

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА

С. А. Решетняк, Л. А. Шелепин

(Москва)

Предлагается метод исследования кинетики процессов, описываемых уравнением Фоккера — Планка. Этот метод основан на разложении функции распределения в ряд по степеням некоторого эволюционного оператора, действующего на равновесную функцию распределения (или в ряд по временным производным какого-либо параметра задачи). Для определенности рассмотрим следующее уравнение, описывающее широкий круг явлений как в обычной, так и в твердотельной плазме:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left(D_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j} - A_{ij} f \right) = \hat{H}f.$$

Уравнение (1) для пространственно-однородной функции распределения электронов f , зависящей лишь от модуля вектора скорости v , и при известной равновесной температуре распределения электронов T_e приводится к виду

$$(2) \quad g \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(gD \frac{\partial u}{\partial v} \right),$$

где $u = \exp(mv^2/2T_e)f$; $g = v^2 \exp(-mv^2/2T_e)$; D — коэффициент «диффузии»; v — модуль вектора скорости.

Интегрируя дважды правую и левую части (2) по v и полагая производную du/dv ограниченной в нуле, имеем

$$(3) \quad u = u_0 + \hat{E}u,$$

где эволюционный оператор \hat{E} определен следующим образом:

$$\hat{E} = \int_0^v \frac{dv'}{gD} \int_0^{v'} dv'' g \frac{\partial}{\partial t} = \hat{H}^{-1} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Поддействуем оператором \hat{E} в правой части (3) на равновесную функцию распределения $u = u_0$, результат назовем квазиравновесной функцией распределения (КФР) первого порядка. Действуя оператором \hat{E} в правой части (3) на КФР первого порядка, находим КФР второго порядка и т. д. Таким образом, искомую функцию распределения представляем в виде бесконечного ряда по степеням эволюционного оператора \hat{E} или в виде ряда по временным производным параметра u_0

$$(4) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{E}^n u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{d^{(n)} u_0}{dt^n},$$

где коэффициенты разложения находятся по формуле

$$\beta_n = \int_0^v \frac{dv'}{gD} \int_0^{v'} dv'' g \beta_{n-1}, \quad \beta_0 = 1.$$

Слагаемые с высшими производными в (4) играют существенную роль лишь на начальной стадии процесса. С течением времени они последовательно уменьшаются, и, начиная с некоторого момента, в разложении (4) можно ограничиться конечным числом слагаемых. Предположение о возможности «обрезания» бесконечного ряда основано на том, что система постепенно «забывает» информацию о начальной функции распределения. Практически наиболее интересную стадию процесса чаще всего описывает КФР первого порядка.

Предложенный здесь подход обобщает на непрерывный спектр метод квазиравновесных функций распределения, развитый ранее для анализа кинетики заселенностей электронных уровней атомов [1], колебательных и вращательных уровней молекул [2], концентраций многозарядных ионов [3], интенсивностей стоксовых и антистоксовых компонент в вынужденном комбинационном рассеянии света [4]. Функции распределения электронов в дискретном и непрерывном спектре во многом аналогичны. Приведем коэффициенты разложения в ряд по производным, полученные путем решения кинетических уравнений баланса для заселенностей электронных состояний атомов в одноквантовом приближении [1]:

$$\beta_n^i = \sum_{m=i+1}^n \frac{e_{\lambda\nu} (E_m/T_e)}{g_m V(m, m-1)} \sum_{k=i}^{m-1} g_k \exp(-E_k/T_e) \beta_k^i.$$

Видно, что в случае дискретного спектра операция интегрирования заменяется на суммирование, коэффициент диффузии D на константу скорости перехода с уровня m на $m-1$, а функция g на больцмановский фактор $g_n \exp(-E_n/T_e)$. Так же, как и в случае дискретного спектра [1-4], здесь существенно используется нормировочное соотношение для функции распределения

$$(5) \quad \int g u dv = \int_0^{\infty} g u(v, 0) dv.$$

Подставляя в левую часть КФР n -го порядка, получим обыкновенное дифференциальное уравнение того же порядка по времени для нахождения временной зависимости параметра u_0 . Верхний и нижний пределы интегрирования в левой части (5) могут быть функциями параметра u_0 или его производных. Поэтому при построении каждой конкретной КФР необходимо решать свое дифференциальное уравнение для определения зависимости параметра u_0 от времени с условиями $d^{(n)}u_0/dt^n|_{t \rightarrow \infty} = 0$, $n \neq 0$.

Проиллюстрируем выбор u_0 на примере обыкновенного уравнения теплопроводности ($g = 1$, $D = D_0$, $u(v, 0) = A \delta(v)$). Подставляя КФР первого порядка в левую часть (5) и учитывая, что u_0 является монотонно убывающей функцией времени, после интегрирования по области изменения v , где $u > 0$, получим следующее уравнение для параметра:

$$\frac{2}{3} u_0 \left(-\frac{2D_0 u_0}{du_0/dt} \right)^{1/2} = A,$$

решение которого отличается от точного выражения для u_0 заменой $\sqrt{\pi}$ на $4/3$.

Весьма эффективен метод КФР и при исследовании кинетических уравнений с источниками. Рассмотрим, например, уравнение

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 D \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{mv}{T} f \right) \right] + q, \quad 4\pi \int_0^{\infty} \bar{q} v^2 dv = \frac{dN_{\epsilon}}{dt},$$

где q — плотность распределения источников; N_e — концентрация электронов. На основе (6) могут быть описаны, например, процессы воздействия лазерного излучения на газ, процессы формирования электрических разрядов, квазистационарная функция распределения в разряде с плазменным катодом.

Предположим, что плотность нейтральных частиц достаточно высока и основными процессами, формирующими функцию распределения электронов по энергиям, являются упругие столкновения электронов с тяжелыми частицами. При этом коэффициент «диффузии» имеет вид [5]

$$D = d_0 v, \quad d_0 = N_a \sigma T / M,$$

где N_a — концентрация тяжелых частиц; T — температура газа; M — масса тяжелой частицы; σ — транспортное сечение столкновения электрона с частицей газа.

Ограничимся рассмотрением случая, когда в области разряда рождаются электроны определенной энергии, т. е. $q = \frac{Q}{4\pi v_0^2} \delta(v - v_0)$, $Q =$

$= \frac{dN_e}{dt} = \text{const}$, $\frac{1}{2} m v_0^2 \gg T$. Интегрируя дважды по v правую и левую части (6), находим КФР первого порядка

$$f/f_0 = u = u_0 + \beta_1 du_0/dt - \gamma Q, \quad f_0 = (\alpha/\pi)^{3/2} \exp(-\alpha v^2), \quad \alpha = m/2T,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^v \frac{\varphi dv'}{v'^2 D f_0}, \quad \varphi = 4\pi \int_0^v f_0 v'^2 dv' \leq 1, \quad \gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'^2 f_0 D}.$$

Для положительного источника электронов $du_0/dt > 0$, поэтому u на отрезке $0 \leq v \leq v_0$ является возрастающей функцией v и убывающей на отрезке от v_0 до некоторого граничного значения v_m , при котором плотность распределения обращается в нуль. Граничное значение скорости v_m монотонно растет со временем от v_0 до бесконечности. Закон изменения во времени u_0 и v_m находится из решения системы двух уравнений

$$(7) \quad \begin{aligned} u_0 + \beta_1(v_m) du_0/dt - \gamma(v_m) Q &= 0, \\ 4\pi \int_0^{v_m} f_0 \left(u_0 - \beta_1 \frac{du_0}{dt} - \gamma Q \right) v^2 dv &= N_e. \end{aligned}$$

Анализ системы уравнений (7) позволяет заключить, что при условии

$$\frac{Q}{\alpha^{1/2} \alpha_0} \ll N_e \ll \frac{\sqrt{\pi} Q \exp(\alpha v_m^2)}{8 \alpha^{5/2} \alpha_0 v_m^4}$$

и для моментов времени, начиная с которых, $\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^4 \ll \exp[\alpha(v_m^2 - v_0^2)]$, имеют место формулы

$$u_0 = N_e, \quad du_0/dt = Q.$$

Таким образом, квазистационарную функцию распределения в данном случае можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых есть максвелловское распределение с переменной плотностью электронов N_e , а второе представляет собой некоторое стационарное искажение функции распределения, вызванное источником. Заметим, что аналогичное предположение о характере квазистационарной функции распределения ранее использовалось в работах [6, 7] для анализа вращательной и колебательной релаксации молекул.

Методика решения многомерных уравнений Фоккера — Планка аналогична. Здесь необходимо строить обратный оператор \hat{H}^{-1} . Решение задачи в этом случае с учетом пространственной неоднородности может быть представлено в виде ряда по степеням оператора

$$\hat{E} = \hat{H}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial r_i} \right).$$

Выше внимание было уделено принципиальным основам метода. Для распределения электронов в плазме, согласно предложенной схеме, может быть построена КФР любого порядка и определены границы ее применимости. Тем самым открываются возможности решения ряда прикладных задач, весьма сложных для обычного анализа.

Поступила 30. IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк С. А., Шелепин Л. А. О функции распределения заселенностей атомных уровней в плазме. — ПМТФ, 1972, № 4.
2. Решетняк С. А., Шелепин Л. А. Функции распределения вращательной энергии и лазеры на вращательных переходах. — ЖПС, 1974, т. 21, вып. 1.
3. Решетняк С. А., Шелепин Л. А. К кинетике образования многозарядных ионов. — «Квант. электроника», 1974, т. 1, № 8.
4. Решетняк С. А., Шелепин Л. А. О квазиравновесном распределении интенсивностей компонент ВКР. — «Квант. электроника», 1975, т. 2, № 10.
5. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. — «Усп. физ. наук», 1960, т. 70, вып. 2.
6. Гордиец Б. Ф., Решетняк С. А., Шелепин Л. А. О механизмах генерации молекулярных лазеров в далекой инфракрасной области спектра. — «Квант. электроника», 1974, № 3.
7. Осипов А. И., Ступоченко Е. В. Неравновесные распределения энергии по колебательным степеням свободы в газах. — «Усп. физ. наук», 1963, т. 79, вып. 1.

УДК 533.70; 539.196.2

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ ФОККЕР-ПЛАНКОВСКОГО ТИПА

М. Н. Сафарян

(Москва)

Использование для описания кинетики неравновесных процессов в газе уравнения фоккер-планковского типа становится весьма распространенным. При применении этого уравнения к системам со значительными градиентами функции распределения и моментов перехода требуется дополнительная оценка условий аппроксимации линейного интегро-дифференциального уравнения уравнением фоккер-планковского типа. Вопрос о замене соответствующего интегрального оператора дифференциальным рассматривался во многих работах (см., например, [1]), при этом конечное разложение выполнялось для самой функции распределения и оценка по порядку величины членов, следующих за фоккер-планковскими, соответствовала оценке величины последующих моментов перехода. Для сильнонеравновесных процессов и моментов времени $t < \tau_r$ (τ_r — характерное время релаксации) в оценку условий аппроксимации должен входить учет и степени отклонения от равновесия.