ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ КАНАЛА С МАЛОЙ ГЛУБИНОЙ ВОДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ХОРОШО ПРОНИЦАЕМОГО СЛОЯ НА КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЕ И С УЧЕТОМ ИНФИЛЬТРАЦИИ

В. А. Барон

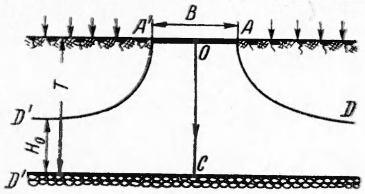
(Ташкент)

Рассмотрим фильтрацию из канала с малой глубиной воды. Так как уровень воды в канале мал, то можно считать, что фильтрация из канала происходит только через его дно, которое принимаем за горизонтальный отрезок длиной B.

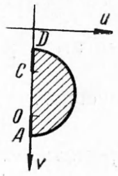
Пусть на глубине T находится сильно проницаемый слой с напорными водами, пьезометрический уровень которых равен H_0, считая от уровня раздела плохо проницаемого и хорошо проницаемого грунтов, а на поверхности происходит инфильтрация с постоянной интенсивностью $\varepsilon = \mathrm{const}$.

Движение рассматриваем установившееся в вертикальной плоскости xy, совпадающей с поперечным сечением канала (фиг. 1).

В силу полной симметричности области движения относительно оси y можно рассматривать только половину области движения, считая OC непроницаемой стенкой.



Фиг. 1



Фиг. 2

Построим область годографа скорости $w = u + iv$ (фиг. 2) для области движения z и отобразим конформно область движения и область $\bar{w}$ — область, сопряженная области годографа скорости, на нижнюю полуплоскость ζ. Граничные условия нашей области движения z будут следующие:

$$\begin{array}{lll} \varphi = ky, \quad \psi = -\frac{1}{2}Q - \varepsilon\left(x - \frac{1}{2}B\right) & \text{на } AD & \\ \varphi = k(T - H_0) & \text{на } DC & \\ \psi = 0 & \text{на } OC & \qquad (1) \\ \varphi = 0 & \text{на } AO & \end{array}$$

Здесь k — коэффициент фильтрации плохо проницаемого верхнего слоя грунта, Q— расход канала на фильтрацию, $\omega = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал движения, z — комплексная координата плоскости xy.

Задачу эту будем решать методом линейных дифференциальных уравнений, который применяется в теории фильтрации, т. е. будем искать функции $F = d\omega / d\zeta$ и $Z = dz / d\zeta$, представляющие собою линейные комбинации решений u и v линейного дифференциального уравнения

$$y'' + \sum_1^{\nu} \frac{1-(\alpha_k' + \alpha_k'')}{\zeta - a_k} y' + \left\{\sum_1^{\nu} \frac{\alpha_k'\alpha_k''(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_\nu)}{\zeta - a_k} + \right.$$
$$\left. + \alpha_{\nu+1}'\alpha_{\nu+1}''\zeta^{\nu-2} + B_1\zeta^{\nu-3} + \ldots + B_{\nu-2}\right\} y \left[\prod_1^{\nu}(\zeta - a_k)\right]^{-1} = 0 \qquad (2)$$

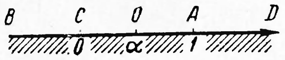
где $a_1, \ldots, a_{\nu+1}$ (причем $a_{\nu+1} = \infty$) — регулярные особые точки области движения z с показателями соответственно α_1' и α_1'', α_2' и α_2'', ..., $\alpha_{\nu+1}'$ и $\alpha_{\nu+1}''$.

Следовательно, для построения дифференциального уравнения и нахождения функций z и F необходимо выявить все особые точки дифференциального уравнения (1), которые оказываются регулярными, и определить для них показатели α_k' и α_k'' $(k = 1, \ldots, n)$.

В рассматриваемом случае $a_1 = 0$, $a_2 = \alpha$, $a_3 = 1$, $a_4 = \infty$. Значения показателей около особых точек приводятся в таблице

Особые точки	C	O	A	D
$\alpha' =$	$-1/2$	$-1/2$	0	1
$\alpha'' =$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$

Дифференциальное уравнение, соответствующее этим особым точкам и показателям около них, упрощается, так как точки $a_1=0$ и $a_2=\alpha$ — устранимые особые точки; приведем его решение в виде символа Римана



Фиг. 3

$$y=P\begin{Bmatrix} 0 & \alpha & 1 & \infty & \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & \zeta \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 3/2 & \end{Bmatrix}=\frac{Y}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}}$$

$$Y=P\begin{Bmatrix} 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \zeta \\ -1/2 & 1/2 & \end{Bmatrix}$$

Дифференпиальное уравнение, соответствующее решению Y, имеет вид

$$Y''+\frac{3}{2}\frac{Y'}{\zeta-1}=0 \tag{4}$$

Подстановкой $z=\ln(\zeta-1)$ оно приводится к виду

$$Y^{\circ\prime\prime}+\frac{1}{2}Y^{\circ\prime}=0 \qquad (Y^\circ=Y^\circ(z)=Y(\zeta)) \tag{5}$$

Решениями этого уравнения являются функции

$$Y_1^\circ=\mathrm{const},\quad Y_2^\circ=\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\quad \text{или}\quad Y_1=\mathrm{const},\quad Y_2=\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\zeta-1}} \tag{6}$$

Можно принять, что $u=y_1$, а $v=y_2$, тогда, учитывая равенство (3), получим

$$u=\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}},\qquad v=\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-\alpha)}} \tag{7}$$

В силу того что $F=\alpha u+\beta v, Z=\gamma u+\delta v$, где α, β, γ, δ — некоторые постоянные, подлежащие определению, функции F и Z получаем в виде

$$F=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-\alpha)}},\qquad Z=\frac{\gamma+\delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-\alpha)}} \tag{8}$$

Для определения постоянных α, β, γ, δ составим отношение

$$\frac{F}{Z}=\frac{d\omega}{dz}=u-iv\quad \text{или}\quad \frac{F}{Z}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\zeta-1}}{\gamma+\delta\sqrt{\zeta-1}} \tag{9}$$

Так как $\overline{w}=+ik$ при $\zeta=1$ и $\overline{w}=+i\varepsilon$ при $\zeta=\infty$, то из (8) следует, что $\alpha=-ik\gamma$, а $\beta=-i\varepsilon\delta$. Следовательно,

$$F=i\frac{k\gamma+\varepsilon\delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}},\qquad Z=\frac{\gamma+\delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}} \tag{10}$$

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{array}{rrl} \mathrm{Im}\,(iF-kZ)=0, & \mathrm{Im}\,(F+i\varepsilon Z)=0 & \text{на } AD \\ \mathrm{Im}\,iF=0, & \mathrm{Im}\,Z=0 & \text{на } DC \\ \mathrm{Im}\,F=0, & \mathrm{Im}\,iZ=0 & \text{на } OC \\ \mathrm{Im}\,iF=0, & \mathrm{Im}\,Z=0 & \text{на } OA \end{array} \tag{11}$$

на участке CO, где $0\leqslant\zeta\leqslant\alpha$, $\mathrm{Im}\,F=0$, $\mathrm{Im}\,Z=0$, имеем

$$F=-\frac{ik\gamma-\varepsilon\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}},\qquad Z=\frac{\gamma+i\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} \tag{12}$$

Из граничных условий (11) следует, что γ — чисто мнимое число, т. е. $\gamma=i\varkappa$ где $\varkappa$ — вещественно е число. Следовательно, на участке CO функции F и Z буду иметь вид

$$F=\frac{k\varkappa+\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}},\qquad Z=i\frac{\varkappa+\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} \tag{13}$$

Выражения функций F и Z для остальных границ области движения имеют вид
для участка OA $(\alpha \leqslant \zeta \leqslant 1)$

$$F = i\,\frac{k\varkappa + \varepsilon\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(1-\zeta)}}, \qquad Z = -\frac{\varkappa + \delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(1-\zeta)}} \tag{14}$$

для участка AD $(1 \leqslant \zeta < \infty)$

$$F = -\frac{k\varkappa - i\varepsilon\delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}}, \qquad Z = -\frac{i\varkappa + \delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}} \tag{15}$$

для участка DC $(-\infty < \zeta \leqslant 0)$

$$F = -\frac{k\varkappa + \varepsilon\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{-\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}}, \qquad Z = \frac{\varkappa + \delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{-\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} \tag{16}$$

Учитывая граничные условия (1), имеем
на участке CO $(0 \leqslant \zeta \leqslant \alpha)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{k\varkappa + \varepsilon\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\zeta} = \frac{\varkappa + \delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} \tag{17}$$

на участке OA $(\alpha \leqslant \zeta \leqslant 1)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \frac{k\varkappa + \varepsilon\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(1-\zeta)}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial\zeta} = -\frac{\varkappa + \delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(1-\zeta)}} \tag{18}$$

на участке AD $(1 \leqslant \zeta < \infty)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + i\,\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \frac{-k\varkappa + i\varepsilon\delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial\zeta} + i\,\frac{\partial y}{\partial\zeta} = -\frac{i\varkappa + \delta\sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}} \tag{19}$$

на участке DC $(-\infty < \zeta \leqslant 0)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = -\frac{k\varkappa + \varepsilon\delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{-\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial\zeta} = \frac{\varkappa + \delta\sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{-\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} \tag{20}$$

Для определения постоянных γ и δ рассмотрим участок CO. Из (17) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - \varepsilon\,\frac{\partial y}{\partial\zeta} = \frac{(k-\varepsilon)\varkappa}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} \tag{21}$$

Проинтегрируем это уравнение от 0 до ζ

$$\varphi - \varepsilon y = \int_0^\zeta \frac{(k-\varepsilon)\varkappa}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}}\,d\zeta + C \tag{22}$$

так как

$$\varphi = k(T - H_0), \quad y = T \quad \text{при } \zeta = 0; \qquad \varphi = 0, \quad y = 0 \quad \text{при } \zeta = \alpha$$

то

$$k(T - H_0) - \varepsilon T = (k-\varepsilon)\varkappa \int_0^0 \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} + C \tag{23}$$

$$0 = \varkappa(k-\varepsilon)\int_0^\alpha \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)(1-\zeta)}} + C \tag{24}$$

Отсюда

$$\varkappa = -\frac{T(k-\varepsilon) - kH_0}{2(k-\varepsilon)K(\sqrt{\alpha})} \tag{25}$$

где $K(\sqrt{\alpha})$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле $\sqrt{\alpha}$.
Для определения δ из (17) составляем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - k\,\frac{\partial y}{\partial\zeta} = \frac{(\varepsilon - k)\delta}{\sqrt{\zeta(\alpha-\zeta)}} \tag{26}$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\varphi - ky = 2\delta(\varepsilon - k) \arcsin \sqrt{\frac{\zeta}{\alpha}} + C \tag{27}$$

Используя граничные условия (23), находим, что $C = -kH_0$ и

$$\delta = \frac{kH_0}{\pi(\varepsilon - k)} \tag{28}$$

Определим потери канала на фильтрацию Q. Для этого рассмотрим участок OA, где $\alpha \leqslant \zeta \leqslant 1$. Из уравнений (18) следует, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial\zeta} = -\frac{(\varepsilon - k)\varkappa}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(1-\zeta)}} \tag{29}$$

Интегрируя, получим

$$\psi + \varepsilon x \int_\alpha^\zeta \frac{(k-\varepsilon)\varkappa}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(1-\zeta)}} \tag{30}$$

Так как $\psi = -{}^1/_2 Q$ и $x = {}^1/_2 B$ при $\zeta = 1$, то

$$\frac{\varepsilon b - Q}{2} = 2\varkappa(k-\varepsilon)K(\sqrt{1-\alpha}) = 2\varkappa(k-\varepsilon)K'(\sqrt{a}) \tag{31}$$

Отсюда

$$\varkappa = \frac{\varepsilon B - Q}{4(k-\varepsilon)K'(\sqrt{\alpha})} \tag{32}$$

Сравнивая выражения (25) и (32) , найдем

$$Q = 2[k(T - H_0) - \varepsilon T]\frac{K'(\sqrt{\alpha})}{K(\sqrt{\alpha})} + \varepsilon B \tag{33}$$

Отсюда при $\varepsilon = 0$ получается результат С. Н. Нумерова [5] для фильтрации из канала без учета инфильтрации.

Для определения параметра α из уравнений (18) имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + k\frac{\partial x}{\partial\zeta} = \frac{(\varepsilon - k)\delta}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}} \tag{34}$$

Интегрируя, получим

$$\psi + kx = \delta(\varepsilon - k)\frac{1}{2}\ln\frac{2\zeta - \alpha + 2\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}}{2\zeta - \alpha - 2\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}} + C \tag{35}$$

Так как

$$\psi = 0, \quad x = 0 \quad \text{при } \zeta = \alpha; \qquad \psi = -{}^1/_2 Q, \quad x = {}^1/_2 B \quad \text{при } \zeta = 1 \tag{36}$$

то из уравнения (35) найдем

$$\delta = \frac{kB - Q}{2(\varepsilon - k)\ln[(1+\sqrt{1-\alpha})/(1-\sqrt{1-\alpha})]} \tag{37}$$

Сравнивая равенства (37) с (28) и учитывая выражение (33), получим уравнение для определения α

$$\frac{B}{2}(\varepsilon - k) + \frac{kH_0}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{1-\sqrt{1-\alpha}} + [k(H_0 - T) + \varepsilon T]\frac{K'(\sqrt{\alpha})}{K(\sqrt{\alpha})} = 0 \tag{38}$$

Это уравнение решается графически или подбором. В случае, когда Q можно считать известным, α определяется следующим образом.

Из (37) и (28) следует, что

$$\frac{kB - Q}{2} = \frac{kH_0}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha}}{1-\sqrt{1-\alpha}} \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{4e^\vartheta}{(e^\vartheta + 1)^2} \qquad \left(\vartheta = \frac{kB - Q}{2kH_0}\pi\right) \tag{39}$$

Чтобы вывести уравнение правой ветви кривой депрессии, разделим уравнения (19) на действительные и мнимые части

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\frac{\delta}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}}, \qquad \frac{dy}{d\zeta} = -\frac{\varkappa}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\alpha-\zeta)}} \tag{40}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = -\frac{k\varkappa}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)(\zeta-1)}}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = \frac{\varepsilon\delta}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}} \tag{41}$$

Интегрируя первое уравнение (41), получим

$$\varphi = -k\varkappa \int_1^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\alpha-\zeta)}} = -2k\varkappa F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta-\alpha}},\ \sqrt{\alpha}\right) \tag{42}$$

Так как $\varphi = ky$ на AD, то из уравнения (42) следует, учитывая (25), что

$$y = \frac{T(k-\varepsilon) - kH_0}{(k-\varepsilon)K(\lambda)} F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta-\alpha}},\ \lambda\right) \qquad (\lambda = \sqrt{\alpha}) \tag{43}$$

Обращая это равенство, имеем

$$\frac{\zeta-1}{\zeta-\alpha} = \mathrm{sn}^2(u, \lambda) \quad \text{или} \quad \zeta = \frac{1-\alpha\,\mathrm{sn}^2(u,\lambda)}{1-\mathrm{sn}^2(u,\lambda)} \tag{44}$$

$$\left(u = \frac{(k-\varepsilon)K(\lambda)}{T(k-\varepsilon)-kH_0}y\right)$$

Так как $\frac{dy}{d\zeta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\zeta}$, то, учитывая (37) и (38), имеем

$$-\frac{\varkappa}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\alpha-\zeta)}} = -\frac{dy}{dx}\frac{\delta}{\sqrt{\zeta(\zeta-\alpha)}} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\delta\sqrt{\zeta-1}}{\varkappa}$$

Интегрируя, получим

$$x = \int_0^y \frac{\delta}{\varkappa}\sqrt{\zeta-1}\,dy + \frac{B}{2}$$

или

$$x = \frac{2kH_0\sqrt{1-\alpha}\,K(\sqrt{\alpha})}{\pi[T(k-\varepsilon)-kH_0]}\int_0^y \frac{\mathrm{sn}(u,\lambda)}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u,\lambda)}}\,dy + \frac{B}{2}$$

и так как

$$\int \frac{\mathrm{sn}(u,\lambda)}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u,\lambda)}}\,dy = \int \frac{\mathrm{sn}(u,\lambda)}{\mathrm{cn}(u,\lambda)}\,dy =$$

$$= \frac{T(k-\varepsilon)-kH_0}{(k-\varepsilon)K(\lambda)}\int \frac{\mathrm{sn}(u,\lambda)}{\mathrm{cn}(u,\lambda)}\,du = \frac{T(k-\varepsilon)-kH_0}{(k-\varepsilon)\sqrt{1-\alpha}\,K(\sqrt{\alpha})}\ln\frac{\mathrm{dn}u + \sqrt{1-\alpha}}{(1+\sqrt{1-\alpha})\,\mathrm{cn}u}$$

то

$$x = \frac{2kH_0}{\pi(k-\varepsilon)}\ln\frac{\mathrm{dn}u + \sqrt{1-\alpha}}{(1+\sqrt{1-\alpha})\,\mathrm{cn}\,u} + \frac{B}{2} \tag{45}$$

Выражение (45) представляет собой уравнение правой ветви кривой депрессии, которое отличается от левой ветви только знаком.

Таким образом, из изложенного выше следует, что задача о фильтрации воды из канала полностью определяется выражениями (33), (38) и (45). Причем уравнение (45) значительно упрощается при модуле $\sqrt{\alpha}$, близком к нулю. В этом случае оно имеет вид

$$x \approx \frac{B}{2} - \frac{2kH_0}{\pi(k-\varepsilon)}\ln\cos\frac{(k-\varepsilon)\pi}{2[T(k-\varepsilon)-kH_0]}y \tag{46}$$

Поступила 18 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, М., 1952.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек). Изв. АН СССР, Сер. матем., 1939, № 3.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех). Изв. АН СССР, Сер. матем., 1939, № 5—6.
4. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Изд. 2-е, Гостехиздат, 1950.
5. Аравин В. И. и Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, М., 1953.
6. Нумеров С. Н. О фильтрации из каналов деривационных ГЭС и ирригационных систем. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1947, № 34.
7. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ОГИЗ, М., 1948.