

ТЕПЛОТДАЧА В КАНАЛАХ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ  
НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ

*В. И. Попов*

(Новосибирск)

Рассматривается случай квазиизотермической теплоотдачи при ламинарном движении неньютоновских сред со скольжением в круглых и плоских каналах. В основу расчета положено совместное решение уравнений энергии, движения и реологического соотношения со специфическими граничными условиями, учитывающими скачок скорости и температуры на поверхности теплообмена.

Эксперименты показывают, что пристенное скольжение в обычных условиях может наблюдаться у структурно-вязких [1, 2], вязко-упругих [3, 4], вязко-пластичных [5, 6] и т. п. сред. Движение со скольжением может наблюдаться также у обычных, ньютоновских жидкостей при их движении в очень тонких капиллярах [7]. Имеются сведения [8], что при движении крови в капиллярах и артериолах фактический секундный расход через капилляр может превышать расход, подсчитанный по формуле Пуазейля (без учета скольжения) в 2—4 раза.

Скачок скорости и температуры на поверхности теплообмена может возникнуть вследствие кристаллизации, структурирования полимерных цепей или наличия упругих волн, поглощающих некоторое количество движения и тепла, а также в результате отлипания жидкости от поверхности.

Уравнение для энергии установившегося непрерывного осесимметричного ламинарного потока при числах Пекле  $P > 10$  имеет вид

$$w \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Здесь  $w$  — скорость потока,  $t$  — температура потока,  $a$  — коэффициент теплопроводности.

Так как неньютоновские среды, проявляющие эффект пристенного скольжения, характеризуются значительными числами Прандтля  $\sigma = \nu a^{-1} \gg 1$  (динамические возмущения распространяются интенсивнее тепловых), то можно считать процесс теплообмена сосредоточенным в узкой пристенной области  $y = R - r$ , а тепловой пограничный слой жидкости — плоским.

Пренебрегая в выражении (1) величиной  $y$  по сравнению с радиусом трубы  $R$  и вводя для удобства безразмерные переменные

$$v \equiv \frac{t - t_0}{t_w - t_0}, \quad X \equiv \frac{x}{D}, \quad Y \equiv \frac{y}{D}, \quad P \equiv \frac{D \langle w \rangle}{a}, \quad \omega(Y) \equiv \frac{w}{\langle w \rangle}$$

уравнение (1) в тепловом пограничном слое представим в виде

$$P \omega(Y) \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \quad (2)$$

Здесь  $t_0$  — температура жидкости на границе теплового пограничного слоя, равная температуре жидкости на входе в канал, а  $\langle w \rangle$  — средняя скорость потока.

Уравнение (2) является приближенным для трубы, но точным для плоского канала.

Введя переменную

$$\eta = F(Y) X^{-1/3} \quad (3)$$

можно привести уравнение (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v'(\eta) [4/3 P\omega(Y) F(Y) X^{-1/3} + F''(Y) X^{-1/3}] + v''(\eta) [F'(Y)]^2 X^{-2/3} = 0 \quad (4)$$

Здесь  $F(Y) \sim P\omega(Y)$  — пока неопределенная функция координаты  $y$ .

В общем случае  $F(Y)$  находится из уравнения движения с использованием реологического соотношения для рассматриваемой жидкости.

Вязко-упругие жидкости, по-видимому, являются наиболее общим классом неньютоновских сред. Их реологическое поведение, в той или иной форме, должно отражать особенности движения, которые присущи структурно-вязким, вязко-пластичным и т. п. средам. Эффект пристенного скольжения у вязко-упругих сред проявляется весьма ощутимо, на что указывают прямые измерения проскальзывания расплава полимера у стенки, выполненные с использованием графитовых капилляров [9]. Известно также [10], что скорость скольжения вязко-упругих сред может составлять  $\sim 80\%$  сдвиговой скорости.

Рассмотрим вид функции  $\omega(Y)$  в случае, когда вязко-упругие свойства среды определены соотношениями [11]

$$\pm w' [\tau + f(\tau)]^{-1} \equiv \varphi = \varphi_0 + \theta [\tau + f(\tau)] \quad (5)$$

$$f(\tau) \equiv p_{xx} - p_{rr} = -\gamma_e \tau_* \ln(1 - \tau/\tau_*) \quad (6)$$

Здесь  $w' \equiv dw/dn$  — градиент скорости по направлению  $n$ ;  $\tau$  — напряжение сдвига;  $\theta$  — коэффициент неустойчивости эластичной структуры;  $\varphi_0$  — текучесть при  $\tau \rightarrow 0$ ;  $\gamma_e$  — безразмерный коэффициент, являющийся мерой возникновения первой разности нормальных напряжений;  $\tau_*$  — критическое значение касательного напряжения сдвига (напряжение насыщения).

При  $\gamma_e = 0$  имеет место структурно-вязкий режим движения, а при  $\theta = 0$  — движение с постоянной вязкостью.

Распределение касательных напряжений по сечению вязко-упругого потока в трубе, в предположении  $p_{rr} - p_{\varphi\varphi} \approx 0$ , определяется из условия равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x} (-p + p_{xx}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau), \quad \frac{\partial}{\partial r} (-p + p_{rr}) = 0 \quad (7)$$

Система уравнения (7) легко сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} [-p(0, x) + p_{xx} - p_{rr}] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau)$$

Здесь  $p(0, x)$  — давление на оси канала.

Из этого уравнения видно, что профиль касательных напряжений по сечению вязко-упругого потока линейный.

Для трубы

$$\tau = \tau_w \xi \quad (\xi = r/R) \quad (8)$$

где  $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке.

Запишем выражение для средней скорости потока в трубе в виде

$$1 = - \int_0^1 \xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} d\xi \quad \left( \omega = \frac{w}{\langle w \rangle} \right) \quad (9)$$

Тогда с учетом (5) и (9) выражение для безразмерной скорости можно записать

$$\omega(\xi) = \left( \int_{\xi}^1 \psi T^* d\xi + 2\zeta_S D^{-1} \right) \left( \int_0^1 \xi^2 \psi T^* d\xi + 2\zeta_S D^{-1} \right)^{-1} \quad (10)$$

Здесь

$$T^* \equiv \xi [1 - \gamma_e (\Omega \xi)^{-1} \ln(1 - \Omega \xi)] [1 - \gamma_e \Omega^{-1} \ln(1 - \Omega)]^{-1}$$

$$\psi \equiv \frac{\Phi}{\Phi_w}, \quad \Omega \equiv \frac{\tau_w}{\tau_*} \ll 1$$

а  $\Phi_w$  — текучесть жидкости вблизи стенки.

В выражении (10) использовано граничное условие, допускающее скольжение на стенке [12], в виде

$$w_S = \zeta_S \left( \frac{dw}{d\xi} \right)_{\xi=1}$$

где  $w_S$  — скорость скольжения,  $\zeta_S$  — коэффициент скольжения.

Член  $2\zeta_S D^{-1}$ , учитывающий влияние скольжения, можно рассматривать как поправку к решению для непрерывного движения.

Подставляя в (10) соответствующие выражения из (5), (6), (8) и ограничиваясь малыми значениями параметра  $\Omega$ , получим для круглой трубы

$$\omega(\xi) = 2 [1 - \xi^2 + 2/3 \varepsilon (1 - \xi^3) + 4\zeta_S D^{-1}] [1 + 0.8\varepsilon + 8\zeta_S D^{-1}]^{-1},$$

$$\varepsilon = \frac{\theta \tau_*}{\Phi_0} \Omega (1 + \gamma_e) \quad (11)$$

для плоского канала

$$\omega(\xi) = 1.5 [1 - \xi^2 + 2/3 \varepsilon (1 - \xi^3) + 4\zeta_S D^{-1}] [1 + 0.75\varepsilon + 6\zeta_S D^{-1}]^{-1} \quad (12)$$

Так как в тепловом пограничном слое  $\xi = 1 - y/R$ ,  $y \ll R$ , то в выражениях (11) и (12) квадратичными членами можно пренебречь.

Тогда для круглой трубы имеем

$$\omega(Y) = (8Y(1 + \varepsilon) + 8\zeta_S D^{-1}) [1 + 0.8\varepsilon + 8\zeta_S D^{-1}]^{-1} \quad (13)$$

Следовательно

$$\frac{w_S}{\langle w \rangle} = \left( 1 + \frac{0.8\varepsilon D}{8\zeta_S} + \frac{D}{8\zeta_S} \right)^{-1}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае скорость скольжения составляет малую долю средней скорости, если

$$0.125D(1 + 0.8\varepsilon) \gg \zeta_S$$

В соответствии с (13)  $F(Y)$  удобно определить как

$$F(Y) = (Pm)^{1/3} (Y + S), \quad m = (1 + 0.8\varepsilon n^{-1} + 8S)^{-1}, \quad S = \zeta_S / Dn, \\ n = 1 + \varepsilon \quad (14)$$

Получим решение для случая  $t_w = \text{const.}$  Подставляя (13) и (14) в (4), найдем

$$v''(\eta) + \frac{8}{9}\eta^2 v'(\eta) = 0 \quad (15)$$

Граничные условия для (15) имеют вид

$$\begin{aligned} \eta = S(Pm/X)^{1/3} \equiv Z, \quad v = v_S \quad \text{при } Y \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad v = 1 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Первое граничное условие допускает скачок между температурой стенки и температурой вязко-упругой среды на поверхности стенки. Выражение для скачка температуры можно записать в виде, аналогичном условию скольжения для скорости

$$v_S = \frac{\varepsilon_T}{\delta} \frac{\partial v}{\partial Y} \Big|_{Y=0} \quad (16)$$

Здесь  $\varepsilon_T \equiv \lambda/\alpha_S$  — величина температурного скачка. Решением (15) является

$$v = \left[ \int_z^\eta \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta + v_S \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right] \left[ \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right]^{-1} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), имеем

$$v_S = L \left[ L + \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right]^{-1}, \quad L \equiv \varepsilon_T D^{-1} \left(\frac{Pm}{X}\right)^{1/3} \exp\left(-\frac{8}{9}Z^3\right) \quad (18)$$

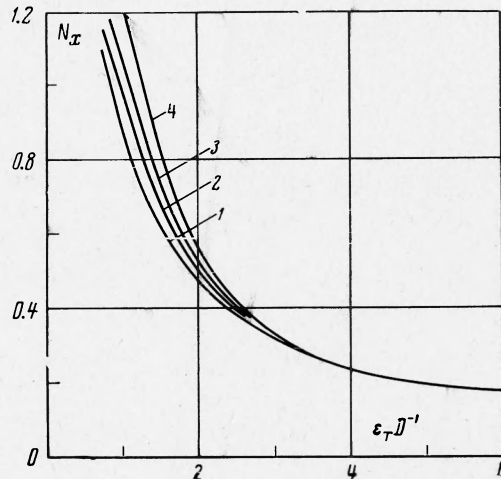
Выражение (18) можно преобразовать к виду

$$v_S = \left[ 1 + \left[ \nu c \gamma \exp\left(-\frac{8}{9}Z^3\right) \right]^{-1} \alpha_S \int_z^\infty \exp\left(-\frac{8}{9}\eta^3\right) d\eta \right]^{-1}$$

из которого видно, что при очень больших числах Прандтля с температурный скачок будет незначительной частью перепада температуры  $t_w - t_0$  и его можно не учитывать. В (18)  $\nu$ ,  $c$  и  $\gamma$  — соответственно кинематическая вязкость, теплоемкость и удельный вес жидкости.

Локальное значение критерия Нуссельта равно

$$N_x = \frac{\partial v}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \left\{ \frac{\varepsilon_T}{D} + \frac{1 - \Gamma(1/3, Z^3) / \Gamma(1/3)}{1.077 (Pm/X)^{1/3} \exp(-8/9 Z^3)} \right\}^{-1} \quad (19)$$



На фигуре приведены результаты расчетов по этой формуле для случая  $PmX^{-1} = 10$  (кривые 1—4 соответствуют значениям  $S = 0, 0.2, 0.6, 0.8$ ). Видно, что скольжение может оказывать заметное влияние на теплоотдачу лишь в области малых значений  $\varepsilon_T D^{-1}$ , т. е. когда число Прандтля очень велико.

Для случая  $t_w = \text{const}$  толщина теплового пограничного слоя имеет вид

$$\delta_T = \varepsilon_T + 0.925 \left[ 1 - \frac{\Gamma(1/3, Z^3)}{\Gamma(1/3)} \right] \left[ \left( \frac{Pm}{xD^2} \right)^{1/3} \exp \left( -\frac{8}{9} Z^3 \right) \right]^{-1} \quad (20)$$

Видно, что граничное условие на стенке существенно влияет на толщину теплового пограничного слоя.

Получим решение для случая  $q_w = \text{const}$ . Продифференцировав уравнение (2) по  $Y$  и введя отношение плотностей теплового потока по формуле

$$q = \frac{\partial t}{\partial Y} \left( \frac{\partial t}{\partial Y} \right)_{Y=0}^{-1}$$

имеем

$$8Pm \frac{\partial q}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{Y+S} \frac{\partial q}{\partial Y} \right) \quad (21)$$

Введением переменной (3) выражение (21) преобразуется к виду

$$q''(\eta) + \frac{8\eta^3 - 3}{3\eta} q'(\eta) = 0$$

решение которого при граничных условиях

$$Y \rightarrow 0, \quad \eta = Z, \quad q = 1; \quad Y \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad q = 0$$

имеет вид

$$q = \int_{\eta}^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \left[ \int_Z^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \right]^{-1}$$

Следовательно

$$\theta^* = \left( \frac{X}{mP} \right)^{1/3} \left[ \int_Z^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \right]^{-1} \left[ \eta \int_{\eta}^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta - \frac{3}{8} \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) \right] + C$$

Здесь  $\theta^* \equiv \lambda(t - t_0) / q_w D$  — безразмерная температура.

Постоянная интегрирования находится из условия (16). После вычислений найдем

$$\theta^* = \left( \frac{X}{mP} \right)^{1/3} \left[ \int_Z^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta \right]^{-1} \left[ \eta \int_{\eta}^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta - \frac{3}{8} \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) + \left( \frac{\varepsilon_T}{D} - S \right) \int_Z^{\infty} \eta \exp \left( -\frac{8}{9} \eta^3 \right) d\eta + \frac{3}{8} \exp \left( -\frac{8}{9} Z^3 \right) \right] \quad (22)$$

Определяя местное значение критерия Нуссельта

$$N_x = \frac{q_w D}{(t_w - t_0) \lambda}$$

из (22) получим

$$N_x = \left\{ \frac{\varepsilon_T}{D} - S + \frac{\exp(-8/9 Z^3)}{1.29 (mP/X)^{1/3} [1 - \Gamma(2/3, Z^3) / \Gamma(2/3)]} \right\}^{-1} \quad (23)$$

