ПМТФ, № 1, 1960

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ДВУМЯ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Г. П. Выпов

(Сталино)

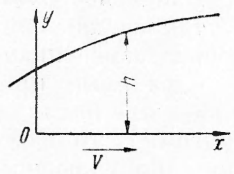
Рассматривается аппроксимация точного решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости при заданных граничных условиях решениями того же уравнения, но при других граничных поверхностях. При этом дается оценка погрешности полученного таким способом решения. Рассмотрен также пример аппроксимации произвольного решения уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в пространстве между двумя близко расположенными поверхностями точными решениями этих же уравнений, но при движении жидкости в пространстве, образованном участками парабол.

Уравнения плоского стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости, как известно, имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$



Фиг. 1

где x и y — декартовы координаты, v_x и v_y — составляющие скорость частицы в этих координатах, p — давление, ν — кинематическая вязкость, ϱ — плотность жидкости.

Рассмотрим движение жидкости между двумя близко расположенными поверхностями. Пусть L — характерная длина вдоль поверхностей, δ — характерная длина в направлении, перпендикулярном к поверхностям, U — характерная скорость вдоль поверхностей.

Если предположить, что $\delta / L \ll 1$ и правая и левая части уравнения (1) имеют одинаковый порядок, т. е. $\nu L / U\delta^2 = O(1)$, то уравнения (1) и (2) можно записать так:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (4)$$

$$p = p(x) \qquad (5)$$

В этих уравнениях координата x отсчитывается вдоль нижней поверхности, а координата y — перпендикулярно к ней (фиг. 1).

Нижнюю поверхность без ограничения общности можно считать прямой, верхняя поверхность пусть задается уравнением

$$y = h(x) \qquad (6)$$

При замене первой системы уравнений второй предполагается, что погрешность в распределении скоростей имеет порядок $U\delta^2/s^2$, где s — расстояние рассматриваемого участка от входа или выхода.

(Это делают обычным образом, оценивая порядок каждого члена в уравнениях (1) и (2).)

Одновременно при замене системы уравнений второй накладываются определенные ограничения на распределения скоростей в начальном участке. В самом деле, если разложить v_x в ряд

$$v_x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots .$$

и подставить это выражение в уравнения (3) и (4), то для коэффициентов a_n получаются следующие соотношения:

$$a_2 = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = a_1 a'_1, \ldots \tag{7}$$

Из этих соотношений следует, что a_n в начальном сечении при решении системы уравнений (3) и (4) не могут задаваться произвольно. Таким образом, если считать, что ошибка, получающаяся при замене первой системы уравнений второй, порядка $U\delta^2/s^2$, то необходимо предположить также, что изменение распределения скоростей в начальном участке при одинаковом объеме жидкости, протекающей через поперечное сечение в единицу времени

$$Q = \int_0^{h_0} v_x \, dy \tag{8}$$

при одинаковых граничных условиях и т. п., сказывается на распределении скоростей на расстоянии s от начального сечения, как добавка порядка $U\delta^2/s^2$.

Изменение формы участка сказывается на расстоянии s от этого участка так же, как поправка порядка $U\delta^2/s^2$, так как фактически это эквивалентно изменению распределения скоростей на входе этого участка.

Сделанные предположения подтверждаются рассмотрением течения в канале с параллельными стенками. Эта задача была рассмотрена Шлихтингом. В этом случае разность между точным решением и асимптотическим, получающимся при больших s, где s — расстояние от входа, имеет порядок $U\delta^2/s^2$, где δ — ширина канала.

Рассмотрим теперь вопрос об изменении формы кривых (6), ограничивающих рассматриваемый участок.

Рассмотрим два течения на двух участках длины $2s$, ограниченных соответственно кривыми $y = h_1(x)$ и $y = h_2(x)$ и осью x. Предположим, что в начальном сечении при $x = x_0$

$$\frac{d^k h_1}{dx^k} = \frac{d^k h_2}{dx^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{9}$$

и распределения скоростей v_{1x} и v_{2x} для первого и второго течений соответственно одинаковы. Кроме того, предположим, что граничные услоиия на поверхностях, ограничивающих эти участки, для первого и второго течений одинаковы. Найдем разность $\Delta v_x = v_{1x} - v_{2x}$. В силу уравнения несжимаемости (3) имеем

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -v_x^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{v_y}{v_x} \tag{10}$$

Уравнение (4) теперь можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{v_y}{v_x} = \frac{\nu}{v_x^2} \left[\frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right] \tag{11}$$

Интегрируя его, имеем

$$v_y = \frac{v_x}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_0^y \frac{dy}{v_x^2} - \nu v_x \int_0^y \frac{1}{v_x^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy + v_x v_y(x, 0) \tag{12}$$

Здесь функция $v_y(x, 0) = v_y(x, y)$ при $y = 0$ является известной функцией от x. Используя снова уравнение (3), найдем $\frac{\partial v_x}{\partial x}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{1}{v_x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\int_0^y \frac{dy}{v_x^2}\right] + \nu \frac{\partial v_x}{\partial y}\int_0^y \frac{1}{v_x^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,dy + \frac{\nu}{v_x}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y(x, 0) \quad (13)$$

Положим в этой формуле $y = h(x)$ и заметим, что

$$\frac{d}{dx}v_x(x, h) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dh}{dx} = f(x) \quad (14)$$

где $f(x)$ — известная функция. Тогда для определения dp/dx получим

$$f(x) - \frac{\partial v_x}{\partial y}h'(x) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\int_0^h \frac{dy}{v_x^2}\right] +$$

$$+ \nu \frac{\partial v_x}{\partial y}\int_0^h \frac{1}{v_x^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\,dy + \frac{\nu}{v_x}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y(x, 0) \qquad \text{при } y = h(x) \quad (15)$$

Из этого уравнения видно, что падение давления $\partial p/\partial x$ будет зависеть от распределения скоростей в начальном участке от $h(x)$, $h'(x)$. Зная $\partial p/\partial x$, из уравнения (13) находим $\partial v_x / \partial x$, которая также будет зависеть от h и h'.

Продифференцировав уравнения (13) и (15) по x, найдем, что $\partial^2 p/\partial x^2$ и $\partial^2 v_x/ dx^2$ зависят от h, h', h''. Продолжая и далее таким образом, получим, что $\partial^k p/\partial x^k$ и $\partial^k v_x/dx^k$ зависят от h, h', ..., $h^{(k)}$.

Из этих рассуждений следует, что если выполняется соотношение (9) и распределения скоростей в начале первого и второго участков одинаковы, то при $x = x_0$

$$\frac{\partial^k v_{1x}}{\partial x^k} = \frac{\partial^k v_{2x}}{\partial x^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \quad (16)$$

Разложим разность $\Delta v_x = v_{1x} - v_{2x}$ в ряд

$$\Delta v_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k v_{1x}}{\partial x^k} - \frac{\partial^k v_{2x}}{\partial x^k}\right]_{x=x_0} (x - x_0)^k \quad (17)$$

В силу соотношения (16) имеем

$$\Delta v_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k v_{1x}}{\partial x^k} - \frac{\partial^k v_{2x}}{\partial x^k}\right]_{x=x_0} (x - x_0) \quad (18)$$

Подведем итоги. Если имеется два одинаковых участка с различными распределениями скоростей в начале участков при одинаковом расходе Q

$$Q_1 = \int_0^{h_1(x_0)} v_{1x}\,dy = Q_2 = \int_0^{h_2(x_0)} v_{2x}\,dy, \qquad h_1(x_0) = h_2(x_0) \quad (19)$$

при одинаковых граничных условиях, то разность между скоростями Δv_x на расстоянии s от начала будет иметь порядок $U\delta^2 / s^2$. Далее, если для кривых, ограничивающих участки $y = h_1(x)$ и $y = h_2(x)$, выполняются соотношения (9), т. е. разность между ними порядка $\delta s^{n+1}/L^{n+1}$, то при равных распределениях скоростей в начале участков разность между скоростями $\Delta v_x = v_{1x} - v_{2x}$ на расстоянии s от начала будет иметь порядок Us^{n+1}/ L^{n+1}.

Из ранее сказанного также следует, что если имеются два участка с различными распределениями скоростей, но с одинаковыми расходами Q

в начале участков и кривые $h_1(x)$ и $h_2(x)$, ограничивающие эти участки, разнятся между собой на величину порядка $\delta s^{n+1}/L^{n+1}$, то при одинаковых граничных условиях для разности скоростей Δv_x на расстоянии s от начала участков, будем иметь:

$$|\Delta v_x| = O(U\delta^2/s^2 + Us^{n+1}/L^{n+1}) \tag{20}$$

Предположим, что кривая $y = h_2(x)$ зависит от $n+1$ параметра $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Для каждого участка длины $2s$ с центром в x можно подобрать эти параметры так, чтобы в начале участков удовлетворялись соотношения (9) и расходы Q_1 и Q_2 в начале участков были равны.

В этом случае, как ранее было показано, разность между кривыми $h_1(x)$ и $h_2(x)$ на участке будет порядка $\delta s^{n+1}/L^{n+1}$ и, следовательно, для разности Δv_x на расстоянии s от начала, т. е. в точке x, имеем:

$$\Delta v_x = O[U\delta^2/s^2 + Us^{n+1}/L^{n+1}] \tag{21}$$

Минимальный порядок будет

$$\Delta v_x = O[U(\delta/L)^{2m}] \quad \text{при } s = O[\delta(\delta/L)^{-m}] \qquad \left(m = \frac{n+1}{n+3}\right) \tag{22}$$

Таким образом, для распределения скоростей в некотором сечении x в пространстве между двумя близко расположенными поверхностями имеем:

$$v_{1x} = v_{2x}(x, y; \alpha_0, \ldots, \alpha_n) + O[U(\delta/L)^{2m}] \tag{23}$$

при этом параметры $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ определяются так, чтобы при $x - s$ выполнялись условия (9) и (19).

Упростим соотношение (23). Предположим, что в начале участка $v_{1x} = v_{2x}$. Тогда, так как выполняется соотношение (9), в начале участка будет выполняться также условие (16). Продифференцировав его по x, получим после несложных преобразований, что

$$\left.\frac{\partial^k v_{2x}(x, y; \alpha_0, \ldots, \alpha_n)}{\partial s^k}\right|_{s=0} = 0 \quad (\alpha_i = \alpha_i(s);\ k = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

Разложим v_{2x} в ряд по s. Учитывая условие (24), получим:

$$v_{2x} = v_{2x}|_{s=0} + O[U(\delta/L)^{2m}] \qquad \left(m = \frac{n+1}{n+3}\right)$$

Подставляя это выражение в формулу (23), получим окончательно:

$$v_{1x} = v_{2x}|_{s=0} + O[U(\delta/L)^{2m}] \tag{25}$$

Погрешность будет также порядка $U(\delta/L)^{2m}$, если в начале участков v_{1x} и v_{2x} не совпадают, как было показано ранее, и выражение (25) для v_{1x} остается справедливым. Аналогичным образом можно показать, что равенство (26) останется в силе, если потребовать выполнения условия (9) не в начале участка, а в точке x.

Сформулируем еще раз полученный результат.

Пусть $v_1(x, y)$ — решение уравнений (3), (4) и (5) движения вязкой несжимаемой жидкости в пространстве, ограниченном осью x и кривой $y = h_1(x)$ при определенных граничных условиях.

Пусть, далее, $v_2(x, y; \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ — решение тех же уравнений, зависящее от $n+1$ параметра при тех же граничных условиях, но для движения в пространстве, ограниченном осью x и кривой $y = h_2(x, \alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, зависящей также от $n+1$ параметра. Тогда, если определить эти параметры, как функции x из уравнений

$$\frac{d^k h_1(x)}{dx^k} = \frac{d^k h_2(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_n)}{dx^k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{26}$$

то при одинаковом расходе жидкости Q, протекающем через сечение, как в первом, так и во втором случае для разности Δv_x будем иметь:

$$|\Delta v_x| = O[U(\delta / L)^{2m}] \qquad \left(m = \frac{n+1}{n+3}\right) \tag{27}$$

Покажем теперь, как найти распределение скоростей и давлений в жидкости, когда кривая $h(x)$ является параболой, зависящей от двух параметров:

$$h(x) = a(x+b)^{1/2} \tag{28}$$

При решении этой задачи предположим, что верхняя поверхность неподвижна, а нижняя движется с постоянной скоростью V, направленной вдоль поверхности. Кроме того, будем считать заданным расход жидкости (8) и давление в начале координат. Эти условия можно записать так:

$$v_x(x, 0) = V, \qquad v_y(x, 0) = 0 \tag{29}$$

$$v_x(x, h) = v_y(x, h) = 0 \qquad \text{при } y = h(x) \tag{30}$$

$$p = p_0 \quad \text{при } x = 0 \tag{31}$$

Введем безразмерные координаты, положив

$$\xi = \frac{y}{\delta}\sqrt{\frac{L}{x+b}}, \qquad \eta = \sqrt{\frac{L}{x+b}} \tag{32}$$

Будем искать v_x в виде

$$v_x = V\left(\sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \zeta_k'(\xi)\right) \tag{33}$$

где ζ_k — безразмерные величины, зависящее только от ξ. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2L}\left(\xi\eta\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta^3\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\eta}{\delta}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

Из уравнений (3) следует, что существует функция тока ψ, так что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{34}$$

Подставляя вместо скорости v_x ее выражение из (32) и учитывая, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\eta}{\delta}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tag{35}$$

будем иметь для определения функции тока ψ такое уравнение:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{V}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k-1}\zeta_k'(\xi) \tag{36}$$

Отсюда

$$\psi = \frac{V}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k-1}[\zeta_k(\xi) - \zeta_k(0)] \tag{37}$$

Так как функции ζ_k и функция тока ψ определены с точностью до произвольной постоянной, то можно положить:

$$\zeta_k(0) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2\ldots) \tag{38}$$

Для определения v_y имеем

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2L}\left(\eta^2\xi\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta^3\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = \frac{V\delta^2}{2L}\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+1}[(k-1)\zeta_k - \xi\zeta_k'] \tag{39}$$

Получим уравнения, которым удовлетворяют функции ζ_k. Подставляя вместо v_x и v_y в уравнении (4) их значения из (32) и (39), получим после несложных преобразований следующие уравнения:

$$\frac{V^2}{2L}\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+2} f_k = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu V}{\delta^2}\sum_{k=0}^{\infty} \eta^{k+2}\zeta_k'' \tag{40}$$

где

$$f_k = \sum_{l=0}^{k} [(k-l-1)\zeta_{k-l}\zeta_l'' - l\zeta_{k-l}'\zeta_l'] \tag{41}$$

Предположим, что $\partial p \,/\, \partial x$ можно разложить в ряд по η следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\eta^3}{2L}\frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{\rho \nu V}{\delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\eta^{k+2}q_k \tag{42}$$

Подставляя это выражение для $\partial p \,/\, \partial x$ в уравнение (40) и приравнивая члены, стоящие при одинаковых степенях η, получим для ζ_k такую бесконечную систему уравнений:

$$\zeta_k''' - \frac{\delta^2 V}{2\nu L}\sum_{l=0}^{k}[(k-l-1)\zeta_{k-l}\zeta_l'' - l\zeta_{k-l}'\zeta_l'] = q_k \tag{43}$$

Граничные условия для ζ_k имеют вид

$$\zeta_k(0) = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2\ldots,)$$

$$\zeta_0'(0) = 1, \qquad \zeta_k'(0) = 0 \qquad (k = 1,\ 2\ldots) \tag{44}$$

$$\zeta_1(\alpha) = \frac{Q}{V\delta}, \qquad \zeta_k(\alpha) = 0 \qquad (k = 0, 2, 3, \ldots) \qquad \left(\alpha = \frac{a\sqrt{L}}{\delta}\right) \tag{45}$$

$$\zeta_k'(\alpha) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{46}$$

В самом деле, справедливость условия (38) была доказана ранее. Для того чтобы доказать справедливость условия (44), заметим, что $\xi = 0$ при $y = 0$ и

$$v_x = V\sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\zeta_k'(0) = V \tag{47}$$

Сокращая последнее равенство на V, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\zeta_k'(0) = 1 \tag{48}$$

Это равенство справедливо тождественно относительно η. Сравнивая правую и левую части этого равенства, получим условие (44).

Имеем, далее, $\xi = \alpha$ при $y = h(x)$ и

$$v_x = V\sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\zeta_k'(\alpha) = 0 \tag{49}$$

Это равенство выполняется также тождественно относительно η. Приравняв коэффициенты при η^k нулю, получим условие (46).

Для того чтобы получить граничные условия (45), подставим в формулу для расхода жидкости Q вместо x, y и v_x их выражения через η, ξ и ζ_k. Получим

$$Q = \int_0^h v_x\,dy = V\delta\sum_{k=0}^{\infty}\eta^{k-1}\zeta_k(\alpha) \tag{50}$$

Из тождественности этого уравнения относительно η получается условие (25).

Таким образом, из уравнений (43) и граничных условий (38), (44), (45) и (46) необходимо найти функции ζ_k и постоянные q_k, $k = 0, 1, \ldots$. Интегрируя уравнение (42), определяем давление

$$p = C - \frac{2\rho\nu VL}{\delta^2}\left[q_0 \ln \eta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{k}\eta^k\right] \qquad (51)$$

где C — постоянная, находится из граничных условий (30).

Уравнения постоянных q_0 и q_1 имеют вид

$$\zeta_0''' + \frac{\delta^2 V}{2\nu L}\zeta_0\zeta_0'' = q_0, \qquad \zeta_1''' + \frac{\delta^2 V}{2\nu L}(\zeta_0\zeta_1'' + \zeta_0'\zeta_1') = q_1 \qquad (52)$$

Граничные условия для них запишутся так:

$$\zeta_0(0) = 0, \qquad \zeta_0'(0) = 1 \qquad \text{при } \xi = 0 \qquad (53)$$

$$\zeta_0(\alpha) = 0, \qquad \zeta_0'(\alpha) = 0 \qquad \text{при } \xi = \alpha \qquad (54)$$

$$\zeta_1(0) = 0, \qquad \zeta_1'(0) = 0 \qquad \text{при } \xi = 0 \qquad (55)$$

$$\zeta_1(0) = \frac{Q}{V\delta}, \qquad \zeta_1'(\alpha) = 0 \qquad \text{при } \xi = \alpha \qquad (56)$$

Прежде чем перейти к решению этих уравнений, рассмотрим такое уравнение:

$$\frac{d^3\varphi_0}{d\chi^3} - \frac{1}{2}\varphi_0\frac{d^2\varphi_0}{d\chi^2} = 1 \qquad (57)$$

с начальными условиями (58)

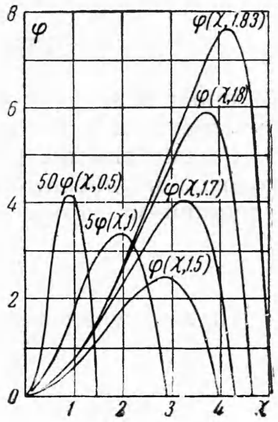
$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0'(0) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \beta \quad \text{при } \chi = 0$$

где β — произвольное положительное число.

Зависимость $\varphi_0(\chi;\ \beta)$ от χ при различных β представлена кривыми на фиг. 2. Пусть γ является корнем уравнения

$$\varphi_0(\gamma;\ \beta) = 0 \qquad (59)$$

Можно показать, что при различных β, кроме корня $\gamma = 0$, существует не более одного корня, удовлетворяющего уравнению (59).

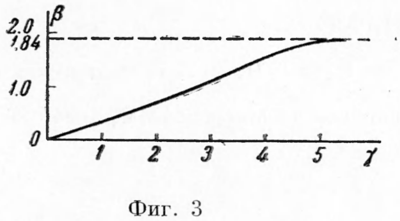


Фиг. 2

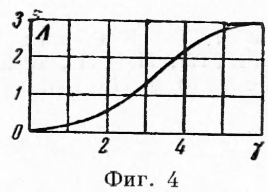
Зависимость γ от β представлена кривой на фиг. 3. Прямая $\beta = 1.84$ является асимптотой. При $\beta > 1.84$ уравнение (59) не имеет положительных корней. Покажем теперь, как, зная функции $\varphi_0(\chi;\ \beta)$ и $\gamma(\beta)$, можно найти решение $\zeta_0(\xi)$ и постоянную q_0. Рассмотрим функцию

$$\lambda(\gamma) = \gamma^2\varphi'_{0\chi}[\gamma;\ \beta(\gamma)] \qquad (60)$$

График зависимости $\Lambda = \lg(1 - \lambda)$ от γ представлен на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

Пусть теперь заданы $\delta^2 V/\nu L$ и α. По предыдущему графику находим величину γ, удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{\delta^2 V}{\nu L}\alpha^2 = \varphi_{0\chi}'[\gamma;\ \beta(\gamma)] \qquad (61)$$

Далее, по графику, представленному на фиг. 3, находим соответствующее $\beta(\gamma)$. Если теперь положить

$$q_0 = \frac{\nu L \gamma^4}{\delta^2 V \alpha^4}, \qquad \zeta_0(\xi) = \frac{\nu L \gamma}{\delta^2 V \alpha} \varphi_0 \left[\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha - \xi); \beta\right] \tag{62}$$

где φ_0 удовлетворяет уравнению (57), то простой подстановкой легко проверить, что первое уравнение (52) и граничные условия (53) и (54) при этом удовлетворяются.

Покажем теперь, как решить второе уравнение (52). Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^3 \varphi_1}{d\chi^3} - \frac{1}{2}\left(\varphi_0 \frac{d^2 \varphi_1}{d\chi^2} + \frac{d\varphi_0}{d\chi} \frac{d\varphi_1}{d\chi}\right) = 1 \tag{63}$$

Пусть $\varphi_1(\chi; \beta)$ — решение уравнения (63) при таких граничных условиях:

$$\varphi_{1\chi}'(0; \beta) = 0 \quad \text{при } \chi = 0 \tag{64}$$

$$\varphi_1(\gamma; \beta) = 0, \quad \varphi_{1\chi}'(\gamma; \beta) = 0 \quad \text{при } \chi = \gamma \tag{65}$$

Если положить

$$q_1 = \frac{\gamma^3 Q}{V \delta \alpha^3 \varphi_1(0; \beta)}, \qquad \zeta_1(\xi) = \frac{\alpha^3 q_1}{\gamma^3} \varphi_1 \left[\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha - \xi); \beta\right] \tag{66}$$

то простой подстановкой можно проверить, что второе уравнение (52) при граничных условиях (55) и (56) удовлетворяется.

Рассмотрим теперь случай, когда кривая $h(x)$ произвольна. Граничные условия предполагаем прежними. Будем считать теперь параметры a и b функциями x, определив их из уравнений

$$h(x) = a(x+b)^{1/2}, \qquad h'(x) = \frac{a}{2(x+b)^{1/2}} \tag{67}$$

Из этих уравнений определяем a и b

$$a = \sqrt{2hh'}, \qquad b = \frac{h}{2h'} - x \tag{68}$$

Если считать, что a и b определены таким образом, то для распределения скоростей в пространстве между поверхностями, как ранее было показано, будем иметь:

$$v_x = V \sum_0^\infty \eta^k \zeta_k(\xi) + O\left(\frac{V\delta}{L}\right) \tag{69}$$

Донецкий индустриальный институт

Поступила
10 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ГИТТЛ, М.— Л., 1948.
2. Schlichting H. Laminare Kanaleilaufströmung, ZAMM, 1934, 14, 368.