

5. Шокин Ю. И., Урусов А. И. Дифференциальные представления разностных схем в пространствах обобщенных функций.— В кн.: Числен. методы мех. сплош. среды. Новосибирск, 1979, т. 10, № 4.
6. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О групповой классификации разностных схем для системы одномерных уравнений газовой динамики.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л., Наука, 1970.
7. Федотова З. И. Инвариантные разностные схемы типа предиктор — корректор для одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах.— В кн.: Труды V Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.
8. Федотова З. И. Анализ свойств аппроксимационной вязкости некоторых разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики. Препринт № 10 ИТПМ СО АН СССР, 1979.
9. Шокин Ю. И., Урусов А. И. Об инвариантных разностных схемах расщепления.— В кн.: Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1973.
10. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
11. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1972.
12. MacCormack R. W., Paullay A. J. The influence of the computational mesh on accuracy for initial value problems with discontinuous or nonunique solutions.— Computers and Fluids, 1974, vol. 2, N 3/4.

УДК 533.6.011

О ДВУХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. Ф. Сидоров

(Свердловск)

1. В [1] был найден класс решений нестационарных пространственных уравнений газовой динамики, когда компоненты вектора скорости линейно зависят от всех пространственных координат x_1, x_2, x_3 . Такие решения описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой временной переменной t , они нашли применение, в частности, при изучении динамики гравитирующего газового эллипсоида [2]. Некоторые решения уравнений Навье — Стокса для пространственных установившихся течений несжимаемой вязкой жидкости с линейной зависимостью компонент u_i вектора скорости \mathbf{u} от двух координат x_1, x_2 при специальном виде давления p описаны в [3].

Ниже будут рассмотрены решения уравнений динамики идеального газа, для которых u_i , энтропийная функция W и функция $Q = \rho^{\gamma-1}$, где ρ — плотность, γ — показатель адиабаты в уравнении состояния $p = W\rho^\gamma$, линейно зависят от части пространственных координат. Задача изучения таких движений в отличие от [1] сводится в общем случае к исследованию совместности переопределенных систем уравнений в частных производных достаточно сложной структуры.

Далее будут приведены некоторые достаточные условия, когда соответствующие переопределенные системы сводятся к определенным системам, для которых число уравнений совпадает с числом неизвестных функций и которые обладают достаточно широким произволом в решениях. Тем самым устанавливается непустота рассматриваемых классов решений, а построенные конкретные примеры течений доказывают содержатель-

ность этих классов. Вопрос о полном анализе совместности переопределенных систем и классификации решений остается открытым.

В условиях отсутствия внешних сил систему уравнений газовой динамики запишем в форме

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + Q \operatorname{grad} W + \frac{\gamma}{\gamma - 1} W \operatorname{grad} Q = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad} Q) + (\gamma - 1) Q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0;$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + (\mathbf{u} \operatorname{grad} W) = 0.$$

А. Линейность по одной координате.

Будем искать решения системы (1.1)–(1.3) в виде

$$(1.4) \quad u_i = f_i(x_1, x_2, t)x_3 + g_i(x_1, x_2, t);$$

$$(1.5) \quad Q = f(x_1, x_2, t)x_3 + g(x_1, x_2, t);$$

$$(1.6) \quad W = F(x_1, x_2, t)x_3 + G(x_1, x_2, t).$$

Подставляя выражения (1.4)–(1.6) в систему (1.1)–(1.3), каждое из уравнений системы приведем к виду

$$A_i x_3^2 + B_i x_3 + C_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

где функции A_i, B_i, C_i выражаются через коэффициенты представлений (1.4)–(1.6) и их производные и зависят лишь от x_1, x_2, t . Полагая

$$(1.7) \quad A_i = B_i = C_i = 0$$

в силу произвольности x_3 , получим систему 15 уравнений в частных производных для 10 неизвестных функций f_i, g_i, f, g, F, G .

Введем в рассмотрение двумерные векторы $\mathbf{v} = (f_1, f_2), \mathbf{w} = (g_1, g_2), \mathbf{R} = (g, f), \mathbf{S} = (F, G), \mathbf{P}_f = (F, f), \mathbf{P}_g = (G, g), \mathbf{T}_f = \left(f, \frac{\gamma}{\gamma - 1} F\right), \mathbf{T}_g = \left(g, \frac{\gamma}{\gamma - 1} G\right)$. Тогда систему (1.7) можно представить в виде

$$(1.8) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \left(\mathbf{T}_f \cdot \frac{\partial \mathbf{P}_f}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f_3) = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f) + (\gamma - 1) f \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} F) = 0;$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{v} + f_3 \mathbf{v} + \left(\mathbf{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i}\right) + \\ + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} g_3) + (\mathbf{w} \operatorname{grad} f_3) + f_3^2 + (\mathbf{P}_f \cdot \mathbf{T}_f) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} g) + (\mathbf{w} \operatorname{grad} f) + \gamma f f_3 + (\gamma - 1) f \operatorname{div} \mathbf{w} + (\gamma - 1) g \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} (\operatorname{grad} G) + (\mathbf{w} \operatorname{grad} F) + F f_3 = 0;$$

$$(1.10) \quad \partial \mathbf{w} / \partial t + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} + g_3 \mathbf{v} + (\mathbf{T}_g \cdot \partial \mathbf{P}_g / \partial x_i) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\partial g_3 / \partial t + (\mathbf{w} \operatorname{grad} g_3) + f_3 g_3 + (\mathbf{T}_g \cdot \mathbf{S}) = 0,$$

$$\partial g / \partial t + (\mathbf{w} \operatorname{grad} g) + \gamma f g_3 + (\gamma - 1) g \operatorname{div} \mathbf{w} = 0,$$

$$\partial G / \partial t + (\mathbf{w} \operatorname{grad} G) + F g_3 = 0.$$

Уравнения (1.8)—(1.10) являются соответственно системами $A_i = 0$, $B_i = 0$ и $C_i = 0$.

Положим в системе (1.8)—(1.10)

$$f_1 = f_2 = f = F = 0.$$

Тогда $\mathbf{v} = \mathbf{P}_f = \mathbf{T}_f = (\mathbf{R} \cdot \partial \mathbf{S} / \partial x_i) = (\mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{R} / \partial x_i) = 0$ и все уравнения (1.8), (1.9), кроме уравнения, содержащего $\partial f_3 / \partial t$, будут выполнены. Останутся 6 уравнений для 6 неизвестных функций g_1, g_2, g_3, f_3, g, G . Окончательно эту определенную систему уравнений запишем в виде

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial t} + (\mathbf{w} \operatorname{grad} f_3) + f_3^2 &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} + g \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\gamma}{\gamma-1} G \frac{\partial g}{\partial x_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ \partial g_3 / \partial t + (\mathbf{w} \operatorname{grad} g_3) + f_3 g_3 &= 0, \\ \partial g / \partial t + (\mathbf{w} \operatorname{grad} g) + (\gamma - 1) g (f_3 + \operatorname{div} \mathbf{w}) &= 0, \\ \partial G / \partial t + (\mathbf{w} \operatorname{grad} G) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что случай $\mathbf{v} = 0$, $(\mathbf{T}_f \cdot \partial \mathbf{P}_f / \partial x_i) = 0$, когда $F g^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = L(t)$ ($L(t)$ — произвольная функция), приводит к переопределенной системе 7 уравнений для 6 функций g_i, f_3, F, G .

Из системы уравнений (1.11) немедленно получаются уравнения, описывающие некоторые частные случаи.

1. Положив $g_2 = 0$ и считая, что все неизвестные функции зависят лишь от x_1, t , получим систему 5 уравнений для плоскопараллельных (плоскость x_1, x_2) течений с линейной зависимостью основных функций от x_3 .

2. Положив в (1.11) $\partial / \partial t = 0$, получим систему уравнений для установившихся пространственных течений.

3. Выпишем в простейшем случае плоскопараллельных установившихся течений систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $g_1(x_1), g_3(x_1), f_3(x_1), g(x_1), G(x_1)$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} g_1 f_3' + f_3^2 &= 0, \quad g_1 g_1' + g G' + \frac{\gamma}{\gamma-1} G g' = 0, \\ g_1 g_3' + f_3 g_3 &= 0, \quad g_1 g' + (\gamma - 1) g (g_1' + f_3) = 0, \quad g_1 G' = 0. \end{aligned}$$

Из первого и третьего уравнений (1.12) следует, что $g_3 = C f_3$, $C = \text{const}$ и, не умаляя общности, можно положить $C = 0$, так как величина C определяет сдвиг начала координат вдоль оси x_3 . Таким образом, в данном случае имеем класс изэнтропических плоских течений ($G = G_0 = \text{const}$), определяемый после интегрирования второго уравнения (1.12) соотношениями

$$(1.13) \quad \begin{aligned} g_1 f_3' + f_3^2 &= 0, \\ \frac{1}{2} g_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} G_0 g &= K_0 > 0 \quad (K_0 = \text{const}), \quad g_1 g' + (\gamma - 1) g (g_1' + f_3) = 0. \end{aligned}$$

Выражая функции g и g_1 через f_3 , получим для f_3 уравнение второго порядка, не содержащее x_1 . Интегрируя его, будем иметь

$$(1.14) \quad f_3^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = K_2 \left(K_1 f_3'^2 - \frac{\gamma-1}{2} f_3^4 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} f_3, \quad K_1 = (\gamma - 1) K_0, \quad K_2 = \text{const}.$$

Переменная x_1 снова не входит в уравнение (1.14), так что система (1.12) интегрируется в квадратурах.

Б. *Линейность по двум координатам.*

Будем искать решения системы (1.1)–(1.3) в виде

$$(1.15) \quad \begin{aligned} u_i &= l_i(x_1, t)x_2 + f_i(x_1, t)x_3 + g_i(x_1, t), \quad i = 1, 2, 3, \\ Q &= l(x_1, t)x_2 + f(x_1, t)x_3 + g(x_1, t), \\ W &= L(x_1, t)x_2 + F(x_1, t)x_3 + G(x_1, t). \end{aligned}$$

После подстановки (1.15) в (1.1)–(1.3) получим 5 соотношений вида

$$(1.16) \quad Ax_2^2 + Bx_2x_3 + Cx_3^2 + Dx_2 + Ex_3 + F = 0,$$

коэффициенты которых зависят лишь от x_1, t . Приравнявая их нулю, получим переопределенную систему 30 уравнений в частных производных для 15 неизвестных функций из (1.15).

Положим

$$l_1 \equiv f_1 \equiv l \equiv f \equiv 0.$$

Тогда все коэффициенты в соотношениях (1.16) при квадратичных членах обратятся в нуль и останется система 15 уравнений для 11 неизвестных функций.

Положив дополнительно

$$L \equiv F \equiv 0,$$

окончательно получим определенную систему 9 уравнений для 9 функций $l_2, l_3, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, g, G$. Ее можно записать в виде

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial t} + g_1 \frac{\partial l_i}{\partial x_1} + l_2 l_i + l_3 f_i &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + g_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + f_2 l_i + f_3 f_i &= 0, \quad \frac{\partial g_i}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + g_2 l_i + g_3 f_i = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + g \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\gamma}{\gamma-1} G \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + (\gamma-1) g \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + l_2 + f_3 \right) &= 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} + g_1 \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0. \end{aligned}$$

Из (1.17) следует, что стационарные пространственные течения вида (1.15) могут быть только изэнтропическими с $G = G_0 = \text{const}$ и описываются системой 8 обыкновенных дифференциальных уравнений.

Все рассмотренные течения А и Б являются вихревыми ($\partial u_1 / \partial x_3 \neq \partial u_3 / \partial x_1$), в стационарных случаях постоянная в интеграле Бернулли зависит от данной линии тока и меняется при переходе к другой линии тока.

2. Рассмотрим вопрос о возможности построения решений с ударными волнами для классов течений А и Б. Пусть по газу, состояние которого описывается системами (1.11) или (1.17), движется ударная волна S и за фронтом ее движение газа снова соответственно принадлежит к классам А или Б. Ясно, что если движение фронта волны описывается общим уравнением $\Phi(x_1, x_2, t) = x_3$, то в случае А 5 скалярных условий Гюгонио, которые должны выполняться вдоль поверхности S , вместе с уравнениями (1.11) по обе стороны S приведут к переопределенной системе 17 уравнений с 13 неизвестными функциями, зависящими от x_1, x_2, t (функцию Φ можно считать неизвестной). Поэтому будем предполагать, что движение поверхности S описывается уравнением $\Psi(x_1, x_2, t) = 0$, т. е. что в каждый момент времени ударная волна является цилиндрической поверхностью в пространстве x_1, x_2, x_3 .

Условия Гюгионо для нашего случая имеют вид [4]

$$(2.1) \quad [\rho(u_n - D)] = 0, \quad \left[\frac{1}{2}(u_n - D)^2 + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} \right] = 0,$$

$$[p + \rho(u_n - D)^2] = 0;$$

$$(2.2) \quad [(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_1)] = 0, \quad [(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)] = 0,$$

где u_n — нормальная к поверхности S составляющая вектора скорости; D — нормальная скорость движения ударной волны; $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ — единичные ортогональные векторы, лежащие в касательной в пространстве x_1, x_2, x_3 к поверхности S плоскости.

Выражения для $u_n, D, \boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ следующие:

$$u_n = (g_1 \Psi_1 + g_2 \Psi_2) (\Psi_1^2 + \Psi_2^2)^{-1/2}, \quad D = -\Psi_t (\Psi_1^2 + \Psi_2^2)^{-1/2},$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\tau}_2 = (\Psi_2, -\Psi_1, 0) (\Psi_1^2 + \Psi_2^2)^{-1/2}, \quad \Psi_k = \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}.$$

Из первого уравнения (2.2) следует, что $[u_3] = 0$, т. е. в силу произвольности x_3

$$(2.3) \quad [f_3] = [g_3] = 0.$$

Оставшиеся условия Гюгионо приводят к соотношениям

$$(2.4) \quad \left[g^{\frac{1}{\gamma-1}} (g_1 \Psi_1 + g_2 \Psi_2 + \Psi_t) \right] = 0,$$

$$\left[\frac{1}{2} \frac{(g_1 \Psi_1 + g_2 \Psi_2 + \Psi_t)^2}{\Psi_1^2 + \Psi_2^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} Gg \right] = 0,$$

$$\left[Gg^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + g^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{(g_1 \Psi_1 + g_2 \Psi_2 + \Psi_t)^2}{\Psi_1^2 + \Psi_2^2} \right] = 0, \quad [g_1 \Psi_2 - g_2 \Psi_1] = 0.$$

Фактически имеем условия Гюгионо, соответствующие обычным двумерным течениям. По заданным с одной стороны ударной волны фоновым значениям g_1, g_2, g, G, g_3, f_3 и заданной функции Ψ условия (2.4) вместе с условиями непрерывности компоненты u_3 (2.3) определяют начальные условия для всех 6 неизвестных функций системы (1.11) вдоль нехарактеристической поверхности $\Psi = 0$. Таким образом, построение течений в классе А с ударными волнами возможно. Конкретный пример такого течения будет рассмотрен ниже.

Пусть теперь для класса решений Б фронт ударной волны является плоским и движение его задается уравнением $\Psi(x_1, t) = 0$ (рассмотрение более общей формы задания фронта приводит к переопределенным системам соотношений на разрыве). В данном случае имеем $u_n = g_1, D = -\Psi_t \Psi_1^{-1}, \boldsymbol{\tau}_1 = (0, 0, 1), \boldsymbol{\tau}_2 = (0, 1, 0)$. Из условий (2.2) в силу произвольности x_2, x_3 получаем (компоненты скорости u_2, u_3 непрерывны)

$$(2.5) \quad [l_2] = [f_2] = [g_2] = [l_3] = [f_3] = [g_3] = 0.$$

Условия же (2.1) имеют вид

$$(2.6) \quad \left[g^{\frac{1}{\gamma-1}} (g_1 + \Psi_t) \right] = 0,$$

$$\left[\frac{1}{2} (g_1 + \Psi_t)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} gG \right] = 0, \quad \left[Gg^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + g^{\frac{1}{\gamma-1}} (g_1 + \Psi_t)^2 \right] = 0.$$

Так же, как и в случае А, задаваясь фоновыми значениями функций класса решений Б и функцией Ψ , с помощью (2.5), (2.6) найдем начальные данные на поверхности S для системы (1.17). Итак, построение разрывных решений класса Б с плоскими ударными волнами возможно.

3. Изучим сначала более подробно решения вида

$$u_1 = g_1(x_1), u_3 = f_3(x_1)x_3, u_2 \equiv 0, Q = g(x_1), W = G_0,$$

описываемые системой (1.13).

Не умаляя общности, выберем систему единиц так, чтобы в (1.13) $K_0 = (\gamma - 1)^{-1}$. После этого решение уравнения (1.14) в параметрическом виде можно представить так ($K_2 > 0$, λ — параметр)

$$(3.1) \quad f_3 = K_2 \left(\lambda^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \lambda^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},$$

$$x_1 = -\frac{1}{K_2} \int \lambda^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} \left(\lambda^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\lambda^2 - \frac{\gamma+1}{2} \right) d\lambda.$$

Интегрируя уравнение линий тока

$$dx_1/g_1 = dx_3/x_3 f_3,$$

где g_1 выражается через f_3 с помощью (1.13), будем иметь вдоль данной линии тока

$$f_3 x_3 = C^* = \text{const.}$$

Таким образом, рассматриваемые течения обладают таким геометрическим свойством: вдоль каждой линии тока компонента вектора скорости u_3 сохраняет постоянное значение. Параметрические представления x_3 вдоль линии тока и функций g , g_1 имеют вид

$$(3.2) \quad x_3 = \frac{C^*}{K_2} \left(\lambda^2 - \frac{\gamma-1}{2} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \lambda^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},$$

$$(3.3) \quad g = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{\lambda^2}, \quad g_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

Из (3.3), так как $g > 0$, следует ограничение на параметр λ

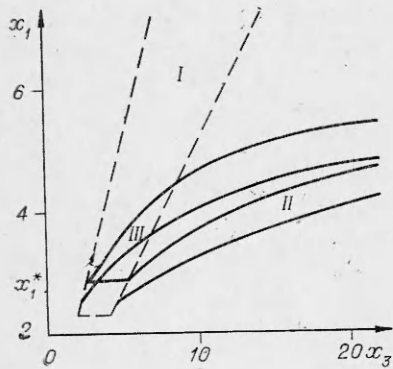
$$\lambda \geq \sqrt{2/(\gamma-1)}.$$

Случай $K_2 < 0$ не реализуется, так как приводит к соотношению $g < 0$. Из (3.1), (3.2) следует, что при $\lambda = \sqrt{(\gamma+1)/2}$ линии тока имеют точку возврата, а при $\lambda \rightarrow \sqrt{2/(\gamma-1)}$ и $\lambda \rightarrow \infty$ уходят на бесконечность. Таким образом, можно построить два типа течений: одно с $\lambda \in (\sqrt{2/(\gamma-1)}, \sqrt{(\gamma+1)/2}]$ и второе $\lambda \in [\sqrt{(\gamma+1)/2}, \infty)$. Первое из них, как следует из (3.3), является течением разрежения, а второе — сжатия. При $\gamma = 3$ интегрирование в (3.1) проводится до конца. Уравнения линий тока таковы

$$(3.4) \quad x_1 = \frac{1}{K_2} \left(\ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \right) + C, \quad C = \text{const},$$

$$x_3 = \frac{C^*}{K_2} \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}.$$

На фигуре при $\gamma = 3$, $K_2 = 1$, $C = 0$ изображены линии тока течения разрежения I в полубесконечном плоском канале при $\lambda \in [\sqrt{2}, 1)$ (стенкам



канала соответствуют $C^* = 1$ и $C^* = 2$) и течение сжатия II при $\lambda \in [\sqrt{2}, \infty)$. В течении разрежения плотность газа на бесконечность падает до нуля.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности перевода течения разрежения I в течение сжатия типа II с помощью ударной волны в условиях постановки задачи из п.2. Пусть фоновые функции в течении разрежения I определяются формулами

$$(3.1) - (3.3), \gamma G_0 = 1 \text{ и при } \lambda^* \in \left(\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}, \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \right) \text{ плоскость } x_1 = x_1^* \text{ соответствует}$$

ударной волне (в условиях Гюгонио (2.4) $\Psi_2 = \Psi_t = 0, \Psi_1 = 1$). Разрешая условия Гюгонио, получим

$$(3.5) \quad g_1^+ = \frac{2\gamma G_0 g^*}{(\gamma+1)g_1^*} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} g_1^*,$$

где индекс $+$ соответствует параметрам газа после прохождения ударной волны, g^* и g_1^* находятся из (3.3) при $\lambda = \lambda^*$. Из (3.5), (3.3) для параметра λ^+ получим

$$\lambda^+ = (\gamma+1)/2\lambda^* > \sqrt{(\gamma+1)/2},$$

т. е. после прохождения ударной волны течение принадлежит к типу II с $\lambda \in [\lambda^*, \infty)$. Выбирая в (3.4) значения постоянных C и K_2 так, чтобы обеспечить непрерывность линий тока при $x_1 = x_1^*$, получим течение газа с ударной волной $x_1 = x_1^*$ в полубесконечном плоском канале сначала при $x_1 < x_1^*$ расширяющимся, а при $x_1 > x_1^*$ — сужающимся. При $x_1 > x_1^*$ в нем реализуется течение сжатия, в котором

$$\rho^+/\rho^* = 2/(\gamma+1)\lambda^{*2} > 1.$$

На фигуре при $\gamma = 3, \lambda^* = 1,1$ показан такой канал, цифра III соответствует зоне сжатия в этом канале.

Рассмотрим теперь изэнтропические течения Б, описываемые уравнениями (1.17) с $G = G_0 = \text{const}$. Построим специальный класс решений этой системы, положив

$$(3.6) \quad g_1 = G_1(\xi), \quad g_k = G_k(\xi) + tT_k(\xi), \quad l_k = L_k(\xi), \quad f_k = F_k(\xi), \quad k=2, 3, \\ g = G(\xi), \quad \xi = x_1 - at, \quad a = \text{const}, \quad H = G_1 - a.$$

После подстановки (3.6) в (1.17) и приравнивания нулю коэффициентов при t и свободных членов получаем систему 10 обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной ξ для 10 функций G, H, G_k, T_k, L_k, F_k следующего вида:

$$(3.7) \quad HH' + \frac{1}{\gamma-1} G' = 0, \quad HL'_k + L_2L_k + L_3F_k = 0, \\ HF'_k + F_2L_k + F_3F_k = 0, \quad HG'_k + G_2L_k + G_3F_k + T_k = 0, \\ HT'_k + T_2L_k + T_3F_k = 0, \quad \frac{1}{\gamma-1} HG' + GH' + G(L_2 + F_3) = 0.$$

Задавая начальные данные для системы (3.7) такие, что

$$(3.8) \quad H(\xi_0) \neq 0, \quad H^2(\xi_0) - G(\xi_0) \neq 0,$$

и разрешая систему (3.7) относительно производных, получаем, что задача Коши, поставленная при $\xi = \xi_0$, при выполнении условий (3.8) имеет единственное решение в окрестности точки ξ_0 . Компоненты вектора скорости и квадрат скорости звука θ имеют при этом вид

$$(3.9) \quad \begin{aligned} u_1 &= G_1(\xi), \quad \theta = \theta(\xi), \\ u_k &= G_k(\xi) + tT_k(\xi) + x_2L_k(\xi) + x_3F_k(\xi), \quad k = 2, 3. \end{aligned}$$

Система (3.7) порождает класс нестационарных вихревых течений газа. Эти решения представляют интерес в следующем соотношении. В газовой динамике определенной роль играет класс течений с вырожденным годографом скоростей, когда четырехмерной области определения течения в физическом пространстве x_1, x_2, x_3, t соответствует в пространстве u_1, u_2, u_3, θ многообразие меньшей размерности. Ясно, что решения (3.9) имеют вырожденный годограф, так как u_1 и θ функционально зависимы. Подсчитывая детерминант

$$I = \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = H'(L_2F_3 - L_3F_2),$$

убеждаемся, что если при $\xi = \xi_0$ $H'(\xi_0) \neq 0$, $(L_2F_3 - L_3F_2)(\xi_0) \neq 0$, то соответствующее течение является тройной волной [5].

В потенциальном случае [5] построение нетривиальных решений в классе тройных волн требует анализа громоздкой переопределенной системы уравнений в частных производных. Известен лишь один содержательный класс таких решений [6].

Из (3.9) следует, что многообразием уровня всех газодинамических величин являются прямые линии в пространстве x_1, x_2, x_3, t . Действительно из (3.9) получаем, что такое многообразие определяется пересечением трех гиперплоскостей ($\xi = \text{const}$ — уравнение одной из них). При этом прямые линии уровня при условиях $G_1 \neq 0$, $I \neq 0$, вообще говоря, не проходят через одну фиксированную точку пространства x_1, x_2, x_3, t , т. е. течение не является коническим. Таким образом, построенное решение является неконической вихревой тройной волной с прямолинейными образующими.

Проверка решения на неконичность существенна, так как существование вихревых конических автомодельных тройных волн сразу же тривиальным образом следует из уравнений газовой динамики. Построенный тип решений доказывает непустоту класса неконических вихревых тройных волн (полное описание этого класса течений в настоящее время отсутствует).

Классификация течений, обладающих прямолинейными линиями уровня, для плоского нестационарного случая дана в [7], а для стационарного пространственного случая — в [8]. Для нестационарных пространственных течений такая классификация отсутствует. При этом в исследованных случаях оказалось, что вихревые неконические течения рассматриваемых классов — двойные волны — существуют лишь в исключительном случае при показателе адиабаты $\gamma = 2$. Построенное решение (3.9) показывает, что в неустановившихся пространственных течениях эта ситуация не имеет места и вихревые неконические тройные волны с прямолинейными линиями уровня существуют при любых γ .

Поступила 3 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. — ДАН СССР, 1956, т. 111, № 1.
2. Богоявленский О. И., Новиков С. П. Однородные модели в общей теории относительности и газовой динамике. — УМН, 1976, т. XXXI, вып. 5(191)

3. Rosenhead L. Laminar Boundary layers. Oxford, Clarendon Press, 1963.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954.
5. Сидоров А. Ф. О нестационарных потенциальных движениях политропного газа с вырожденным годографом.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
6. Сидоров А. Ф. О точных решениях уравнений газовой динамики типа тройной волны.— ДАН СССР, 1970, т. 194, № 4.
7. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками.— ДАН СССР, 1958, т. 123, № 5.
8. Зубов Е. Н. О пространственных установившихся течениях идеального газа с вырожденным годографом при наличии интеграла Бернулли.— Труды Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Методы решения краевых задач механики сплошной среды, 1978, вып. 25.

УДК 536.24

АНАЛИЗ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИ В ТЕРМОГИДРОДИНАМИКЕ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СИСТЕМ

С. С. Кутателадзе

(Новосибирск)

Рассматриваются фундаментальные числа подобия теплообмена и динамики газожидкостных систем, включая эффекты изменения агрегатного состояния среды и потери устойчивости структуры.

Введение. Михаил Алексеевич Лаврентьев— великий мастер придумывать отчетливые и эффективные физико-математические модели гидродинамики.

В термогидродинамике многофазных систем вследствие большого числа действующих факторов и множественности структур потока такие модели имеют особенно большое значение. Поэтому я надеюсь, что компактное изложение некоторых результатов такого рода будет ему импонировать.

Динамика газожидкостных систем и перенос в них энергии, особенно при фазовых переходах, являются, пожалуй, наиболее сложными проблемами термомеханики и механики текучих сред.

Наиболее существенны здесь следующие обстоятельства:

1. Многообразие динамических структур и переменность спонтанно возникающих образований (пузырей, капель, пленок, струй) в пространстве и времени.

2. Волновые эффекты на границах раздела фаз и в собственно смеси, связанные с проявлением поверхностного натяжения и существенной зависимостью скорости прохождения сигнала и его деформаций от концентрации компонент и структуры их элементов.

3. Влияние термогидродинамики первичных актов зарождения новой фазы и распределения центров ее конденсации на границах и внутри потока.

4. Возможность возникновения состояний, существенно метастабильных в термодинамическом смысле.

5. Усложнение турбулентных переносов, связанное с особенностями течения в элементах каждой из фаз и тем, что часто называют межфазовой турбулентностью.

6. Возможность квазитурбулентных состояний ламинарного несущего потока вследствие осцилляций дисперсных элементов другой фазы.

Внутренние линейные масштабы, возникающие при наличии границы раздела фаз. В теории однофазного пограничного слоя играют большую роль внутренние динамические линейные размеры, построенные по импульсу и плотности потока энергии (толщина потери импульса, толщина потери энергии, толщина вытеснения). В системах с границами раздела фаз возникают внутренние характерные размеры, связанные с взаимодействием внешних полей и поверхностных эффектов.