (анод—катод) постоянен и не изменяется во времени. В [1] показано, что в этом случае возмущение магнитного поля B_1 на электродах стационарно. Поскольку нестационарная задача отделяется от стационарной, можно, не нарушая общности рассмотрения, ограничиться анализом чисто нестационарных возмущений; в этом случае возмущение B_1 обращается на электродах в нуль. Условия на функцию $k_1(t, \eta, \psi)$ имеют вид:

$$(4.2) \quad k_1(t, \eta_{00}, \psi) = g_1(t, \psi), \quad k_1(0, \eta, \psi) = k^{(0)}(\eta, \psi) \\ k_1(t, \eta, 0) = k_1(t, \eta, 1) = -k_0 P_1(t, \eta) / \rho_0 c_T^2.$$

Разберем случай, когда $k^{(0)}(\eta, \psi) \equiv 0$. При этом $g(0, \psi) = 0$, $P_1(0, \eta) = 0$. В качестве невозмущенного течения выберем рассмотренное в [1] экспоненциальное течение $a = a_0 = \text{const}$. Его параметры имеют вид:

$$(4.3) \quad v_0 = v_m \text{th}(x/L), \quad \rho_0 = \rho_0(0) (1 - v_0^2/v_m^2), \quad B_0 = k_0 \rho_0 \\ \xi = a_0 \eta_\infty = Mc |B_0(0)| / 4\pi e m, \quad \eta = \eta_\infty \text{th}^2(x/L)$$

$$v_m = |B_0(0)| [2\pi\rho_0(0)]^{-1/2}, \quad c_T^2 = \text{const} \ll c_A^2$$

$$f(x) = \frac{2f^* \text{ch}^3(x/L)}{3\sqrt{3} \text{sh}(x/L)}, \quad \eta_\infty = \frac{27}{4} \frac{L}{f^*} \left(\frac{v_m}{v_m f^*} \right) \left(\frac{c_T}{v_m} \right)^2,$$

$$\omega\tau = \frac{M\sigma|B_0|}{e\rho_0 c} = \text{const} \quad x \geq x_{00} > 0,$$

$$\rho_0(0) = \rho_0(x_{00}) [1 - v_0^2(x_{00})/v_m^2]^{-1/2},$$

$$B_0(0) = k_0\rho_0(0).$$

Здесь $\omega\tau$ — параметры Холла, ξ — параметр обмена, f^* — ширина канала в критическом ($v_0=c_A$) сечении. Истинный параметр обмена $\xi = I_d/I_m$ определяется выражением $\xi = Mc|B_0(x_{00})|/4\pi em$, т. е. при $v_0(x_{00}) \ll v_m$ незначительно отличается от выражения, приведенного в (4.3). Поскольку η_∞ не зависит от параметра Холла, то большим значениям $a_0=2$ соответствуют большие значения ξ . Предположение $c_T^2 \ll c_A^2$ соблюдается при

$$(4.4) \quad 0 \leq \eta/\eta_\infty < \eta_m/\eta_\infty = 1 - 2c_T^2/v_m^2.$$

Поскольку считаем, что скорость на входе в канал отлична от нуля, то в формулах (4.3) следует положить $x \geq x_{00} \geq 0$, т. е. $\eta \geq \eta_{00} > 0$, где индексом 00 отмечены значения на входе в канал.

Решение уравнения (1.15) с условиями (4.2) при $k^{(0)}(\eta, \psi) = 0$ имеет вид:

$$(4.5) \quad k_1 = -k_0 \frac{P_1(\theta, \eta_{00})}{\rho_0(\eta_{00}) c_T^2} + \exp\left(\frac{a_0}{2}\psi - \frac{a_0^2}{4}\eta\right) \int_{\eta_{00}}^{\eta} d\mu \times$$

$$\times \left[G(\eta - \mu, \psi) \frac{\partial}{\partial \mu} F(\theta, \mu) \exp\left(\frac{a_0^2}{4}\mu - \frac{a_0}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + G(\eta - \mu, 1 - \psi) \frac{\partial}{\partial \mu} F(\theta, \mu) \exp\left(\frac{a_0^2}{4}\mu\right) \right] +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[(\eta_{00} - \eta) \left(\pi^2 n^2 + \frac{a_0^2}{4}\right)\right] \sin \pi n \psi \int_0^1 [g(\theta, \xi) +$$

$$+ k_0 \frac{P_1(\theta, \eta_{00})}{\rho_0(\eta_{00}) c_T^2}] \exp\left[\frac{a_0}{2}(\psi - \zeta)\right] \sin \pi n \zeta d\zeta.$$

Здесь

$$G(\eta, \psi) = \psi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \pi n \psi}{\pi n} \exp(-\pi^2 n^2 \eta)$$

$$F(\theta, \mu) = \frac{k_0}{c_T^2} \left\{ \frac{P_1(\theta, \eta_{00})}{\rho_0(\eta_{00})} - P_1\left(\theta + \int_{\eta_0}^{\mu} dv/\Omega(v), \mu\right) [\rho_0(\mu)]^{-1} \right\}$$

и функции $g(\theta, \psi)$, $P_1(\theta, \eta)$ обращаются в нуль при $\theta \leq 0$. Из (4.5) следует, что влияние условий на входе в канал на характер решения существенно лишь при $0 < \eta - \eta_{00} \leq (\pi^2 + a_0^2/4)^{-1}$. Функция k_1 при заданном θ существенно двумерна, т. е. зависит от η и ψ . Казалось бы, если $[g(\theta, \psi) = -k_0 P_1(\theta, \eta_{00})/\rho_0(\eta_{00}) c_T^2]$, то существует решение $k_1 = -k_0 P_1(\theta, \eta_{00})/\rho_0(\eta_{00}) c_T^2$, однако при этом $P_1 = P_1(\theta, \eta_{00})\rho_0(\eta)/\rho_0(\eta_{00})$, а такая зависимость противоречит интегральным соотношениям (3.5).

Выражение (4.5) для функции k_1 сложно. Поэтому рассмотрим подробнее ультрахолловский режим, при котором $a_0 \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow \infty$. Будем считать, что $\eta - \eta_{00} \gg a_0^{-1} \gg a_0^{-2}$, так что влиянием условий на входе в канал можно пренебречь. В этом случае k_1 имеет вид (2.5):

$$(4.6) \quad g_1(\theta, \eta) + g_2(\theta, \eta) = -k_0 [\rho_0(\eta) c_T^2]^{-1} P_1 \left(\theta + \int_{\eta_{00}}^{\eta} d\mu / \Omega(\mu), \eta \right) = \\ = Q(\theta, \eta) \\ g_1(\theta, \eta - 1/a_0) + g_2(\theta, \eta + 1/a_0) \exp(a_0) = Q(\theta, \eta).$$

Отсюда приближенно

$$(4.7) \quad g_1(\theta, \eta) \approx Q(\theta, \eta) \\ g_2(\theta, \eta) \approx a_0^{-1} \exp(-a_0) \partial Q / \partial \eta.$$

В переменных (t, η, ψ) имеем

$$(4.8) \quad k_1 = -\frac{k_0 P_1(t, \eta)}{\rho_0(\eta) c_T^2} + \frac{k_0 \exp[a_0(\psi - 1)]}{a_0 c_T^2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\Omega(\eta)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{P_1(t, \eta)}{\rho_0(\eta)}.$$

Отбрасывая малые порядка a_0^{-2} , получаем

$$(4.9) \quad \int_0^1 k_1 d\psi = -k_0 P_1(t, \eta) / \rho_0 c_T^2, \quad \int_0^1 \rho_1 d\psi = P_1(t, \eta) / c_T^2.$$

Вводя функцию $W(t, x)$

$$(4.10) \quad \int_0^1 \frac{v_1 x}{v_0} d\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) W, \quad \frac{P_1}{\rho_0 c_T^2} = -v_0 \frac{\partial W}{\partial x},$$

удовлетворим второму интегральному соотношению (3.5). Первое дает уравнение для функции W

$$(4.11) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} + (v_0^2 - c_T^2) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + v_0 \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial W}{\partial x} \frac{c_T^2}{\rho_0 v_0} \frac{d}{dx} \rho_0 v_0 = 0.$$

Поскольку возмущение полного давления P_1 обусловлено заданным возмущением на входе в канал, то оно должно иметь вид уходящей волны. Из (4.11) видно, что для коротковолновых возмущений с длиной волны, малой по сравнению с масштабом изменения параметров экспоненциального течения, имеет место зависимость

$$(4.12) \quad W = W \left(t - \int_{x_{00}}^x [v_0(\xi) + c_T]^{-1} d\xi \right).$$

Знак плюс перед c_T соответствует уходящей волне. Особенность, возникающая при переходе через скорость звука c_T , фиктивна и связана с используемым приближением. Аналогичная особенность возникает при рассмотрении стационарных возмущений в ультрахолловском приближении (см. [1]).

Рассмотрим зону перехода через скорость звука c_T . Последняя находится в рассматриваемой области, если $\xi \gg v_m^2/c_T^2$. Используя преобразование Фурье по времени и разлагая параметры экспоненциального течения вблизи точки перехода x_T по степеням $x-x_T$, получим для фурье-компоненты $s(\omega, x)$ функции $W(t, x)$ уравнение

$$(4.13) \quad \lambda \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial s}{\partial x} + \beta s = 0$$

$$\lambda = (x - x_T)/L, \quad \alpha = (v_m/L = 2i\omega) L (2v_m)^{-1}, \quad \beta = -(2iv_m/L + \omega) L^2 \omega (2c_T v_m)^{-1}.$$

Пригодным вблизи точки перехода решением является функция

$$(4.14) \quad s = s_0(\omega) \exp(-\beta\lambda/\alpha),$$

т. е.

$$(4.15) \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega) \exp[i\omega t - \beta\lambda/\alpha] d\omega.$$

Вдали от точки перехода через скорость звука, т. е. при $v_0 \gg c_T$, $dv_0/dx \rightarrow 0$, функция W имеет вид (4.12), причем можно пренебречь величиной c_T в знаменателе подынтегрального выражения. Из приведенного рассмотрения следует, что при включении источника нестационарных возмущений на входе в канал нестационарное течение устанавливается через

промежуток времени $\tau \sim \tau_0 = \int_{x_0}^{x_m} d\xi/v_0(\xi)$, где x_m соответствует выходу из канала и для экспоненциального течения можно положить $x_m \rightarrow \infty$. При выключении источника нестационарных возмущений стационарное течение установится через тот же промежуток времени.

Из (4.9), (4.10) следует:

$$(4.16) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \int_0^1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{v_{1x}}{v_0} \right) d\psi = \frac{\delta m \cdot}{m \cdot},$$

где $\delta m \cdot$ — возмущение массового расхода. Пусть $\delta m \cdot$ на входе в канал изменяется достаточно медленно — за времена, большие времени пролета τ_0 иона через канал. В этом случае, поскольку плазма не высаживается на стенки, величину $\delta m \cdot$ можно считать постоянной вдоль канала, а также пренебречь второй производной по времени от функции W в уравнении (4.11). В результате получим

$$(4.17) \quad \frac{\delta m \cdot}{m \cdot} \frac{dv_0^2}{dx} + \frac{P_1}{\rho_0 c_T^2} \left(\frac{c_T^2}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} - v_0 \frac{dv_0}{dx} \right) = (v_0^2 - c_T^2) \frac{\partial}{\partial x} \frac{P_1}{\rho_0 c_T^2}.$$

Отсюда

$$(4.18) \quad \frac{P_1}{\rho_0 c_T^2} = \frac{\delta m \cdot}{m \cdot} \int_{x_T}^x \frac{d\xi}{v_0^2(\xi) - c_T^2} \frac{dv_0^2}{d\xi} \exp \left[\int_{\xi}^x \frac{d\mu (c_T^2 d\rho_0/d\mu - \rho_0 v_0 dv_0/d\mu)}{\rho_0(\mu) [v_0^2(\mu) - c_T^2]} \right].$$

Подставляя параметры экспоненциального течения, находим из (4.18), (4.9)

$$(4.19) \quad \frac{P_1}{\rho_0 c_T^2} \approx \frac{2\delta m \cdot}{m \cdot}, \quad \int_0^1 \frac{\rho_1}{\rho_0} d\psi \approx \frac{2\delta m \cdot}{m \cdot}, \quad \int_0^1 \frac{v_{1x}}{v_0} d\psi = -\frac{\delta m \cdot}{m \cdot}.$$

В общем случае величина δt описывается тем же уравнением (4.11), что и функция W .

5. Рассмотрим случай, в котором значение k_1 на входе в канал не зависит от времени, но начальная функция $k^{(0)}(\eta, \psi)$ отлична от нуля (и не удовлетворяет соответствующему стационарному уравнению). Можно сформулировать условия на функцию k_1 в виде

$$(5.1) \quad \begin{aligned} k_1(t, \eta_{00}, \psi) &= 0, \quad k_1(0, \eta, \psi) = k^{(0)}(\eta, \psi) \\ k_1(t, \eta, 0) &= k_1(t, \eta, 1) = -k_0 P_1(t, \eta) / \rho_0 c T^2. \end{aligned}$$

При этом $P_1(t, \eta_{00}) = 0$, $k^{(0)}(\eta, 0) = k^{(0)}(\eta, 1) = -k_0 P_1(0, \eta) / \rho_0 c T^2$. Если $k^{(0)} = 0$, то $P_1 = 0$ и $k_1(t, \eta, \psi) = 0$. Возмущения k_1 и P_1 обусловлены отличием от нуля функции $k^{(0)}(\eta, \psi)$. Из (5.1) следует, что $k^{(0)}(\eta_{00}, \psi) = 0$. Если по истечении некоторого времени функция k_1 перестает зависеть от конкретного вида функции $k^{(0)}$, то это означает, что устанавливается стационарное течение.

Решение уравнения (1.15) с условиями (5.1) находится при помощи преобразования Лапласа по времени и при невозмущенном экспоненциальном течении имеет вид:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} k_1 &= \exp\left(\frac{a_0}{2}\psi - \frac{a_0^2}{4}\eta\right) \int_{\eta_{00}}^{\eta} d\mu \left[G(\eta - \mu, \psi) \frac{\partial}{\partial \mu} F(\theta, \mu) \times \right. \\ &\times \exp\left(\frac{a_0^2}{4}\mu - \frac{z_0}{2}\right) + G(\eta - \mu, 1 - \psi) \frac{\partial}{\partial \mu} F(\theta, \mu) \exp\left(\frac{a_0^2}{4}\mu\right) \left. \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left[\eta(\kappa - 1) \left(\pi^2 n^2 + \frac{a_0^2}{4}\right) + \frac{a_0}{2}\psi\right] \times \\ &\times \left[\int_0^{\psi} k^{(0)}(\kappa\eta, \lambda) \exp\left(-\frac{a_0}{2}\lambda\right) \cos \pi n(\lambda + 1 - \psi) d\lambda + \right. \\ &+ \int_{\psi}^1 k^{(0)}(\kappa\eta, \lambda) \exp\left(-\frac{a_0}{2}\lambda\right) \cos \pi n(\psi + 1 - \lambda) d\lambda - \\ &- \int_0^1 k^{(0)}(\kappa\eta, \lambda) \exp\left(-\frac{a_0}{2}\lambda\right) \cos \pi n(\psi - 1 + \lambda) d\lambda \left. \right] \times \\ &\times \left[\ln \frac{\eta(\eta_{\infty} - \eta_{00})}{\eta_{00}(\eta_{\infty} - \eta)} - \frac{2t}{\tau_m} \right], \end{aligned}$$

$$(5.3) \quad \kappa(t, \eta) = \frac{\eta_{\infty} \exp(-2t/\tau_m)}{\eta_{\infty} - \eta [1 - \exp(-2t/\tau_m)]}, \quad \tau_m = \frac{L}{v_m}.$$

Здесь I — единичная функция, равная нулю при отрицательных аргументах. Можно убедиться, что величина $\kappa\eta$ зависит лишь от θ .

Представляет интерес последнее слагаемое в выражении (5.2); оно обращается в нуль при $\kappa\eta = \eta_{00}$, т. е. при

$$(5.4) \quad t = t_0(\eta) = \frac{\tau_m}{2} \ln \frac{\eta(\eta_{\infty} - \eta_{00})}{\eta_{00}(\eta_{\infty} - \eta)}.$$

При $t > t_0(\eta)$ решение в данной точке η перестает зависеть от конкретного вида функции $k^{(0)}(\eta, \psi)$, т. е. в данном сечении устанавливается стационарное течение. Полное время установления течения в канале равно

$$(5.5) \quad \tau_0 = t_0(\eta_m) = \frac{\tau_m}{2} \ln \frac{v_m^4}{2c_T^2 v_0^2(x_{00})}$$

(считаем, что $v_m^2 \gg c_T^2$, $v_0^2(x_{00})$). Видно, что τ_0 является временем пролета ионов через канал.

Из приведенного в п. 4, 5 рассмотрения следует, что течение в канале устанавливается за времена порядка времени пролета плазмы (ионов) через канал (область, занятую магнитным полем). Течение устойчиво. Это связано с тем, что проводимость плазмы считалась постоянной и для невозмущенного течения выполнено условие параллельности векторов $\nabla \rho$ и ∇P .

Поступила 3 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Шубин А. П. Течение плазмы между электродами, обладающими слабой продольной проводимостью. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 6.
2. Бам-Зеликович Г. М. Об ускорении проводящего газа в сильном нестационарном электромагнитном поле. ПМТФ, 1968, № 6.
3. Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И. Влияние конечной проводимости на двумерное течение плазмы в коаксиальном канале. Магнитная гидродинамика, 1967, № 2.
4. Беляев С. А., Данилова Г. В., Гольдина Д. А., Лесков Л. В., Куликов Ю. Н., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Савичев В. В., Самарский А. А., Филиппов С. С., Царева Л. С. Расчет нестационарного ускорения плазмы в одномерном приближении. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1970, № 36.
5. Брушлинский К. В., Герлах Н. И., Морозов А. И. Расчет двумерных нестационарных течений плазмы конечной проводимости при наличии эффекта Холла. Магнитная гидродинамика, 1967, № 1.
6. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Об одном параметре подобия в теории плазменных течений. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 1.
7. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Об эволюционности уравнений магнитной гидродинамики с учетом эффекта Холла. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.