

УДК 532.5.013.4

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АКУСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГИПЕРЗВУКОВОГО УДАРНОГО СЛОЯ НА ПОРИСТОЙ СТЕНКЕ

А. В. Федоров, Д. В. Юмашев

Московский физико-технический институт, 140180 Жуковский  
E-mail: fedorov@falt.ru

Исследуется возможность управления ламинарно-турбулентным переходом в гиперзвуковых ударных слоях с помощью пористых покрытий. Проведен анализ линейной устойчивости ударного слоя относительно акустических возмущений. Выводится дисперсионное соотношение в аналитическом виде, которое анализируется при различных характерных значениях пористости стенки, что позволяет исследовать спектр акустических возмущений в ударном слое. Аналитические выражения для инкремента неустойчивости акустических возмущений представляются в зависимости от коэффициента отражения. Их структура свидетельствует о том, что пористое покрытие эффективно снижает акустическую неустойчивость ударного слоя.

**Ключевые слова:** ламинарно-турбулентный переход, гиперзвуковой ударный слой, акустические возмущения, устойчивость.

**Введение.** Работа посвящена теоретическому исследованию возможности управления ламинарно-турбулентным переходом в гиперзвуковых ударных слоях с помощью пористых покрытий. При низком уровне возмущений в набегающем потоке, а также при относительно малой шероховатости поверхности ламинарно-турбулентный переход обусловлен усилением неустойчивых мод, развивающихся в пограничном слое на поверхности аппарата [1]. В сверхзвуковых пограничных слоях доминируют неустойчивые моды двух типов. Первая мода (волны Толлмина — Шлихтинга) имеет вязкую природу и может быть подавлена благодаря естественному охлаждению поверхности аппарата с теплозащитным покрытием [2]. Вторая мода (ее также называют акустической) возникает в сверхзвуковых пограничных слоях, где скорость основного потока превышает фазовую скорость возмущений. В настоящее время возможность стабилизации акустической моды связывают с использованием пористых материалов, которыми покрывается поверхность аппарата [3, 4]. Экспериментальные исследования [5] показали, что пористое покрытие позволяет существенно затянуть переход на остром конусе. Результаты экспериментальных исследований устойчивости пограничного слоя на конусе, покрытом пористым материалом с хаотической [6, 7] и регулярной [8] микроструктурами, подтвердили теорию [3, 4].

При гиперзвуковых скоростях полета и/или значительных углах атаки головной скачок уплотнения прижимается близко к поверхности аппарата, образуя тонкий ударный слой (рис. 1). Этот слой в главном приближении локально параллелен, поскольку угол наклона скачка к обтекаемой поверхности мал. Задача устойчивости плоскопараллельного ударного слоя относительно невязких двумерных возмущений численно исследовалась в [9, 10]. В [11, 12] асимптотическими методами рассмотрена коротковолновая часть спектра. В этих работах показано, что ударный слой является волноводом, в котором распространяются акустические возмущения. Поперек ударного слоя возникает несколько физически различных областей в зависимости от параметров основного течения и фазовой скорости возмущений. Наиболее интересный случай соответствует значениям фазовой

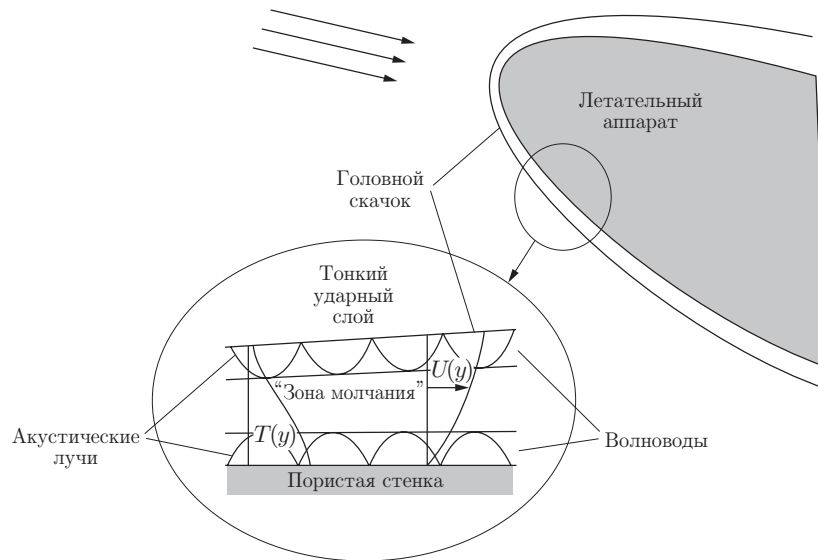


Рис. 1. Схема распространения акустических возмущений в гиперзвуковом ударном слое

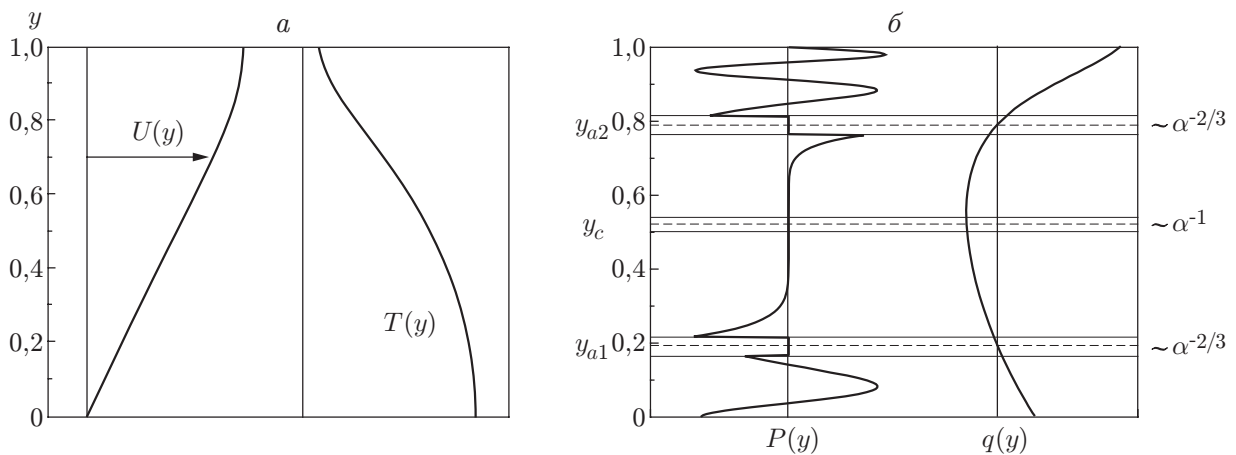


Рис. 2. Профили скорости и температуры основного течения (а) и амплитуды возмущения давления  $P(y)$  и функции  $q(y)$  (б) при реализации двухволноводного режима в гиперзвуковом ударном слое

скорости, при которых ударный слой содержит два волновода, разделенных слабопроницаемым для акустики коридором — “зоной молчания” (см. рис. 1). Собственные колебания, разделенные “зоной молчания”, могут синхронизоваться, что приводит к конвективной неустойчивости акустических мод. Данные результаты получены для случая сплошной поверхности аппарата, непроницаемой для возмущений потока.

На основании выводов работ по устойчивости пограничного слоя [3, 4] естественно предположить, что пористое покрытие, обеспечивающее комплексный коэффициент отражения возмущений  $|\tau| < 1$ , способно подавлять неустойчивые акустические возмущения и в ударном слое. Для подтверждения этой гипотезы в настоящей работе выполнен теоретический анализ влияния пористой стенки на устойчивость ударного слоя.

**Краевая задача для акустических возмущений.** Акустическая неустойчивость наиболее сильно проявляется в двумерном случае [12], поэтому ограничимся рассмотрени-

ем двумерного локально параллельного ударного слоя. Определим ортогональную систему координат  $x, y$ : ось  $x$  направлена вниз по потоку, ось  $y$  — поперек ударного слоя. Основное течение характеризуется профилями продольной компоненты скорости  $U(y)$  и температуры  $T(y)$  (рис. 2, а). Малое возмущение давления  $p(x, y, t)$  описывается уравнением

$$M^2 D^3 p - D \nabla \cdot (T \nabla p) + 2T \frac{dU}{dy} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0,$$

где  $D = \partial/\partial t + U(y) \partial/\partial x$ ;  $M = U_e/\sqrt{\gamma R T_e}$  — число Маха на верхней границе ударного слоя ( $y = 1 - 0$ ). Входящие в уравнение величины обезразмерены следующим образом: координаты отнесены к толщине ударного слоя  $\delta_e$ , скорость и температура — соответственно к значениям скорости  $U_e$  и температуры  $T_e$  на внешней границе ударного слоя, время отнесено к величине  $t_e = \delta_e/U_e$ .

Граничные условия:

$$v|_{y=0} = Ap|_{y=0}, \quad p|_{y=1} = 0.$$

Первое условие связывает вертикальную компоненту возмущения скорости с возмущением давления на пористой стенке. Коэффициент  $A$  является комплексной величиной, зависящей от свойств пористого материала и параметров акустических возмущений. Второе условие выводится из уравнений Гюгонио в предположении, что скачок уплотнения параллелен стенке.

Возмущение давления представляется в виде бегущей волны

$$p(x, y, t) = P(y) \exp[i(\alpha x - \omega t)] \exp(-\sigma x).$$

Амплитудная функция  $P(y)$  является решением краевой задачи

$$P'' + \left[ \frac{T'}{T} - \frac{2kU'}{kU - \omega} \right] P' + \left[ \frac{M^2(kU - \omega)^2}{T} - k^2 \right] P = 0, \quad (1)$$

$$P(1) = 0, \quad P'(0) = i\omega A \gamma M^2 P(0)/T(0).$$

Здесь  $\omega$  — частота, предполагаемая вещественной;  $k = \alpha + i\sigma$  — комплексное волновое число;  $\alpha$  — вещественная часть волнового числа;  $\sigma$  — декремент затухания ( $\sigma > 0$ ) или инкремент роста ( $\sigma < 0$ ); штрих обозначает производную по  $y$ . В случае сплошной стенки при  $A = 0$  задача (1) эквивалентна рассмотренной в [11, 12]. В результате решения задачи (1) получаются дисперсионные зависимости  $\alpha(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$ , характеризующие спектр собственных колебаний в ударном слое. С помощью асимптотических методов можно проанализировать особенности спектра, не прибегая к численному решению задачи (1).

**Коротковолновое приближение.** Рассмотрим коротковолновую часть спектра ( $\lambda = \alpha^{-1} \ll 1$ ), предполагая, что  $c = \omega/\alpha = O(1)$ ,  $\sigma = O(1)$ . Если фазовая скорость  $c < 1$ , то в ударном слое существует критическая точка  $y_c$ , в которой  $U(y_c) = c$ . В критическом слое с внутренней переменной  $Y = (y - y_c)/\lambda$  уравнение (1) имеет решение

$$P_{(0)}(Y) = H_1(1 - Y - iY_*) e^{Y+iY_*} + H_2(1 + Y + iY_*) e^{-Y-iY_*} + O(\lambda), \quad (2)$$

где  $Y_* = \sigma c/U'(y_c)$ ;  $H_1, H_2$  — постоянные. За пределами критического слоя функция  $P(y)$  представима в виде

$$P(y) = \left[ \frac{(1 + i\sigma\lambda)U - c}{\sqrt{T}} \right] u(y),$$

где  $u(y)$  — решение уравнения

$$\lambda^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + [q(y) + 2i\sigma\lambda g(y) + O(\lambda^2)]u = 0, \quad (3)$$

$$q(y) = M^2(U - c)^2/T - 1, \quad g(y) = M^2 U(U - c)/T - 1.$$

Функция  $u(y)$  аппроксимируется асимптотическим WKВ-разложением [13]

$$u(y) = \exp \{ [w_{(0)}(y) + \lambda w_{(1)}(y) + O(\lambda^2)] / \lambda \}, \quad (4)$$

в котором  $w_{(0)}(y)$  и  $w_{(1)}(y)$  — новые неизвестные функции. Подстановка (4) в (3) приводит к системе дифференциальных уравнений для  $w_{(0)}$  и  $w_{(1)}$ :

$$(w'_{(0)})^2 + q = 0, \quad w''_{(0)} + 2w'_{(0)}w'_{(1)} + 2i\sigma g = 0.$$

Качественное поведение собственной функции  $u(y)$  определяется знаком функции  $q(y)$  (см. рис. 2, б). В областях, где  $q > 0$ , собственная функция осциллирует. Такие области являются волноводами для акустических мод. В областях, где  $q < 0$ , собственная функция экспоненциально затухает. Границы между физически различными областями определяются точками поворота  $y_a$ , в которых  $q = 0$ . В этих точках выполняется соотношение  $U(y_a) = c \pm a(y_a)$ , где  $a(y) = \sqrt{T(y)}/M$  — местная скорость звука.

Для анализа устойчивости наиболее важен случай, когда ударный слой содержит два волновода [12]. Заметим, что критический слой расположен между точками поворота,  $0 < y_{a1} < y_c < y_{a2} < 1$ . Для типичных профилей основного течения выполняются неравенства  $q'(y_{a1}) < 0$ ,  $q'(y_{a2}) > 0$  (рис. 2, б). В малых окрестностях точек поворота (толщиной порядка  $\lambda^{2/3}$ ), называемых акустическими слоями, разложение (4) непригодно, что приводит к необходимости построения специального решения в этих областях.

**Дисперсионное соотношение.** Рассмотрим по порядку четыре основные области, в которых справедливы WKВ-разложения.

1. В области  $0 \leq y < y_{a1} - O(\lambda^{2/3})$  (нижний волновод)

$$w_{(0)}(y) = \pm i \int_0^y \sqrt{q(h)} dh, \quad w_{(1)}(y) = -\frac{1}{4} \ln q(y) \mp \sigma \int_0^y \frac{g(h)}{\sqrt{q(h)}} dh,$$

и решение уравнения (3) представимо в виде

$$u(y) = \frac{C_1}{q^{1/4}(y)} \cos \left( \frac{1}{\lambda} \int_0^y \sqrt{q(h)} dh + i\sigma \int_0^y \frac{g(h)}{\sqrt{q(h)}} dh + \varphi_1 \right) + O(\lambda), \quad (5)$$

где  $C_1, \varphi_1$  — постоянные. Это решение можно рассматривать как суперпозицию падающей и отраженной от стенки волн

$$P(y) = \hat{P}_1(y) \exp \left\{ -i \frac{1}{\lambda} \int_0^y \sqrt{q(h)} dh \right\} + \hat{P}_2(y) \exp \left\{ i \frac{1}{\lambda} \int_0^y \sqrt{q(h)} dh \right\}, \quad (6)$$

$$\hat{P}_{1,2}(y) = \text{const}_{1,2} \frac{(1 + i\sigma\lambda)U - c}{q^{1/4}\sqrt{T}} \exp \left\{ \pm \sigma \int_0^y \frac{g(h)}{\sqrt{q(h)}} dh \right\}.$$

На поверхности стенки определим амплитудный коэффициент отражения  $\tau = \hat{P}_2(0)/\hat{P}_1(0)$ , который в общем случае является комплексной величиной из круга  $|\tau| \leq 1$ ; для непроницаемой стенки  $\tau = 1$ . Подстановка (6) в краевое условие (1) на стенке дает в главном приближении

$$\hat{P}_2(0) - \hat{P}_1(0) = cA\gamma M^2 (\hat{P}_2(0) + \hat{P}_1(0)) / (T(0)\sqrt{q(0)}),$$

откуда следует связь между коэффициентом  $A$  и коэффициентом отражения  $\tau$

$$A = \frac{T(0)\sqrt{q(0)}}{\gamma M^2 c} \frac{\tau - 1}{\tau + 1}. \quad (7)$$

Граничное условие на стенке позволяет определить фазу  $\varphi_1$  в (5):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -icA\gamma M^2 / (T(0)\sqrt{q(0)}) + O(\lambda).$$

С учетом (7) получаем

$$\varphi_1 = -(i/2) \ln \tau + O(\lambda). \quad (8)$$

2. В области  $y_{a1} + O(\lambda^{2/3}) < y < y_c - O(\lambda)$  (нижняя часть “зоны молчания”)

$$w_{(0)}(y) = \pm \int_{y_{a1}}^y \sqrt{-q(h)} dh, \quad w_{(1)}(y) = -\frac{1}{4} \ln(-q(y)) \mp i\sigma \int_{y_{a1}}^y \frac{g(h)}{\sqrt{-q(h)}} dh,$$

и решение с точностью до  $O(\lambda)$  имеет вид

$$u(y) = \frac{1}{[-q(y)]^{1/4}} \sum_{n=1}^2 B_n \exp \left\{ (-1)^n \left( \frac{1}{\lambda} \int_{y_{a1}}^y \sqrt{-q(h)} dh + i\sigma \int_{y_{a1}}^y \frac{g(h)}{\sqrt{-q(h)}} dh \right) \right\}, \quad (9)$$

где  $B_{1,2}$  — постоянные.

3. В области  $y_c + O(\lambda) < y < y_{a2} - O(\lambda^{2/3})$  (верхняя часть “зоны молчания”) с точностью до  $O(\lambda)$  получается решение

$$u(y) = \frac{1}{[-q(y)]^{1/4}} \sum_{n=1}^2 D_n \exp \left\{ (-1)^n \left( \frac{1}{\lambda} \int_y^{y_{a2}} \sqrt{-q(h)} dh + i\sigma \int_y^{y_{a2}} \frac{g(h)}{\sqrt{-q(h)}} dh \right) \right\}, \quad (10)$$

где  $D_{1,2}$  — постоянные.

4. В области  $y_{a2} + O(\lambda^{2/3}) < y \leq 1$  (верхний волновод) решение имеет вид

$$u(y) = \frac{C_4}{q^{1/4}(y)} \cos \left( \frac{1}{\lambda} \int_y^1 \sqrt{q(h)} dh + i\sigma \int_y^1 \frac{g(h)}{\sqrt{q(h)}} dh + \varphi_4 \right) + O(\lambda), \quad (11)$$

где  $C_4$  — неизвестная постоянная; фаза  $\varphi_4$  определяется из граничного условия на скачке:

$$\varphi_4 = \pi/2 + O(\lambda). \quad (12)$$

В акустических слоях порядок функций  $w_{(0)}$  и  $\lambda w_{(1)}$  одинаков, и WKВ-разложение непригодно. В нижнем акустическом слое  $|y - y_{a1}| \leq O(\lambda^{2/3})$  с переменной

$$z = [-q'(y_{a1})]^{1/3} (y - y_{a1}) / \lambda^{2/3} - 2i\sigma \lambda^{1/3} g(y_{a1}) / [-q'(y_{a1})]^{2/3}$$

решение в главном приближении выражается через функции Эйри [14]:

$$u[z] = C_2 [\cos \varphi_2 \operatorname{Ai}(z) + \sin \varphi_2 \operatorname{Bi}(z)]. \quad (13)$$

Здесь  $u[z] \equiv u(y(z))$ ;  $C_2, \varphi_2$  — неизвестные постоянные. В верхнем акустическом слое  $|y - y_{a2}| \leq O(\lambda^{2/3})$  с переменной

$$z = [q'(y_{a2})]^{1/3} (y - y_{a2}) / \lambda^{2/3} - 2i\sigma \lambda^{1/3} g(y_{a2}) / [q'(y_{a2})]^{2/3}$$

справедливо решение

$$u[z] = C_3[\cos \varphi_3 \operatorname{Ai}(z) + \sin \varphi_3 \operatorname{Bi}(z)], \quad (14)$$

в котором  $C_3$  и  $\varphi_3$  — постоянные.

Срачивая решения (2), (5), (9)–(11), (13), (14) и используя выражения (8) и (12), получаем дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha I_1(c) + i \left( \sigma J_1(c) - \frac{1}{2} \ln \tau \right) \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha I_2(c) + i \sigma J_2(c) \right) = \\ = - \frac{\exp \{2i\sigma Q(c)\}}{4 \exp \{2\alpha S(c)\}} (1 + O(\lambda)), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(c) &= \int_0^{y_{a1}} \sqrt{q(y)} dy, & I_2(c) &= \int_{y_{a2}}^1 \sqrt{q(y)} dy, & S(c) &= \int_{y_{a1}}^{y_{a2}} \sqrt{-q(y)} dy, \\ J_1(c) &= \int_0^{y_{a1}} \frac{g(y)}{\sqrt{q(y)}} dy, & J_2(c) &= \int_{y_{a2}}^1 \frac{g(y)}{\sqrt{q(y)}} dy, & Q(c) &= \int_{y_{a1}}^{y_{a2}} \frac{g(y)}{\sqrt{-q(y)}} dy. \end{aligned}$$

Уравнение (15) дает неявную связь между  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $c$ , которая может быть представлена в форме дисперсионных зависимостей  $\alpha(\omega)$  и  $\sigma(\omega)$ . Отметим, что критический слой в главном приближении не оказывает влияния на эти зависимости.

**Спектр собственных колебаний ударного слоя.** Рассмотрим вещественные значения  $\tau \leq 1$ . В коротковолновом приближении дисперсионное уравнение (15) содержит малый параметр  $\delta = \exp(-\alpha S)$ . Представляя (15) в виде

$$\operatorname{ctg}(F_1(\alpha, \sigma, c)) \operatorname{tg}(F_2(\alpha, \sigma, c)) = -\delta^2 \exp[2i\sigma Q(c)](1 + O(\lambda))/4,$$

где

$$F_1(\alpha, \sigma, c) = \pi/4 + \alpha I_1(c) + i(\sigma J_1(c) - (1/2) \ln \tau), \quad F_2(\alpha, \sigma, c) = \pi/4 + \alpha I_2(c) + i\sigma J_2(c),$$

построим разложение функций  $F_1$  и  $F_2$ :

$$F_1 = F_1^{(0)}(\alpha, \sigma, c) + \delta^2 F_1^{(1)}(\alpha, \sigma, c) + O(\delta^4), \quad F_2 = F_2^{(0)}(\alpha, \sigma, c) + \delta^2 F_2^{(1)}(\alpha, \sigma, c) + O(\delta^4). \quad (16)$$

Для двух главных приближений получаются уравнения

$$\cos F_1^{(0)} \sin F_2^{(0)} = 0,$$

$$(\sin F_1^{(0)} \sin F_2^{(0)})F_1^{(1)} - (\cos F_1^{(0)} \cos F_2^{(0)})F_2^{(1)} = \exp\{2i\sigma Q\} \sin F_1^{(0)} \cos F_2^{(0)}/4.$$

Первое уравнение дает дискретный спектр собственных колебаний в нижнем волноводе

$$\alpha_1(c, n_1) = (\pi/4 + \pi n_1)/I_1(c) \quad (n_1 \in N, n_1 \gg 1), \quad \sigma_1(c) = \ln \tau / (2J_1(c)) \geq 0 \quad (17)$$

и в верхнем волноводе

$$\alpha_2(c, n_2) = (-\pi/4 + \pi n_2)/I_2(c) \quad (n_2 \in N, n_2 \gg 1), \quad \sigma_2(c) = 0. \quad (18)$$

В главном приближении собственные колебания нижнего и верхнего волноводов не взаимодействуют между собой. Моды нижнего волновода экспоненциально затухают ( $\sigma_1 > 0$ ) при  $\tau < 1$ , что обусловлено поглощением акустических возмущений пористой стенкой.

Моды верхнего волновода нейтральны ( $\sigma_2 = 0$ ). Групповые скорости волн нижнего и верхнего волноводов определяются как  $v_{1,2} = d\omega_{1,2}(\alpha)/d\alpha$ , где  $\omega_{1,2}(\alpha) = \alpha c_{1,2}(\alpha)$ , а  $c_{1,2}(\alpha)$  — разрешенные относительно  $c$  дисперсионные зависимости  $\alpha_{1,2}(c)$ . Из (17), (18) следует

$$v_{1,2}(c) = c - I_{1,2}(c) / \frac{dI_{1,2}}{dc}.$$

Нетрудно показать, что

$$J_{1,2}(c) = -v_{1,2}(c) \frac{dI_{1,2}}{dc}.$$

Поскольку  $dI_1/dc > 0$ ,  $dI_2/dc < 0$ ,  $J_1(c) < 0$ ,  $J_2(c) > 0$ , групповые скорости  $v_{1,2}$  положительны и удовлетворяют условию  $v_1(c) < c < v_2(c)$ . Это означает, что дисперсионные кривые разных волноводов пересекаются между собой, т. е. существуют точки  $c_*$  (точки синхронизма), в которых  $\alpha_1(c_*) = \alpha_2(c_*)$ . Вблизи этих точек разложения (16) непригодны. Даже при малых  $\delta$  возникает сильное взаимодействие волн нижнего и верхнего волноводов. Далее будет показано, что это приводит к акустической неустойчивости ударного слоя.

**Влияние пористой стенки на акустическую неустойчивость.** Рассмотрим малые отклонения  $\alpha$  и  $\omega$  от точки синхронизма  $(\alpha_*, \omega_*)$ :  $\bar{\omega} = \omega - \omega_* = O(\delta)$  и  $\bar{\alpha} = \alpha - \alpha_* = O(\delta)$ , где  $\delta = \exp[-\alpha_* S(c_*)]$  — малый параметр. В этом случае дисперсионное соотношение (15) можно представить в виде системы

$$\begin{aligned} \frac{J_1 J_2}{v_1 v_2} (\bar{\omega} - v_1 \bar{\alpha})(\bar{\omega} - v_2 \bar{\alpha}) - \text{th} \left( \sigma J_1 - \frac{1}{2} \ln \tau \right) \text{th}(\sigma J_2) &= \frac{1}{4} \delta^2 \cos(2\sigma Q), \\ \frac{J_1}{v_1} (\bar{\omega} - v_1 \bar{\alpha}) \text{th}(\sigma J_2) + \frac{J_2}{v_2} (\bar{\omega} - v_2 \bar{\alpha}) \text{th} \left( \sigma J_1 - \frac{1}{2} \ln \tau \right) &= -\frac{1}{4} \delta^2 \sin(2\sigma Q), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $J_{1,2}$ ,  $v_{1,2}$ ,  $Q$  вычисляются в точке синхронизма. Для анализа структуры решения уравнений (19) рассмотрим характерные значения коэффициента отражения  $\tau$ .

1. У слабо поглощающих покрытий коэффициент отражения близок к единице. Рассмотрим значения  $\tau = 1 - O(\delta)$ , при которых  $\ln \tau = O(-\delta)$  и  $\sigma = O(\delta)$ . Вводя малую величину  $\varepsilon = \ln \tau / (2J_1)$ , преобразуем (19) к виду

$$\begin{aligned} (\bar{\omega} - v_1 \bar{\alpha})(\bar{\omega} - v_2 \bar{\alpha}) - \sigma(\sigma - \varepsilon)v_1 v_2 &= \delta^2 v_1 v_2 / (4J_1 J_2), \\ (\bar{\omega} - v_1 \bar{\alpha})\sigma v_2 + (\bar{\omega} - v_2 \bar{\alpha})(\sigma - \varepsilon)v_1 &= O(\delta^3). \end{aligned}$$

Если  $\sigma \neq \varepsilon/2$ , из системы можно исключить  $\bar{\alpha}$ , что приводит к уравнению для  $\sigma$

$$(2\sigma - \varepsilon)^2 \sigma(\sigma - \varepsilon)v_1 v_2 + \frac{(v_1 - v_2)^2}{v_1 v_2} \sigma(\sigma - \varepsilon)\bar{\omega}^2 + \frac{\delta^2 v_1 v_2}{4J_1 J_2} (2\sigma - \varepsilon)^2 = 0. \quad (20)$$

Вещественное решение уравнения (20) существует лишь в том случае, когда  $0 \leq \sigma(\sigma - \varepsilon) \leq -\delta^2 / (4J_1 J_2)$ . Следовательно, величина  $\sigma$  удовлетворяет ограничениям

$$\frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\delta^2}{4J_1 J_2}} \leq \sigma_- \leq 0, \quad \varepsilon \leq \sigma_+ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\delta^2}{4J_1 J_2}},$$

где  $\sigma_-$  соответствует верхнему волноводу,  $\sigma_+$  — нижнему волноводу. Для граничных значений  $\sigma_- = 0$ ,  $\sigma_+ = \varepsilon$  взаимодействие между волноводами отсутствует. Вблизи точки синхронизма дисперсионные зависимости расщепляются: в верхнем волноводе появляется неустойчивый корень  $\sigma_- < 0$ , в нижнем волноводе корень  $\sigma_+ > \varepsilon$  приводит к усилению демпфирования акустических волн. Данное расщепление показано на рис. 3. Максимальный инкремент неустойчивости

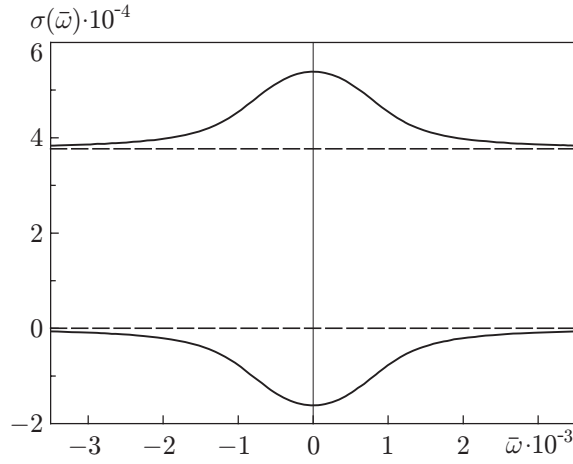


Рис. 3. Дисперсионные кривые  $\sigma(\bar{\omega})$  вблизи точки синхронизма: сплошные кривые — при взаимодействии волноводов; штриховые кривые — без взаимодействия

$$\sigma_{\text{inst}}(\varepsilon) = \max_{\bar{\omega}} |\sigma_-(\bar{\omega})| = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\delta^2}{4J_1J_2}} - \frac{\varepsilon}{2} \tag{21}$$

уменьшается с ростом  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  (непроницаемая стенка с  $\tau = 1$ )  $\sigma_{\text{inst}}$  достигает максимального значения, полученного в работе [12]. Таким образом, даже слабо поглощающее покрытие приводит к заметному уменьшению неустойчивости.

2. Для сильно поглощающих покрытий с  $\tau = 1 - O(1)$  система (19) имеет вещественное решение в двух случаях:  $|\sigma J_1 - (1/2) \ln \tau| = O(\delta^2)$  и  $\sigma = O(\delta^2)$ . В первом случае  $\sigma > 0$  и неустойчивость не возникает. Во втором случае можно ожидать появления малого неустойчивого корня в дисперсионной зависимости  $\sigma(\bar{\omega})$ . Уравнения (19) приводят к оценкам  $\sigma = O(\delta^2)$ ,  $(\bar{\omega} - v_1\bar{\alpha}) = O(\delta)$ ,  $(\bar{\omega} - v_2\bar{\alpha}) = O(\delta^3)$ , на основании которых в главном приближении получается решение

$$\sigma(\tau) = \frac{\delta^2}{4J_2} \frac{\tau + 1}{\tau - 1} < 0.$$

Этот корень соответствует неустойчивым возмущениям с инкрементом

$$\sigma_{\text{inst}}(\tau) = |\sigma(\tau)| = \frac{\delta^2}{4J_2} \frac{1 + \tau}{1 - \tau}, \tag{22}$$

убывающим при  $\tau \rightarrow 0$ . Заметим, что инкремент неустойчивости теперь является величиной пропорциональной  $\delta^2$  и существенно меньше, чем в случае слабо поглощающего покрытия (см. (21)). Это означает, что пористое покрытие хорошо стабилизирует акустические моды в ударном слое.

3. У реальных пористых покрытий коэффициент отражения является комплексной величиной

$$\tau = R \exp(i\theta),$$

где  $R$  — отношение амплитуд;  $\theta$  — сдвиг фазы акустической волны при отражении;  $-2\pi < \theta < 0$ . В этом случае  $\ln \tau = \ln R + i\theta$  и, в приближении отсутствия взаимодействия между волноводами, (15) принимает вид

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \alpha I_1(c) + i\left(\sigma J_1(c) - \frac{1}{2} \ln R\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha I_2(c) + i\sigma J_2(c)\right) = 0.$$



В нижнем волноводе получаются дисперсионные зависимости

$$\alpha_1(c, n_1, \theta) = \frac{\pi/4 - \theta/2 + \pi n_1}{I_1(c)}, \quad \sigma_1(c, R) = \frac{\ln R}{2J_1(c)} \geq 0.$$

Фаза  $\theta$  сдвигает дисперсионные кривые  $\alpha_1(c)$ , а с ними и точку синхронизма. Это влияет на значения инкрементов неустойчивых волн. Величина  $R$  влияет на параметры устойчивости так же, как и в случае вещественных  $\tau$ , что позволяет обобщить выражения (21), (22) для комплексных  $\tau$ :

$$\sigma_{\text{inst}}(R) = \sqrt{\left(\frac{\ln R}{4J_1}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4J_1J_2} - \frac{\ln R}{4J_1}} \quad \text{при} \quad R = 1 - O(\delta),$$

$$\sigma_{\text{inst}}(R) = \frac{\delta^2}{4J_2} \frac{1+R}{1-R} \quad \text{при} \quad 0 < R < 1 - O(1). \quad (23)$$

Фаза  $\theta$  содержится неявным образом в величинах  $J_{1,2}$  и  $\delta$ , которые являются функциями точки синхронизма. Инкремент неустойчивости уменьшается при  $R = |\tau| \rightarrow 0$ . Однако у реальных пористых покрытий параметр  $R$  не может быть меньше некоторого минимального значения  $R_{\text{min}} > 0$ , обусловленного структурными ограничениями. Поэтому дальнейшее увеличение стабилизации может быть достигнуто посредством оптимизации значения фазы  $\theta = \arg \tau$  при фиксированном  $R$ .

**Результаты расчета.** Расчет параметров устойчивости проводился для ударного слоя с профилями основного течения  $U(y)$  и  $T(y)$ , соответствующими сверхзвуковому пограничному слою на плоской пластине с теплоизолированной стенкой. Число Маха на внешней границе пограничного слоя  $M = 6$ , скачок уплотнения помещен искусственно на расстоянии 1,25 толщины вытеснения от стенки. Данное течение качественно моделирует течение в ударном слое совершенного газа с числом Прандтля  $\text{Pr} = 0,72$  и показателем адиабаты 1,4. Коэффициент вязкости вычислялся по степенному закону  $\mu/\mu_e = (T/T_e)^{0,75}$ .

Дисперсионное уравнение (20) решалось численно вблизи точки синхронизма, соответствующей максимуму неустойчивости. На рис. 4 показаны дисперсионные зависимости  $\sigma(\bar{\omega})$  для различных вещественных значений коэффициента отражения  $\tau$ , соответствующих малой величине пористости. По мере уменьшения коэффициента отражения дисперсионные кривые деформируются. Их максимум резко падает даже для относительно слабого уровня поглощения. Аналитическое решение (23) дисперсионного уравнения (20) было использовано для расчета инкрементов неустойчивости при различных значениях комплексного коэффициента отражения. Результаты этого расчета показаны на рис. 5. Видно, что варьирование параметров  $R = |\tau|$  и  $\theta = \arg \tau$  приводит к существенному снижению инкрементов акустической неустойчивости.

**Заключение.** Методом сращиваемых асимптотических разложений проведен теоретический анализ влияния пористой стенки на устойчивость акустических возмущений в ударном слое. Предполагалось, что пористое покрытие, обеспечивающее комплексный коэффициент отражения возмущений  $|\tau| < 1$ , способно подавлять неустойчивые акустические возмущения. Двухволноводный режим, при котором возникает неустойчивость ударного слоя, исследован с помощью WKV-метода, позволяющего изучать качественные особенности развития возмущений из высокочастотной (коротковолновой) части спектра. Дисперсионное соотношение, полученное в аналитическом виде, проанализировано для различных характерных значений коэффициента отражения  $\tau$ . Аналитические зависимости инкремента акустической неустойчивости от  $\tau$  свидетельствуют о том, что пористое покрытие эффективно подавляет акустическую неустойчивость ударного слоя. Численные

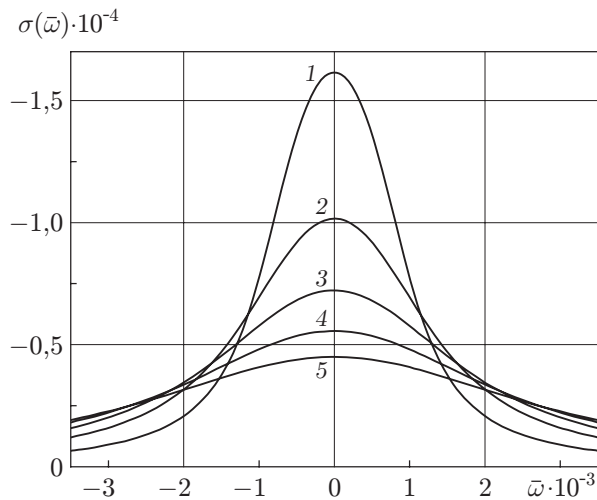


Рис. 4

Рис. 4. Дисперсионные кривые неустойчивой моды при различных значениях вещественного коэффициента отражения:

1 —  $\tau = 1 - \delta$ ; 2 —  $\tau = 1 - 2\delta$ ; 3 —  $\tau = 1 - 3\delta$ ; 4 —  $\tau = 1 - 4\delta$ ; 5 —  $\tau = 1 - 5\delta$   
 ( $\delta = 5,46 \cdot 10^{-4}$ )

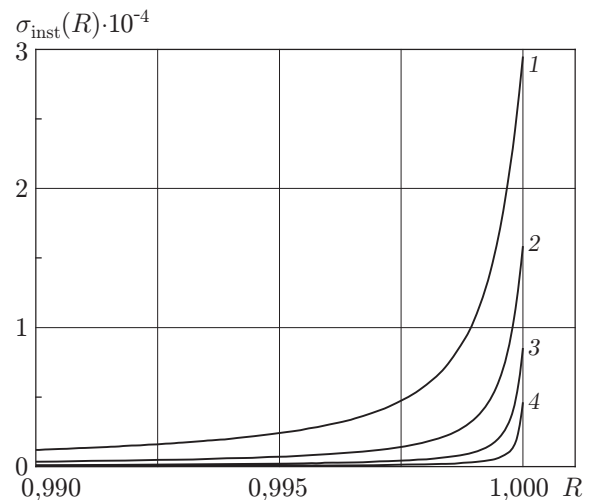


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость инкремента неустойчивости от модуля коэффициента отражения при различных значениях фазы  $\theta$ :

1 —  $\theta = 0$ ; 2 —  $\theta = -\pi/3$ ; 3 —  $\theta = -2\pi/3$ ; 4 —  $\theta = -\pi$

расчеты для модельных профилей среднего течения в ударном слое согласуются с данным выводом асимптотической теории.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Malik M. R., Zang T. A., Bushnell D. M.** Boundary layer transition in hypersonic flows. N. Y., 1990. (Paper / AIAA; N 90-5232).
2. **Lysenko V. I., Maslov A. A.** The effect of cooling on supersonic boundary-layer stability // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 38–52.
3. **Malmuth N. D., Fedorov A. V., Shalaev V. I., et al.** Problems in high speed flow prediction relevant to control. N. Y., 1998. (Paper / AIAA; N 98-2695).
4. **Fedorov A. V., Malmuth N. D.** Stabilization of hypersonic boundary layers by porous coatings // AIAA J. 2001. V. 39, N 4. P. 605–610.
5. **Rasheed A., Hornung H. G., Fedorov A. V., Malmuth N. D.** Experiments on passive hypervelocity boundary layer control using an ultrasonically absorptive surface // AIAA J. 2002. V. 40, N 3. P. 481–489.
6. **Fedorov A., Shipluk A., Maslov A., et al.** Stabilization of a hypersonic boundary layer using an ultrasonically absorptive coating // J. Fluid Mech. 2003. V. 479. P. 99–124.
7. **Фомин В. М., Федоров А. В., Шиплюк А. Н. и др.** Стабилизация гиперзвукового пограничного слоя покрытиями, поглощающими ультразвук // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 2. С. 1–5.
8. **Fedorov A., Kozlov V., Shipluk A., et al.** Stability of hypersonic boundary layer on porous wall with regular microstructure. N. Y., 2003. (Paper / AIAA; N 2003-4147).

9. **Петров Г. В.** Влияние скачка уплотнения, ограничивающего гиперзвуковой ударный слой, на устойчивость пограничного слоя // Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982. С. 25–34.
10. **Petrov G. V.** Stability of thin viscous shock layer on wedge in hypersonic flow of a perfect gas // Laminar-turbulent transition: IUTAM Symp. Novosibirsk: S. n., 1984. P. 487–493.
11. **Гуцин В. Р., Федоров А. В.** Асимптотическая структура волновых возмущений в тонком ударном слое // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 6. С. 72–79.
12. **Гуцин В. Р., Федоров А. В.** Коротковолновая неустойчивость в ударном слое совершенного газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 1. С. 10–14.
13. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
14. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 14/IV 2004 г.*

---