

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ
В СВЯЗАННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий

(Пермь)

Конвекция проводящей жидкости в вертикальных каналах в магнитном поле изучалась в ряде работ (см. обзор [1]). В этих работах рассматривалось движение в одиночных каналах. В данной работе решается задача о конвекции в системе двух связанных плоских вертикальных каналов. Получено решение задачи о стационарном движении при подогреве сбоку. Исследована также устойчивость равновесия подогреваемой снизу жидкости (магнитогидродинамическое обобщение задачи, рассмотренной ранее [2]).

1. Стационарное движение. Два параллельных плоских вертикальных канала шириной $2h$, разделенных диэлектрической прослойкой толщины $2(d-h)$ (см. фиг. 1), заполнены проводящей жидкостью и помещены во внешнее магнитное поле H_0 , перпендикулярное границам каналов. Внешние границы каналов поддерживаются при постоянных температурах $\pm\Theta$. Каналы сообщаются сверху и снизу, так что при конвекции жидкость может подниматься в одном канале и опускаться в другом (модель средней части длинной конвективной петли). Уравнения конвекции проводящей жидкости в магнитном поле имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho_0}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} + \nu\Delta\mathbf{v} - g\beta T \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad (1.3)$$

(все обозначения обычные). Будем искать стационарное решение системы (1.1) — (1.3) следующего вида:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x), \quad T = T(x) \\ H_x = H_0, \quad H_y = 0, \quad H_z = H(x), \quad p = p(x, z) \quad (1.4)$$

Для скорости v , температуры T , индуцированного поля H и давления p получим уравнения

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = \frac{1}{4\pi\rho_0}H_0H' + \nu v'' + g\beta T, \quad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = 0 \quad (1.5)$$

$$H_0v' + \frac{c^2}{4\pi\sigma}H'' = 0, \quad T'' = 0, \quad T_m'' = 0, \quad H_m'' = 0 \quad (1.6)$$

Здесь T_m и H_m — температура и индуцированное поле в твердой непроводящей прослойке между каналами; штрихом обозначено дифференцирование по x .

В уравнениях (1.5) — (1.6) перейдем к безразмерной форме, приняв в качестве единиц расстояния, скорости, температуры и поля соответственно h , ν/h , Θ и H_0 . Для безразмерных скорости, температуры и поля получим

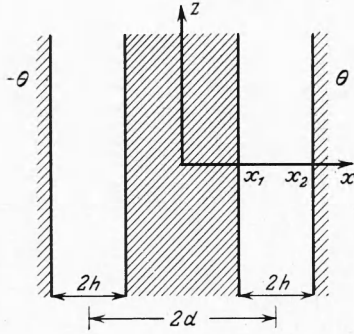
$$v'' + GT + M^2P_m^{-1}H' = C \quad (1.7)$$

$$H'' + P_mv' = 0, \quad T'' = 0, \quad T_m'' = 0, \quad H_m'' = 0 \quad (1.8)$$

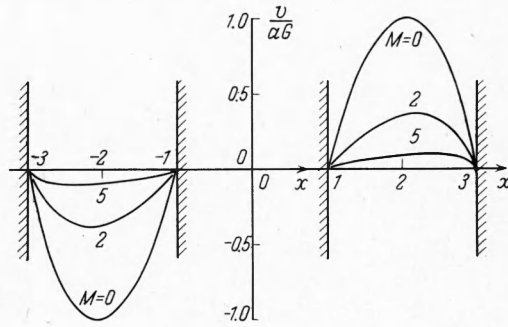
Здесь C — постоянная разделения переменных. В уравнения входят три безразмерных параметра: число Грасгофа G , число Гартмана M и магнитное число Прандтля P_m , равные

$$G = \frac{\xi_0^2 \Theta k^3}{\nu^2}, \quad M = \frac{H_0 h}{c} \left(\frac{\sigma}{\rho_0 \nu} \right)^{1/2}, \quad P_m = \frac{4\pi \xi \nu}{c^2} \quad (1.9)$$

На границах каналов скорость жидкости обращается в нуль; температура на внешних границах задана, а на границах каналов с прослойкой непрерывны температура и тепловой поток; индуцированное поле



Фиг. 1



Фиг. 2

исчезает на внешних границах и непрерывно на границах жидкость — прослойка. Таким образом, граничные условия таковы:

$$v = 0, \quad T = T_m, \quad \lambda T' = T_m', \quad H = H_m \quad \text{при } x = x_1 = \pm \frac{d-h}{h} \quad (1.10)$$

$$v = 0, \quad T = \pm 1, \quad H = 0 \quad \text{при } x = x_2 = \pm \frac{d+h}{h} \quad \left(\lambda = \frac{\kappa}{\kappa_m} \right)$$

Здесь и в дальнейшем знаки плюс и минус относятся соответственно к правому и левому каналам; κ и κ_m — теплопроводности жидкости и прослойки.

Решая линейные уравнения (1.7)—(1.8) с граничными условиями (1.10) и учитывая замкнутость потока (расход жидкости по сечению обоих каналов равен нулю), получим распределения температуры, скорости и поля

$$T_m = a\lambda x, \quad T = a [(\lambda - 1)x_1 + x], \quad a = (2 + \lambda |x_1|)^{-1} \quad (1.11)$$

$$v = \frac{aG}{M^2} \left[x - \frac{x_1 \operatorname{sh} M(x_2 - x)}{\operatorname{sh} M(x_2 - x_1)} - \frac{x_2 \operatorname{sh} M(x - x_1)}{\operatorname{sh} M(x_2 - x_1)} \right] \quad (1.12)$$

$$H = \frac{aGP_m}{M^2} \left\{ \frac{x_2^2 - x^2}{2} + \frac{x_1 [1 - \operatorname{ch} M(x_2 - x)]}{M \operatorname{sh} M(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 [\operatorname{ch} M(x - x_1) - \operatorname{ch} M(x_2 - x_1)]}{M \operatorname{sh} M(x_2 - x_1)} \right\} \quad (1.13)$$

$$H_m = \frac{aGP_m}{M^2} \left\{ \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + \frac{(x_1 + x_2) [1 - \operatorname{ch} M(x_2 - x_1)]}{M \operatorname{sh} M(x_2 - x_1)} \right\} \quad (1.14)$$

Как видно из (1.11), распределение температуры не зависит от поля.

Профили скорости в случае, когда толщина прослойки равна ширине канала (т. е. $|x_1| = 1$), для нескольких значений числа Гартмана M приведена на фиг. 2. Скорость в отсутствие поля получается из (1.12) в пределе при $M \rightarrow 0$

$$v = \frac{aG}{6(x_2 - x_1)} [x(x_2 - x_1)^3 - x_1(x_2 - x)^3 - x_2(x - x_1)^3] \quad (1.15)$$

Как видно, интенсивность движения определяется параметром $aG = G(2 + \lambda|x_1|)^{-1}$. С ростом поля движение замедляется и в течении образуются гартмановские пограничные слои у стенок. Заметим, однако, что профиль скорости в каждом канале по форме отличается от известного профиля в задаче Гартмана, что объясняется неоднородностью массовой (конвективной) силы по сечению канала.

Индукционное поле — четная функция поперечной координаты x . Плотность индуцированного тока в жидкости $\mathbf{j} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \mathbf{H}$ может быть распределена по сечению каналов так же, как скорость.

В рассматриваемом течении имеет место конвективный перенос тепла вверх вдоль каждого из каналов. Полный тепловой поток (на единицу длины вдоль оси y) определяется формулой

$$Q = \rho c_p \int v T dx \quad (1.16)$$

Здесь v и T — размерные скорость и температура, c_p — теплоемкость жидкости, а интегрирование проводится по сечениям обоих каналов.

После подстановки v и T в (1.16) находим

$$Q = \frac{4\rho c_p g \beta \Theta^2 h^3}{(2 + \lambda x_1)^2 v M^2} \left[x_1(x_1 + 1)(\lambda - 1) \left(1 - \frac{\operatorname{th} M}{M}\right) + \frac{1}{3}(3x_1^2 + 6x_1 + 4) - x_1(x_1 + 2) \frac{\operatorname{th} M}{M} - \frac{2 \operatorname{cth} 2M}{M} + \frac{1}{M^2} \right] \quad (1.17)$$

Тепловой поток убывает с ростом поля. При слабых полях ($M \ll 1$) из (1.17) находим

$$Q = Q_0 \left[1 - \frac{2}{21} \frac{64 + 63x_1 + 63x_1(x_1 + 1)\lambda}{16 + 15x_1 + 15x_1(x_1 + 1)\lambda} M^2 + \dots \right] \quad (1.18)$$

$$Q_0 = \frac{4}{45} \frac{\rho c_p g \beta \Theta^2 h^3}{v} \frac{16 + 15x_1 + 15x_1(x_1 + 1)\lambda}{(2 + \lambda x_1)^2}$$

Здесь Q_0 — тепловой поток в отсутствие поля. При сильных полях

$$Q = \frac{4\rho c_p g \beta \Theta^2 h^3}{(2 + \lambda x_1)^2 v} \left[\frac{4}{3} + x_1 + \lambda x_1(x_1 + 1) \right] \frac{1}{M^2} \quad (M \gg 1) \quad (1.19)$$

(в формулах (1.17) — (1.19) величина x_1 считается положительной).

Приведенные в этом параграфе формулы при $|x_1| \rightarrow 0$ переходят в соответствующие формулы для одиночного канала, найденные ранее [3].

2. Устойчивость равновесия. Рассмотрим теперь устойчивость равновесия проводящей жидкости в связанных вертикальных каналах при наличии поперечного магнитного поля. Если жидкость подогревается снизу, то в состоянии равновесия температура $T_0 = -Az$, где A — равновесный градиент температуры. Нормальные возмущения зависят от времени по закону $\exp(-\delta t)$, причем при наличии магнитного поля декремент возмущений δ будет, вообще говоря, комплексной величиной. При этом нарушение равновесия жидкости, подогреваемой снизу, может происходить в результате развития как монотонных, так и колебательных возмущений. Однако, как известно (см. [4,5]), кризис равновесия по отношению к колебательным возмущениям возможен лишь при выполнении неравенства $P_m > P$ ($P = \nu/\chi$ — число Прандтля), которое в лабораторных условиях, как правило, не реализуется. Поэтому наибольший интерес представляет исследование устойчивости по отношению к монотонным возмущениям, для которых δ — величина вещественная и обращается в нуль на границе устойчивости. Именно этот случай рассмотрен ниже.

Относительно структуры возмущений предполагаем¹: (2.1)

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x), \quad H_x = H_y = 0, \quad H_z = H(x), \quad T = T(x), \quad \nabla p = 0$$

Уравнения для возмущений запишем в безразмерных переменных. В задаче об устойчивости удобно выбрать в качестве единиц расстояния, скорости, температуры и поля соответственно h , χ/h , Ah и $4\pi\sigma\chi H_0 c^{-2}$. Безразмерные уравнения стационарных возмущений тогда имеют вид

$$\begin{aligned} v'' + RT + M^2 H' &= 0, \quad T'' + v = 0, \quad H'' + v' = 0 \\ T_m'' &= 0, \quad H_m'' = 0 \quad (R = g\beta Ah^4/\nu\chi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь число Релея R определено теперь через равновесный градиент температуры. Уравнения для возмущений будем решать при условиях:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad T = T_m, \quad \lambda T' = T_m', \quad H = H_m & \text{ при } x = x_1 \\ v = 0, \quad T' = 0, \quad H = 0 & \text{ при } x = x_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Кроме того, должно быть выполнено условие замкнутости потока. Отличие от граничных условий (1.10), при которых решена задача о стационарной конвекции в случае подогрева сбоку, состоит в том, что теперь предположено отсутствие горизонтального теплового потока во внешних областях массива.

Как и в случае отсутствия поля [2], данная задача имеет решения двух типов. В решениях первого типа, которые далее будут называться «нечетными», скорость и температура — нечетные, а поле — четная относительно начала координат функции. В «четных» решениях, напротив, скорость и температура — четные, а поле — нечетная функции.

Приведем вначале «нечетные» решения задачи (2.2) — (2.3)

$$\begin{aligned} v &= \pm \left[\frac{\cos q(x_2 - x) - \operatorname{ch} p(x_2 - x)}{\cos q(x_2 - x_1) - \operatorname{ch} p(x_2 - x_1)} - \frac{q \sin q(x_2 - x) + p \operatorname{sh} p(x_2 - x)}{q \sin q(x_2 - x_1) + p \operatorname{sh} p(x_2 - x_1)} \right] \\ T &= \pm \left[\frac{q^{-2} \cos q(x_2 - x) + p^{-2} \operatorname{ch} p(x_2 - x)}{\cos q(x_2 - x_1) - \operatorname{ch} p(x_2 - x_1)} - \frac{q^{-1} \sin q(x_2 - x) - p^{-1} \operatorname{sh} p(x_2 - x)}{q \sin q(x_2 - x_1) + p \operatorname{sh} p(x_2 - x_1)} \right] \\ H &= \pm \left[\frac{q^{-1} \sin q(x_2 - x) - p^{-1} \operatorname{sh} p(x_2 - x)}{\cos q(x_2 - x_1) - \operatorname{ch} p(x_2 - x_1)} + \frac{\cos q(x_2 - x) - \operatorname{ch} p(x_2 - x)}{q \sin q(x_2 - x_1) + p \operatorname{sh} p(x_2 - x_1)} \right] \\ H_m &= 2 \frac{1 + (p^2 - q^2)(2pq)^{-1} \operatorname{sh} 2p \sin 2q - \operatorname{ch} 2p \cos 2q}{(\cos 2q - \operatorname{ch} 2p)(q \sin 2q + p \operatorname{sh} 2p)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$T_m = \dot{H}_m \lambda x, \quad p = \left\{ \left[R + \left(\frac{M^2}{2} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{M^2}{2} \right\}^{1/2}, \quad q = \left\{ \left[R + \left(\frac{M^2}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{M^2}{2} \right\}^{1/2}$$

(знаки «плюс» и «минус» относятся соответственно к правому и левому каналам). Критические значения чисел Релея, определяющие границы устойчивости равновесия относительно нечетных возмущений, находятся из характеристического соотношения

$$\frac{p^2 + q^2}{2p^2 q^2} \frac{p \operatorname{th} 2p + q \operatorname{tg} 2q}{\operatorname{sech} 2p \sec 2q - 1 + (p^2 - q^2)(2pq)^{-1} \operatorname{th} 2p \operatorname{tg} 2q} = \lambda |x_1| \quad (2.5)$$

В случае «четных» решений поле в неэлектропроводной прослойке отсутствует, а температура постоянна

$$H_m' = 0, \quad T_m = \frac{p^2 + q^2}{p^2 q^2} \frac{q \operatorname{ch} 2p \sin 2q + p \operatorname{sh} 2p \cos 2q}{(\cos 2q - \operatorname{ch} 2p)(q \sin 2q + p \operatorname{sh} 2p)} \quad (2.6)$$

¹ Здесь не рассматриваются возмущения, периодические вдоль оси y . Как известно, в случае слоя бесконечной протяженности по направлению y критическое число Релея стремится к нулю при увеличении длины волны возмущений [6, 7].

Скорость, температура и поле в жидкости описываются формулами (2.4) со знаком «плюс», общим для обоих каналов. Спектр критических чисел Рейля для «четных» решений определяется соотношениями

$$p \operatorname{th} r + q \operatorname{tg} q = 0, \quad q \operatorname{th} p - p \operatorname{tg} q = 0 \quad (2.7)$$

Два соотношения (2.7) отвечают возмущениям, в которых скорость и температура соответственно нечетные и четные функции относительно середины каждого канала.

Соотношения (2.5) и (2.7) определяют спектр критических чисел Рейля. В «нечетном» случае критические числа R зависят от двух параметров: числа Гартмана M и параметра $\lambda |x_1|$, характеризующего тепловую связь каналов. В случае же «четных» решений критические числа R зависят только от числа Гартмана; зависимость от $\lambda |x_1|$ отсутствует, так как в этом случае нет теплового взаимодействия между конвективными потоками в каналах; в каждом из каналов происходит «автономная» циркуляция. Спектр критических чисел R при отсутствии поля найден и обсужден ранее [2].

Наибольший интерес представляет нижний критический уровень неустойчивости.

Как оказывается, ему соответствует первое из решений нечетного типа. На фиг. 3 представлена зависимость наименьшего критического числа Рейля от параметра связи $\lambda |x_1|$ при нескольких значениях числа Гартмана M . Сувеличением $\lambda |x_1|$ (по мере ослабления тепловой связи каналов) критическое число Рейля уменьшается и стремится к нулю при $\lambda |x_1| \rightarrow \infty$. Магнитное поле, как обычно, оказывает стабилизирующее действие: при фиксированном $\lambda |x_1|$ критические числа Рейля растут с увеличением поля.

Критические числа Рейля, соответствующие «четным» решениям, также возрастают с ростом поля. Так, для решений антисимметричных относительно середины канала (первое из соотношений (2.7)) имеем

$$R = R_0 + r \operatorname{th} r (r \operatorname{th} r - 1) M^2 + \dots \quad (M \ll 1) \quad (2.8)$$

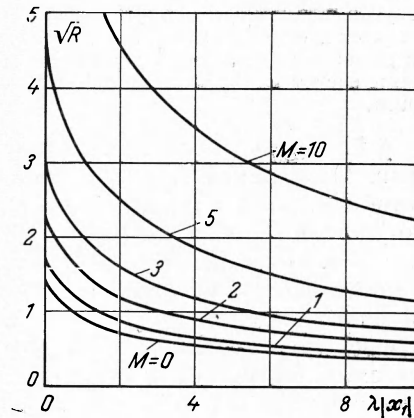
Здесь $r = R_0^{1/4}$ — корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} r + \operatorname{th} r = 0$ ($r = 2.365, 5.498, 8.639 \dots$). Для симметричных решений (второе из соотношений (2.7))

$$R = R_0 + \frac{r(r - \operatorname{th} r)}{\operatorname{th}^2 r} M^2 + \dots \quad (M \ll 1) \quad (2.9)$$

Здесь $r = R_0^{1/4}$ определяется из уравнения $\operatorname{tg} r - \operatorname{th} r = 0$ ($r = 3.927, 7.069, 10.21 \dots$).

В случае сильных полей ($M \gg 1$) из (2.7) находим

$$R = 1/4n^2\pi^2 M^2 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (2.10)$$



Фиг. 3

Поступила 18 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Р е г и р е р С. А. Ламинарные течения проводящей жидкости в трубах и каналах при наличии магнитного поля. Магнитная гидродинамика, 1965, № 1.
2. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М., Ш а й д у р о в Г. Ф. О конвективной неустойчивости жидкости в связанных вертикальных каналах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. М. Стационарное конвективное движение электропроводящей жидкости между параллельными плоскостями в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 34, № 3.
4. Г е р ш у н и Г. З., Ж у х о в и ц к и й Е. И. О спектре конвективной неустойчивости проводящей среды в магнитном поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 42, № 4.
5. Ш л и о м и с М. И. Об устойчивости вращающейся и подогреваемой снизу жидкости относительно периодических по времени возмущений. ПММ, 1962, т. 26.
6. Ж у х о в и ц к и й Е. М. Об устойчивости неравномерно нагретой жидкости в вертикальном эллиптическом цилиндре. ПММ, 1955, т. 19, вып. 6.
7. Y i h C h i a-S h u n. Gravitational instability of a viscous fluid in a magnetic field. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 3.