

**УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ГОРЕНИЯ  
ПОРОХА В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ**

*Б. В. Новожилов*

*(Москва)*

Впервые вопрос об устойчивости горения пороха в полузамкнутом объеме был рассмотрен Я. Б. Зельдовичем [1]. При этом предполагалось, что температура поверхности пороха  $T_s$  постоянна. В настоящей работе исследуется та же задача с учетом зависимости  $T_s$  от начальной температуры пороха  $T_0$  и давления  $p$ . Получено существенное увеличение области устойчивого горения пороха по сравнению со случаем  $T_s = \text{const}$ .

**Постановка задачи.** В теории горения порохов Я. Б. Зельдовича [2; 3] указан метод исследования нестационарных процессов при горении. Суть его состоит в том, что стационарная зависимость скорости горения  $u^0(T_0, p)$  от начальной температуры и давления может быть переведена в зависимость  $u(f, p)$ , где  $f$  — градиент температуры на поверхности пороха. Полученная зависимость будет справедлива и в нестационарных условиях (в связи с этим и опущен индекс у скорости горения), так как градиент  $f$  определяет температуру в зоне горения, от которой, по существу, и зависит скорость горения. Переход от  $u^0(T_0, p)$  к  $u(f, p)$  осуществляется при помощи известной связи между градиентом, скоростью горения и начальной температурой, справедливой в стационарных условиях

$$\kappa f^0 = u^0 (T_s^0 - T_0). \quad (1)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности пороха.

При таком подходе к изучению нестационарных явлений пренебрегаем, конечно, инерционностью всех физических процессов, за исключением теплопроводности в конденсированной фазе.

Температура поверхности пороха в теории Я. Б. Зельдовича считается постоянной, т. е. не зависящей ни от давления, ни от начальной температуры. Было показано [4], что в том же предположении о главной роли инерционности прогретого слоя конденсированной фазы в теории нестационарного горения пороха можно аналогичным образом учесть зависимость температуры поверхности  $T_s$  от  $T_0$  и  $p$ . А именно, в нестационарных условиях  $T_s$  тоже определяется мгновенными значениями градиента и давления, причем зависимость  $T_s(f, p)$  может быть получена из стационарного закона  $T_s^0(T_0, p)$  при учете (1).

Наша задача состоит в исследовании устойчивости стационарного режима горения в пороховой камере. Давление в камере подчиняется уравнению баланса

$$\frac{dp}{dt} = \frac{F}{V} (\rho u S - p A \sigma), \quad (2)$$

где  $t$  — время;  $V$  — объем камеры;  $F$  — сила пороха;  $\rho$  — плотность пороха;  $S$  — площадь поверхности горения;  $A$  — коэффициент истечения;  $\sigma$  — сечение сопла.

Первый член правой части описывает увеличение давления в камере за счет горения пороха, второй — уменьшение его вследствие истечения газов из сопла.

Инерционность прогретого слоя пороха учитывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial T}{\partial x} - u T \right), \quad (3)$$

причем  $x$  — координата ( $-\infty < x \leq 0$ ), а граничные условия имеют вид

$$T(0, t) = T_s, \quad T(-\infty, t) = T_0. \quad (4)$$

Для получения замкнутой системы уравнений к (2), (3) нужно добавить еще зависимости  $u(f, p)$  и  $T_s(f, p)$ , которые должны быть получены из стационарных зависимостей  $u^0(T_0, p)$  и  $T_s^0(T_0, p)$ .

В стационарном режиме имеем

$$u = u^0(T_0, p^0), \quad T_s = T_s^0(T_0, p^0), \quad p = p^0 = \frac{\rho S u^0}{A \sigma}, \quad (5)$$

$$T^0 = T_0 + (T_s^0 - T_0) e^{\frac{u^0 x}{x}}, \quad f^0 = \frac{u^0}{x} (T_s^0 - T_0).$$

Введем безразмерные давление, скорость, координату, время, температуру и градиент

$$\eta = \frac{p}{p^0}, \quad v = \frac{u}{u^0}, \quad \xi = x \frac{u^0}{x}, \quad \tau = t \frac{(u^0)^2}{x}, \quad (6)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_s^0 - T_0}, \quad \vartheta = \theta \Big|_{\xi=0} = \frac{T_s - T_0}{T_s^0 - T_0}, \quad \varphi = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{f}{f^0}.$$

Величины

$$t_1 = \frac{V}{A \sigma F}, \quad t_2 = \frac{x}{(u^0)^2} \quad \text{и} \quad \chi = \frac{t_1}{t_2} = \frac{V (u^0)^2}{A F \sigma x} \quad (7)$$

представляют собой характерные времена истечения газа из камеры, релаксации прогретого слоя пороха и их отношение — аппаратную константу.

Уравнения (2), (3) и граничные условия в безразмерных переменных записываются в виде:

$$\chi \frac{d \eta}{d \tau} = v - \eta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v \frac{\partial \theta}{\partial \xi},$$

$$\theta(0, \tau) = \vartheta, \quad \theta(-\infty, \tau) = 0.$$

Исследование устойчивости будем вести в линейном приближении. Представив зависящие от времени величины в форме

$$\eta = 1 + \eta_1 \psi(\tau), \quad v = 1 + v_1 \psi(\tau), \quad \theta = e^{-\xi} [1 + \theta_1(\xi) \psi(\tau)], \quad (8)$$

где  $\eta_1$ ,  $v_1$  и  $\theta_1$  много меньше единицы, получим линейные дифференциальные уравнения

$$1 + \frac{\lambda}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{v_1}{\eta_1}, \quad (9)$$

$$\frac{\theta_1}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} + \frac{d\theta_1}{d\xi} - v_1, \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\theta_1(0) = \vartheta_1. \quad (11)$$

$\theta_1(-\infty)$  растет медленнее, чем  $e^{-\xi}$ . Что касается зависимостей  $u(f, p)$  и  $T_s(f, p)$ , то в линейном приближении они могут быть записаны в виде (см. [5]):

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{k}{k+r-1} \varphi_1 + \frac{\nu(r-1) - \mu k}{k+r-1} \eta_1, \\ \vartheta_1 &= \frac{r}{k+r-1} \varphi_1 + \frac{\mu(k-1) - \nu r}{k+r-1} \eta_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\varphi_1$  — поправка к градиенту, равная из (5)

$$\varphi_1 = \vartheta_1 + \left. \frac{d\theta_1}{d\xi} \right|_{\xi=0}, \quad (13)$$

а  $k$ ,  $r$ ,  $\nu$  и  $\mu$  — параметры, характеризующие зависимость скорости горения и температуры поверхности от начальной температуры и давления:

$$\begin{aligned} k &= (T_s^0 = T_0) \left( \frac{\partial \ln u^0}{\partial T_0} \right)_p, & r &= \left( \frac{\partial T_s^0}{\partial T_0} \right)_p, \\ \nu &= \left( \frac{\partial \ln u^0}{\partial \ln p} \right)_{T_0}, & \mu &= \frac{1}{T_s^0 - T_0} \left( \frac{\partial T_s^0}{\partial \ln p} \right)_{T_0}. \end{aligned}$$

Эти величины могут быть найдены из экспериментов по стационарному горению пороха. В теории Я. Б. Зельдовича  $r = \mu = 0$ .

Ниже проведено исследование устойчивости системы, описываемой уравнениями (9), (10) и соотношениями (11)–(13).

**Устойчивость стационарного режима горения.** Обычный путь исследования устойчивости стационарного режима состоит в наложении на него малых возмущений, меняющихся со временем как  $\exp \gamma t$ . Если эти возмущения растут со временем, то режим считается неустойчивым, в обратном случае — стационарное состояние устойчиво. Иными словами, нужно определить знак вещественной части комплексной частоты  $\lambda = \text{Re} \gamma$ . Именно таким образом и проведено исследование устойчивости Я. Б. Зельдовичем [1]. Уравнение для частот может быть получено из (9)–(13).

Однако, воспользовавшись результатами работы [5], посвященной рассмотрению горения исследуемой модели пороха при гармонически меняющемся давлении, можно избежать достаточно трудоемкого исследова-

дования характеристического уравнения для частот. Очевидно, что при непрерывном изменении параметров системы ( $k$ ,  $r$ ,  $v$ ,  $\mu$  и  $\chi$ ) можно перейти от устойчивого режима к неустойчивому. В критическом режиме коэффициент затухания  $\lambda$  должен изменить знак. Это может произойти одним из двух возможных способов. Во-первых, в критическом режиме коэффициент затухания обращается в нуль, и, во-вторых, переход от положительных  $\lambda$  к отрицательным происходит скачком от  $\lambda = \infty$  к  $\lambda = -\infty$ .

В первом случае критический режим характеризуется тем, что все комплексные частоты, за исключением одной, имеют отрицательные вещественные части и соответствующие возмущения затухают. Одна же из частот имеет  $\lambda = 0$  и возмущение, раз возникнув, не меняет свою амплитуду. Если перейти к комплексным амплитудам  $\eta_1$  и  $v_1$  и считать  $\psi(\tau) = e^{i\tau}$ , то из приведенной выше системы уравнений можно найти связь между параметрами, характеризующими систему, при которой наступает неустойчивость, и соответствующую частоту.

Из (9) имеем

$$1 + i\chi\gamma = \frac{v_1}{\eta_1}. \quad (14)$$

Кроме того, в работе [5] показано, что если давление меняется по закону  $\eta_1 e^{i\tau}$ , то комплексные амплитуды скорости и давления связаны между собой соотношением

$$\frac{v_1}{\eta_1} = \frac{a + ib}{c - id}, \quad (15)$$

где

$$a = v \left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\gamma S_1}{R_1} \right) - \frac{k\mu}{2} \frac{\gamma S_1}{R_1}, \quad b = (vr - \mu k) R_1, \quad (16)$$

$$c = 1 + \frac{r}{2} \frac{\gamma S_1}{R_1} - k S_1, \quad d = \frac{k S_1}{2R_1} - r R_1,$$

причем

$$R_1 = \left[ \frac{1}{8} (\sqrt{16\gamma^2 + 1} - 1) \right]^{1/2}, \quad S_1 = 1 - \frac{R_1}{\gamma}. \quad (17)$$

Подставляя (15) в (14) и приравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$c(a - c) - d(b + d) = 0, \quad \chi = \frac{1}{\gamma} \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}. \quad (18)$$

Из этих соотношений можно найти и критическую частоту и аппаратурную константу в зависимости от параметров, характеризующих порох.

В (17) не содержится случай  $\gamma = 0$ . Для его исследования нужно положить  $\psi(\tau) = e^{\lambda\tau}$  при  $\lambda \ll 1$ . Тогда из (10), (11) имеем

$$\theta_1(\xi) = \left( \vartheta_1 + \frac{v_1}{\lambda} \right) e^{\lambda(1-\lambda)\xi} - \frac{v_1}{\lambda},$$

а для градиента на поверхности получаем

$$\varphi_1 = \vartheta_1(1 + \lambda) + v_1(1 - \lambda).$$

Из уравнения (9) имеем

$$1 + \lambda \chi = \frac{v_1}{\tau_1},$$

а из (12)

$$\frac{v_1}{\tau_1} = v + \lambda [k(1 - \mu) + r(1 - v)].$$

Сравнивая два последних соотношения, заключаем, что при  $\gamma = 0$  потеря устойчивости может произойти только в малоинтересном для практики случае  $v = 1$ .

Перейдем теперь к исследованию второго типа потери устойчивости, когда переход от устойчивого к неустойчивому режиму происходит скачкообразным изменением декремента затухания от  $\lambda = -\infty$  к  $\lambda = \infty$ .

Считая  $\lambda \gg 1$ , положительным следует взять  $\psi(\tau)$  в виде  $\psi(\tau) = e^{\lambda \tau}$ . Если температура поверхности пороха переменна ( $r \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ ), то решение уравнения теплопроводности и градиент на поверхности будут:

$$\theta_1(\xi) = \vartheta_1 e^{\sqrt{\lambda} \xi}, \quad \varphi_1 = \vartheta_1 \sqrt{\lambda},$$

а из (12) получаем

$$\frac{v_1}{\tau_1} = \frac{v r - \mu k}{r},$$

в то время как левая часть (9) должна стремиться к бесконечности как  $\lambda$ . Таким образом, при переменной температуре поверхности рассматриваемый тип потери устойчивости не осуществляется.

Если температура поверхности фиксирована ( $r = 0$ ,  $\mu = 0$ ), то

$$\theta_1(\xi) = \frac{v_1}{\lambda} (e^{\sqrt{\lambda} \xi} - 1), \quad \varphi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\lambda}},$$

причем отношение

$$\frac{v_1}{\tau_1} = \frac{v \sqrt{\lambda}}{k - (k - 1) \sqrt{\lambda}}$$

может расти как  $\lambda$  при условии, что  $k - 1$  стремится к нулю как  $1/\sqrt{\lambda}$ .

Аналогично можно показать, что если  $k$  стремится к единице со стороны отрицательных значений  $k - 1$ , то  $\psi(\tau)$  имеет вид  $e^{-\lambda \tau}$  ( $\lambda \gg 1$ ). Таким образом, в модели с постоянной температурой поверхности на прямой  $k = 1$  устойчивость теряется скачкообразным переходом от  $\lambda = -\infty$  к  $\lambda = \infty$ .

**Результаты расчетов.** Формулы (18), из которых должны находиться критическая частота и аппаратная константа, содержат  $\gamma$  довольно сложным образом. Поэтому удобнее выразить из первой формулы параметр  $k$  как функцию частоты и остальных параметров пороха —  $r$ ,  $v$  и  $\mu$ :

$$k = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4DC}}{2S_1 D}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned}
 D &= 1 + \frac{1}{4R_1^2} - \frac{\nu}{2} \frac{\gamma}{S_1 R_1}; & B &= (2 - \nu) \left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\gamma}{R_1} \right) - \\
 & & & - \frac{\nu}{2} \frac{\gamma}{R_1} \left( 1 + \frac{r\gamma}{R_1} \right); \\
 C &= (1 - \nu) \left[ 1 + r \frac{\gamma S_1}{R_1} \left( 1 + \frac{r\gamma}{2R_1} \right) \right]. & & (20)
 \end{aligned}$$

Теперь, задаваясь различными значениями частоты  $\gamma$ , можно найти соответствующие  $k$  при данных  $r$ ,  $\nu$  и  $\mu$ . Аппаратурная константа же вычисляется либо по второй формуле (18) после определения (при заданном  $\gamma$ ) значений  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , либо по эквивалентной ей формуле

$$\chi = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\frac{k^2 \nu}{4} \frac{\gamma^2 S_1^2}{R_1^3} + k S_1 \left[ \frac{\nu}{2R_1} \left( 1 - \frac{r}{2} \frac{\gamma^2 S_1}{R_1^2} \right) - \mu \frac{R_1}{S_1} \right]}{1 + k^2 S_1^2 \left( 1 + \frac{1}{4R_1^2} \right) - 2k S_1 \left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\gamma}{R_1} \right) + r \frac{\gamma S_1}{R_1} \left( 1 + \frac{r}{2} \frac{\gamma}{R_1} \right)}, \quad (21)$$

которая получается, если в (18) подставить (16).

На рис. 1 изображены границы устойчивости стационарного режима горения пороха в координатах  $(k, \chi)$  при разных значениях  $r$  и при фиксированных  $\nu$  и  $\mu$  ( $\nu=2/3$ ,  $\mu=0$ ). Кривые 1—3 построены для значений  $r=0$ ,  $1/3$  и 1. Область устойчивого горения лежит левее соответствующей кривой. Зависимость  $\chi(k)$  при  $r=0$  была получена ранее Я. Б. Зельдовичем [1]. Характерной особенностью этой кривой является излом при  $k=1$  и  $\chi=2/3$ . При значениях  $\chi < 2/3$  потеря устойчивости про-

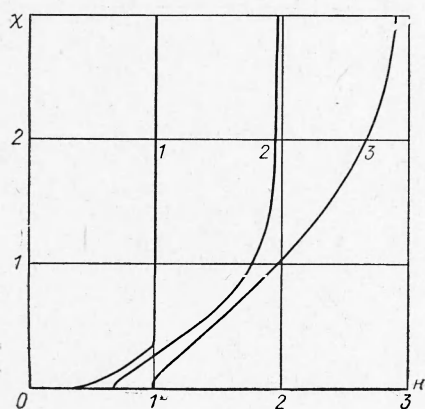


Рис. 1.

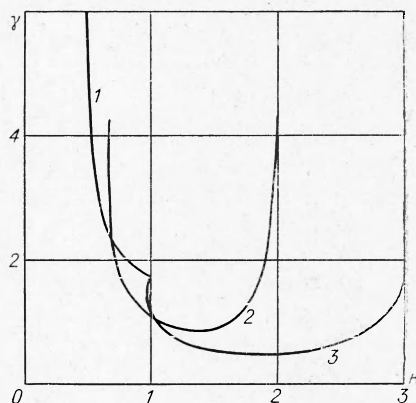


Рис. 2.

исходит при  $\lambda=0$ ; иначе говоря, при данном  $\chi$  имеется определенная критическая частота и соответствующее ей  $k$ , при которых режим горения становится неустойчивым. При значениях аппаратурной константы, больших  $2/3$ , устойчивость теряется при переходе прямой  $k=1$ , причем коэффициент затухания меняет свой знак скачкообразным изменением от  $\lambda=-\infty$  к  $\lambda=\infty$ . Случай  $r=0$  является в этом смысле особым: при любом  $r \neq 0$  граница устойчивости не имеет излома — потеря

устойчивости всегда происходит при  $\lambda=0$ . Чем больше  $r$ , тем больше область устойчивого горения. При  $\chi \rightarrow \infty$ , т. е. при переходе к случаю горения в условиях постоянного давления (объем камеры бесконечен), кривые приближаются к вертикальным асимптотам  $k=k_0$ , причем для  $k_0$  выполняется соотношение

$$r = \frac{(k_0 - 1)^2}{k_0 + 1}, \quad (22)$$

полученное при исследовании устойчивости горения пороха в условиях постоянного давления [4].

Особенно отчетливо проявляется различие между случаями переменной и постоянной температуры поверхности горящего пороха при рассмотрении зависимости критических частот от параметра  $k$ . Для случая Я. Б. Зельдовича при уменьшении  $k$  от единицы частота, соответствующая переходу от устойчивого к неустойчивому режиму, монотонно возрастает и при  $k=1$  —  $\nu$  обращается в бесконечность. Если же  $r \neq 0$ ,

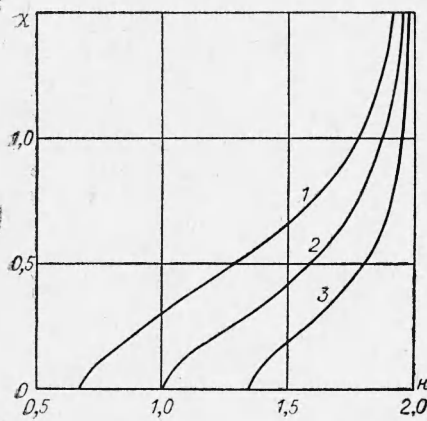


Рис. 3.

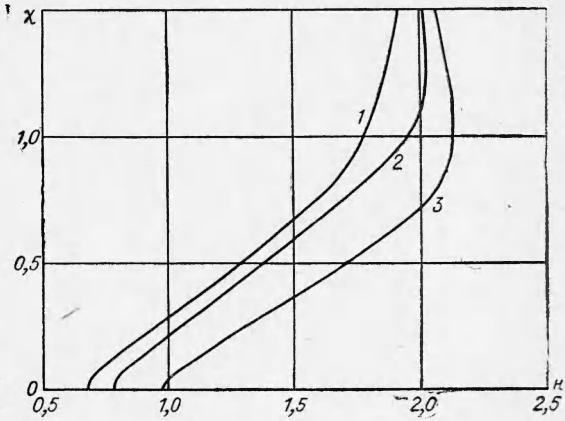


Рис. 4.

то кривые  $\chi(k)$  имеют минимум, причем частоты, соответствующие  $\chi=0$  и  $\chi=\infty$ , совпадают. На рис. 2 приведены зависимости частот, при которых теряется устойчивость от параметра  $k$  для  $r=0, 1/3$  и  $1$  (соответственно кривые 1—3). Эти кривые позволяют определить при данных  $k$  и  $r$  частоту той гармоники, которая при уменьшении аппаратной константы первой теряет устойчивость. Соответствующее  $\chi$  находится по рис. 1.

Рис. 3 иллюстрирует влияние параметра  $\nu$ , характеризующего зависимость скорости горения от давления, на устойчивость. Кривые 1—3 построены для  $\nu$ , равного соответственно  $2/3, 1/2$  и  $1/3$ . При этом принято  $r=1/3$  и  $\mu=0$ . Увеличение  $\nu$  приводит к уменьшению области устойчивого горения.

Параметр  $\mu$  влияет на устойчивость обратным образом. При его увеличении, как показано на рис. 4, область существования устойчивых режимов увеличивается. Кривые 1—3 построены соответственно для  $\mu=0, 0,1$  и  $0,2$  при  $r=1/3, \nu=2/3$ . Стабилизирующее влияние  $\mu$ , характеризующего зависимость температуры поверхности пороха от давления, может привести к тому, что при некоторых значениях аппаратной константы возможно устойчивое горение при  $k$  больших, чем  $k_0$ , являющегося максимальным для  $\chi=\infty$ . Граница устойчивого горения (кри-

вые 2 и 3) приближается к асимптоте  $k=k_0$  не слева, как при  $\mu=0$ , а со стороны  $k$ , больших, чем  $k_0$ . При  $k$ , близких к  $k_0$ , справедлива асимптотическая формула, которая может быть получена из (19)—(21):

$$\chi = \frac{\nu(k_0 - 1)^3}{(k_0 - k)(k_0 + 3)(k_0 + 1)} \left[ 1 - \frac{2\mu k_0(k_0 + 1)}{\nu(k_0 - 1)^2} \right]. \quad (23)$$

Таким образом, при  $\mu > \frac{\nu(k_0 - 1)^2}{2k_0(k_0 + 1)} \chi$  стремится к бесконечности так, что  $k > k_0$  и область устойчивого горения для некоторого интервала значений аппаратурных констант больше, чем при  $\chi = \infty$ .

Резюмируя, можно сказать что учет зависимости температуры поверхности горящего пороха от давления и градиента температуры по поверхности приводит к существенному расширению области устойчивого горения пороха в ракетной камере по сравнению со случаем Я. Б. Зельдовича  $r = \mu = 0$ . В частности, горение возможно и при  $k > 1$ , что очень часто осуществляется на опыте.

В настоящей работе устойчивость горения рассмотрена в линейном приближении. Для того чтобы ответить на вопрос о поведении системы порох — камера после перехода границы устойчивости, нужно провести исследование нелинейных свойств этой системы. И уравнение теплопроводности и связи между скоростью горения и температурой поверхности, с одной стороны, и давлением и градиентом, с другой, нелинейны. Поэтому учет конечности амплитуды колебаний давления в камере может привести к возникновению автоколебательных режимов горения, тем более, что при постоянном давлении, как недавно показано [6], такие режимы возможны. Кроме того, имеются экспериментальные данные (см., например, [7]), свидетельствующие о том, что в камерах сгорания при определенных условиях возникают колебательные процессы с частотами, соответствующими характерной частоте прогретого слоя пороха. Учет нелинейных эффектов может привести также и к возникновению автоколебаний даже в том случае, когда стационарный режим устойчив. Для этого необходимо, чтобы коэффициент затухания пороха уменьшался бы с увеличением амплитуды колебаний скорости горения или давления.

Поступила в редакцию  
23/VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1963, 1.
2. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 11—12.
3. Я. Б. Зельдович. ПМТФ, 1964, 4.
4. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1965, 4.
5. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1965, 6.
6. Б. В. Новожилов. ПМТФ, 1966, 5.
7. J. L. Eisel, M. D. Horton, E. W. Price and D. W. Rice. AIAA J., 1964, 2, 7. (Русский пер.: «Ракетная техника и космонавтика», 1964, 7.)