

Ю. С. Русаков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СТРУКТУРЫ И МАССООБМЕНА ТУРБУЛЕНТНОГО ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

1. Введение. Турбулентные вихревые кольца формируются при числах Рейнольдса, больших 10^3 , по прошествии сравнительно малопротяженных стадий ламинарного течения и неустойчивости [1]. К настоящему времени известны результаты исследований структуры течения в ламинарных кольцах [2]. Турбулентные вихревые кольца, несмотря на то что они представляют интерес для решения некоторых практических задач [3, 4], рассматривались в основном качественно [5].

В настоящей работе получен ряд экспериментальных результатов о структуре турбулентного вихревого кольца и его массообмене с окружающей средой. Определены и проанализированы спектры пульсаций продольной составляющей скорости потока и интенсивность турбулентности в нескольких областях атмосферы вихря. Рассмотрен процесс формирования и эволюции под действием турбулентной диффузии в вихревом кольце профиля концентрации консервативной пассивной примеси. Изучена интенсивность массообмена турбулентного вихревого кольца с окружающей средой. Непосредственная практическая ценность проведенных исследований состоит в обеспечении возможности прогнозирования рассеяния акустических и радиоволн на неоднородностях показателя преломления в вихревом кольце, в частности, для целей зондирования атмосферы [3].

2. Описание эксперимента. Формирование вихревого кольца производилось классическим образом — путем импульсного выталкивания определенной порции воздуха из цилиндрического насадка, установленного на одном из оснований герметичной емкости. Длина насадка и его внутренний диаметр составляли 0,14 и 0,075 м. Для выталкивания воздуха из насадка использовался пневматический клапан, закрепленный на противоположном основании емкости и открываемый в требуемый момент времени. Начальные скорость формируемых вихревых колец 8 м/с и диаметр 0,1 м поддерживались в опытах постоянными с точностью ± 5 и $\pm 3\%$ соответственно (величины доверительных интервалов, указанных в работе, представлены с 90 %-й надежностью). Скорость воздушных потоков в окружающей среде в среднем не превышала 0,03 м/с. Этим обеспечивались прямолинейность трассы вихревого кольца и его попадание на однородные датчики температуры и скорости, установленные на расстоянии до 2 м от генератора колец. Непосредственно за датчиками располагалась мишень, состоящая из поля флагков, закрепленных на проволочном каркасе в неустойчивом положении, позволявшая проконтролировать координаты кольца с точностью $\pm 0,003$ м в момент прохождения им датчиков. Сигнал с датчиков после его трансформации в аппаратуре Disa записывался на звуковую дорожку, а с использованием осциллографа и видеокамеры — на видеодорожку видеомагнитофона. Первый вид записи применялся для определения с помощью перестраиваемого полосового фильтра спектра турбулентных пульсаций, второй —

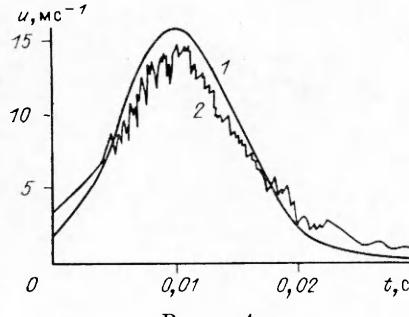


Рис. 1

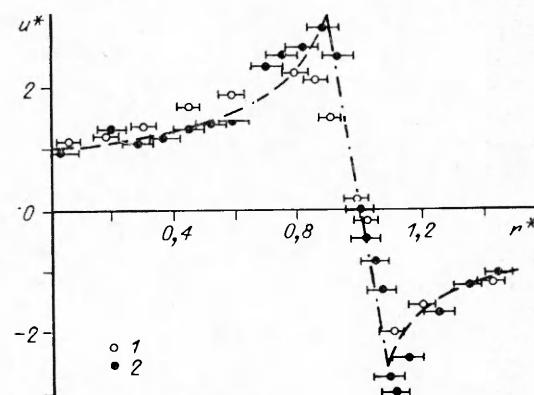
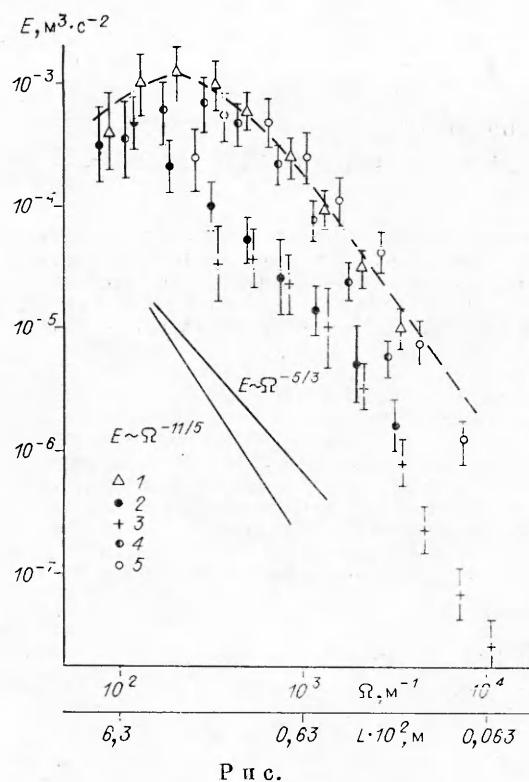


Рис. 2



чтобы он мог одновременно реагировать на осевую и поперечную составляющие скорости потока. Следует отметить, что регулярные профили скорости в идентичных сечениях вихря для его ламинарной и турбулентной стадий движения испытывали небольшие изменения. Одной из возможных иллюстраций к последнему является рис. 2, где в системе координат, движущейся со скоростью вихревого кольца, представлены отдельные реализации измеренных значений скорости потока в его экваториальной плоскости для ламинарной и турбулентной (точки 1, 2) стадий на расстояниях 0,3 и 1,0 м от генератора соответственно. По оси абсцисс отложены приведенные к радиусу кольца расстояния от его оси r^* , по оси ординат — приведенные к поступательной скорости движения кольца значения скорости потока u^* (учитывалось, что в экваториальной плоскости вихревого кольца поперечные потоки отсутствуют). Для ламинарной стадии скорость движения u_0 и радиус R кольца равнялись 8,0 м/с и $5 \cdot 10^{-2}$ м, для турбулентной стадии — 7,5 м/с и $5,2 \cdot 10^{-2}$ м. Экспериментальные результаты, представленные на рис. 2, позволяют не только судить о величине скоростей потока в турбулентном вихревом кольце как функции r^* , но и подтвердить примерно одинаковый характер профилей 1 и 2. Сходство профилей, получаемых одноточечным датчиком скорости, — важный факт, позволяющий не проводить трудоемкого измерения пространственного поля скоростей в турбулентном вихревом кольце, а для инженерных оценок воспользоваться известными экспериментальными результатами о поле скоростей в ламинарном вихре [2].

Основное внимание при анемометрических исследованиях в настоящей работе уделено выявлению турбулентной структуры вихревого кольца. Визуальный просмотр десятков осциллограмм, полученных для идентичных сечений турбулентных вихрей, но для разных реализаций и расстояний от генератора, показал их большое сходство не только в регулярных профилях, но и в структуре турбулентности. Из анализа осциллограмм, подобных приведенным на рис. 1, следует, что переход от ламинарного течения перед вихревым кольцом к интенсивной турбулент-

сти для визуального анализа профилей скорости и температуры в вихревом кольце.

3. Результаты анемометрических измерений. Переход от ламинарной стадии движения вихревого кольца к турбулентной происходил на расстоянии 6–8 диаметров насадка от генератора и проявлялся в том, что на первоначально гладком профиле скорости в вихревом кольце возникали высокочастотные пульсации. На рис. 1 приведены типичные (по форме кривой, характеру и интенсивности пульсаций) осциллограммы квадрата разности выходного и опорного напряжений с анемометра, эквивалентные после умножения на калибровочный коэффициент профлю скорости потока u вдоль оси вихревого кольца для его ламинарной и турбулентной (линии 1, 2) стадий движения. Датчик анемометра при этом устанавливался таким образом,

на осевую и поперечную составляющие скорости потока. Следует отметить, что регулярные профили скорости в идентичных сечениях вихря для его ламинарной и турбулентной стадий движения испытывали небольшие изменения. Одной из возможных иллюстраций к последнему является рис. 2, где в системе координат, движущейся со скоростью вихревого кольца, представлены отдельные реализации измеренных значений скорости потока в его экваториальной плоскости для ламинарной и турбулентной (точки 1, 2) стадий на расстояниях 0,3 и 1,0 м от генератора соответственно. По оси абсцисс отложены приведенные к радиусу кольца расстояния от его оси r^* , по оси ординат — приведенные к поступательной скорости движения кольца значения скорости потока u^* (учитывалось, что в экваториальной плоскости вихревого кольца поперечные потоки отсутствуют). Для ламинарной стадии скорость движения u_0 и радиус R кольца равнялись 8,0 м/с и $5 \cdot 10^{-2}$ м, для турбулентной стадии — 7,5 м/с и $5,2 \cdot 10^{-2}$ м. Экспериментальные результаты, представленные на рис. 2, позволяют не только судить о величине скоростей потока в турбулентном вихревом кольце как функции r^* , но и подтвердить примерно одинаковый характер профилей 1 и 2. Сходство профилей, получаемых одноточечным датчиком скорости, — важный факт, позволяющий не проводить трудоемкого измерения пространственного поля скоростей в турбулентном вихревом кольце, а для инженерных оценок воспользоваться известными экспериментальными результатами о поле скоростей в ламинарном вихре [2].

ности в нем осуществляется достаточно резко на расстояниях, меньших 0,1 его радиуса. В то же время уменьшение интенсивности турбулентности за вихревым кольцом происходит медленно, что свидетельствует о наличии у него турбулентного следа. Вероятно неожиданно то, что пульсации продольной (совпадающей с направлением вектора средней скорости) составляющей скорости в атмосфере вихря внешне имеют приближенно моногармонический характер, а крупномасштабные (соизмеримые с диаметром вихря) практически отсутствуют. Такое «естественное» масштабное разделение вихревой (регулярной) и турбулентной составляющих скорости потока в вихревом кольце позволяет адекватно применять спектральный анализ турбулентных пульсаций.

На рис. 3 в логарифмических координатах представлены волновые спектры пульсаций продольной составляющей скорости потока $E(\Omega)$ в нескольких областях вихревого кольца с примерно однородной турбулентностью и непосредственно за ним по прохождении кольцом расстояния 1 м от генератора. Цифры 1—3 — спектры, относящиеся к приосевым областям вихревого кольца ($r^* \approx 0$) для его передней, задней половины и следа соответственно, 4 и 5 — к областям вихревого кольца с $r^* \approx 0,5$ и 1,2. При восстановлении спектров использовалось обычное предположение о «замороженности» турбулентности. Пространственная протяженность реализаций с учетом средней скорости потока и времени пересечения датчиком исследуемой области для спектров 1, 2, 4 приближенно равнялась диаметру вихревого кольца, а для спектров 3, 5 была в 3 раза меньше. Ограниченнность реализаций приводила к известным относительным погрешностям определения спектра [6], достигающим для наиболее низких из исследованных в эксперименте волновых чисел 100 %. Повторяемость спектров для различных вихревых колец достаточно высока. Среднеквадратичный разброс экспериментальных данных для соответствующих областей кольца составил 20 \div 40 % при 3—4 реализациях.

Остановимся на выводах, полученных в результате анализа спектров, имеющих, по-видимому, общий для турбулентных вихревых колец характер. Во-первых, все спектры в первом приближении подобны между собой, и в диапазоне исследованных значений волновых чисел Ω их можно аппроксимировать простым выражением

$$(3.1) \quad E(\Omega) = E_m \left(\frac{\Omega}{\Omega_m} \right)^2 \frac{4}{[1 + (\Omega/\Omega_m)^2]^2},$$

где E_m и Ω_m — максимальные значения спектральной плотности турбулентной энергии и соответствующие им волновые числа для спектров 1—5.

Для иллюстрации на рис. 3 штриховой линией представлен расчет по (3.1) для спектра 1. Достоинство выбранной аппроксимации — возможность проведения аналитических оценок характеристик турбулентности в вихревом кольце. В частности, для продольной корреляционной функции $H(L)$ получим

$$H(L) = 2 \int_0^\infty E \cos \Omega L dL = 2\pi E_m \Omega_m (1 - \Omega_m L) \exp(-\Omega_m L),$$

откуда найдем интегральный масштаб турбулентности L_0 , характеризующий линейные размеры области с высокой корреляцией пульсаций скорости потока:

$$L_0 = \int_0^\infty |H(L)| dL / H(0) = \frac{2}{\Omega_m}.$$

Как следует из анализа рис. 3, величина L_0 для большей части вихревого кольца близка $(1/5)R$, что согласуется с качественной, полученной на основе визуализации потока в вихревом кольце оценкой $L_0 \approx (1/10)R$ [5]. На периферии вихря $L_0 \approx (1/10)R$, в задней его половине $L_0 \approx (1/5)R$.

кольца $L_0 \simeq (1/3)R$, в следе за кольцом $L_0 \simeq (1/8)R$. Ограниченностю L_0 небольшими (в сравнении с размером вихревого кольца) масштабами указывает на устойчивость среднего течения, что, по-видимому, связано с подавлением турбулентности вращением — явлением, отмечавшимся рядом исследователей вихревых течений [7, 8].

Во-вторых, генерация турбулентной энергии преобладает над ее оттоком вплоть до масштабов $L \simeq (1/8)R$. Скорость генерации энергии ϵ в атмосфере вихревого кольца в среднем составляет $180 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$, достигая $400 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$ на его периферии. Эти значения согласуются со скоростью потери энергии регулярным течением в вихревом кольце, равной для выбранных условий $\sim 800 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$. Полагая, что скорость генерации турбулентной энергии в вихревом кольце пропорциональна скорости потери энергии средним течением, и используя известные зависимости U_0 и R от пройденного кольцом расстояния z [1], для оценки ϵ в атмосфере

$$\text{вихря получим } \epsilon \simeq 6 \frac{U_0^3}{R} \frac{dR}{dz}.$$

В-третьих, при масштабах, меньших $0,1R$, наблюдается более быстрое спадание спектров, чем это имело бы место при наличии здесь «инерционного» интервала. В то же время влияние вязкости на спектр турбулентной энергии еще пренебрежимо мало, о чем свидетельствует то, что внутренний масштаб турбулентности в атмосфере вихря, оцененный как $l \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \simeq 10^{-3}R$ (ν — коэффициент кинематической вязкости), значительно меньше $0,1R$. Причиной подавления турбулентности в этой области волновых чисел может быть вращение потока в вихревом кольце. Известны предположения об аналогии вращающихся и устойчиво стратифицированных потоков по отношению к характеристикам турбулентности [8, 9]. В настоящей работе эта аналогия подтверждается тем, что наклон экспериментальных спектров в правой части рис. 3 близок зависимости $\Omega^{-11/5}$, которой определяется спектр турбулентности в стратифицированной среде [10].

В-четвертых, среднеквадратичная амплитуда продольных пульсаций потока примерно одинакова по всему объему атмосферы вихря, за исключением его задней приосевой области, где она быстро спадает с $\pm 0,15U_0$ до $\pm 0,05U_0$. Существенные изменения энергии и масштаба турбулентности указывают на различные механизмы ее генерации в этой и других областях вихревого кольца. По-видимому, источником турбулентной энергии в задней приосевой области кольца является всасывание в его тыловую часть порций воздуха из окружающей среды и их дробление. В то же время большая часть турбулентной энергии поступает в вихревое кольцо с его периферии из зоны смешения. В передней половине вихревого кольца вовлекаемые за счет турбулентной диффузии и всасывания порции воздуха успевают перемещаться и спектр пульсаций скорости приобретает промежуточный между спектрами 2, 5 характер.

4. Результаты экспериментального исследования диффузии в турбулентном вихревом кольце и его массообмена с окружающей средой. Изучение процессов диффузии консервативной пассивной примеси в вихревом кольце методически наиболее просто осуществить путем его формирования из слегка нагретого (или охлажденного) воздуха и последующего проведения термометрических измерений в нескольких сечениях вихревого кольца на различных удалениях от генератора. Для «привязки» получаемых температурных профилей к конкретным областям вихревого кольца, идентифицируемым по профилям продольной составляющей скорости потока, в эксперименте в неизотермической близости от термодатчика устанавливался термоанемометр. Определенные таким образом профили избыточной температуры ΔT в турбулентном вихревом кольце после усреднения по 3—4 реализациям представлены на рис. 4 и 5. На рис. 4 нанесены изотермы с шагом 0,4 К для первоначально температурного однородного вихревого кольца, прошедшего 0,8 м от генератора. В силу осевой симметрии кольца изотермы изображены только для его части.

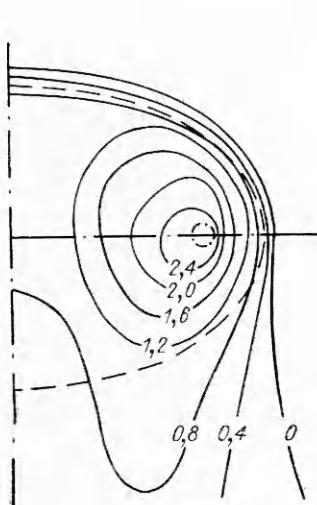


Рис. 4

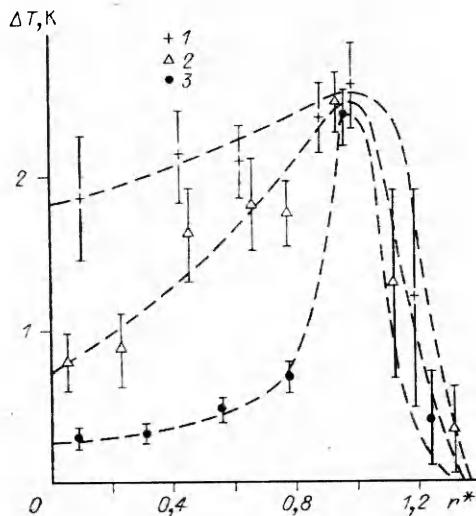


Рис. 5

Штриховой линией выделена область, движущаяся со скоростью вихревого кольца и имеющая приближенно эллиптическую форму. Передняя поверхность этой области разграничивает турбулизованную и нетурбулизованную среды (см. н. 3). Штрихпунктирной линией отмечено ядро вихревого кольца. На рис. 5 представлены профили избыточной температуры в экваториальной плоскости вихревого кольца на расстояниях 0,3; 0,8; 1,4 м (точки 1—3) от генератора. В начальный момент вихревое кольцо во всех опытах имело перегрев по отношению к окружающей среде ($\bar{\Delta T}_0 = (2,4 \pm 0,2)$ К).

Анализ результатов рис. 4 и 5 позволяет сделать следующие выводы. Во-первых, крутизна температурного фронта, перемещающегося со скоростью вихревого кольца, указывает на слабость массообмена через переднюю поверхность кольца. Во-вторых, распределение температуры в центральной части вихревого кольца весьма однородно, что свидетельствует о сравнительно сильном перемешивании. В-третьих, сильная турбулентность, слабые градиенты температуры, а также характер изотерм в нижней части вихревого кольца свидетельствуют о наличии в этой области интенсивных процессов диффузионного и динамического вовлечения воздуха из окружающей среды. В-четвертых, по мере движения кольца профиль консервативной пассивной примеси, в данном случае избыточной температуры, принимает все более торообразную форму, что можно наблюдать визуально для дымовых колец. Очевидно также, что коэффициенты турбулентной диффузии и температуропроводности по мере приближения к ядру кольца сильно уменьшаются, достигая минимума на его границе.

В отличие от своего ламинарного аналога турбулентное вихревое кольцо интенсивно обменивается массой с окружающей средой [5, 11]. Об этом свидетельствуют, в частности, наличие аэрозольного «хвоста» за вихревым кольцом, заполненным аэрозолем, и сравнительно быстрое уменьшение содержания аэрозоля в атмосфере вихря. Для количественного анализа интенсивности этого процесса была определена скорость убывания осредненной по объему кольца избыточной температуры $\bar{\Delta T}$ по мере его удаления от генератора; $\bar{\Delta T}$ рассчитывалась приближенно путем умножения измеренных в центре кольца значений перегревов на коэффициент, являющийся функцией расстояния и меняющийся от 1 до 1,4 в соответствии с аппроксимацией профилей, представленных на рис. 5. В силу большого диапазона изменения в экспериментах $\bar{\Delta T}$ такое приближение не могло привести к существенным ошибкам в оценке интенсивности массообмена кольца с окружающей средой. На рис. 6 представ-

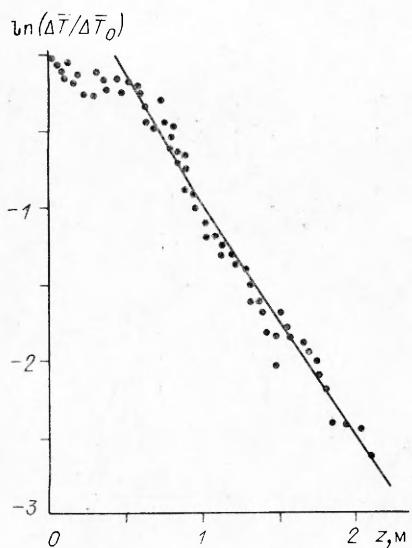


Рис. 6

($\leq 0,2$) пульсаций была на уровне, не превышающем $0,05\bar{\Delta}T$. В то же время (в особенности при создании на трассе движения кольца слоя нагретого воздуха) на профиле температуры в вихревом кольце возникали отдельные интенсивные нерегулярности с масштабом порядка $(1/2)R$, которые по мере движения кольца в температурно-однородной среде сглаживались и по прошествии им расстояний, равных $(5 \div 10)R$, уже не превышали $0,2 \bar{\Delta}T$.

В целом полученные экспериментальные результаты позволяют представить турбулентное вихревое кольцо в виде поступательно движущегося тела сфероидальной формы с непроницаемой передней поверхностью, циркуляционным движением и сильной турбулентностью внутри его. На передней поверхности вихревого кольца из-за различия коэффициентов диффузии внутри и вне его формируются концентрационный и динамический погранслой. По-видимому, в тыловой части вихревого кольца под воздействием встречного градиента давления погранслой разрушается. Образуется зона смешения, через которую осуществляется турбулентный массообмен между кольцом и окружающей средой. Указанное представление может быть использовано при математическом моделировании процесса диффузии примеси в атмосфере вихревого кольца (в настоящей работе оно не проводилось).

ЛИТЕРАТУРА

- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
- Ахметов Д. Г., Кисаров О. П. Гидродинамическая структура кольцевого вихря // ПМТФ.— 1966.— № 4.
- А. с. 1200691 (СССР). Способ зондирования атмосферы/В. Н. Иванов, В. Я. Коровин, Ю. С. Русаков, В. В. Смирнов // Открытия. Изобретения.— 1986.— № 28.
- Lane G. A., Williams R. L., Forther B. A. Fog abatement/United States Patent 3804328 U. S. cl 239/2, Int. cl E 04h 13/00, 1974.
- Maxworthy T. Turbulent vortex rings // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 64, pt 2, N 19.
- Смоляков А. В., Ткаченко В. М. Измерение турбулентных пульсаций.— Л.: Энергия, 1980.
- Онуфриев А. Г. Об особенностях турбулентного движения в ядре вихревого кольца // Динамические процессы в газах и твердых телах.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
- Владимиров В. А., Луговцов Б. А., Тарасов В. Ф. Подавление турбулентности в ядрах концентрированных вихрей // ПМТФ.— 1980.— № 5.
- Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.— М.: Мир, 1977.
- Винниченко Н. К., Пинус М. З., Шметер С. М., Шур Г. Н. Турбулентность в свободной атмосфере.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.

лена полученная в эксперименте зависимость $\ln(\bar{\Delta}T/\bar{\Delta}T_0)$ от расстояния до генератора z . Из анализа рис. 6 следует, что, начиная с расстояния z_0 , на котором образуется турбулентное вихревое кольцо, экспериментальные данные (точки) хорошо аппроксимируются выражением

$$(4.1) \quad \bar{\Delta}T = \bar{\Delta}T_0 \exp [-\beta(z - z_0)/R],$$

согласующимся с полуэмпирической формулой, полученной в [11] для переноса кольцом пассивной примеси в воде. Определенное в эксперименте значение коэффициента $\beta = 0,09$ близко к 0,1 [11]. Расчет по (4.1) при $\beta = 0,09$ представлен на рис. 6 линией.

В отличие от пульсаций скорости пульсации температуры в вихревом кольце имели неразвитый, слабо выраженный характер. Качественно можно отметить, что средняя амплитуда мелкомасштабных

11. Тарасов В. Ф., Якушев В. И. Экспериментальные исследования переноса примеси турбулентным вихревым кольцом // ПМТФ.— 1974.— № 1.

г. Обнинск

Поступила 21/IV 1988 г.,
в окончательном варианте — 10/IV 1990 г.

УДК 532.542.2

A. I. Мошинский

ЭФФЕКТИВНАЯ ДИФФУЗИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ В НЕОДНОМЕРНЫХ ПОТОКАХ

Для описания различных процессов тепломассообмена в природных условиях и технологических устройствах широко используется диффузионная модель дисперсии вещества. Огромная сфера приложений и существенные упрощения в описании процессов по сравнению с полной системой уравнений гидродинамики и тепломассопереноса служат основными причинами интереса исследователей к проблемам дисперсии. Преимущества теории дисперсии выражаются в известном смысле в осредненном описании процессов, когда некоторые переменные характеристики заменяются постоянными параметрами, и, кроме того, в понижении размерности уравнений задачи.

Диффузионная модель используется на практике давно, но только с основополагающих работ Дж. Тейлора [1, 2] данная схема получила обоснование как (в некотором смысле) предельная и это направление стало избавляться от эмпиризма. Работы [1, 2] послужили мощным толчком к изучению различных аспектов теории дисперсии, можно выделить несколько оригинальных подходов к проблеме [3—8] и обзорное обсуждение [9], распространяющие теорию на более сложные случаи.

В отмеченных работах, как и во многих других, рассматривалось только одно уравнение конвективной диффузии, тогда как на практике не редки задачи, когда смесь содержит несколько компонентов и(или) следует учитывать влияние перекрестных эффектов типа термодиффузии и т. п. при течении смеси в каналах и аналогичных областях. Обобщению теории дисперсии на случай течения многокомпонентной системы в круглой трубе посвящена работа [10], где принималось во внимание также наличие реакции первого порядка на стенке канала. Здесь мы усложним анализ на предмет учета зависимости коэффициентов диффузии от концентраций компонентов и температуры, а также примем во внимание возможность неодномерности течения жидкости в канале. Таким образом, будем исходить в общем случае из нелинейной постановки задачи.

Одним из примеров приложений теории дисперсии многокомпонентных смесей могут служить задачи жидкостной капиллярной хромотографии. В [11, 12] изучалось влияние эффекта термодиффузии на процесс дисперсии вещества, однако в них профиль температуры был определен ранее и независимо от концентрации целевого компонента, т. е. не учитывалось в полной мере влияние изменений градиентов концентрации вещества на перенос тепла, как того требуют уравнения термодинамики не обратимых процессов и, в частности, принцип взаимности Онзагера [13, 14]. Таким образом, в [11, 12], по существу, имели дело с одним уравнением для концентрации вещества, т. е. с некоторой модификацией обычной однокомпонентной теории дисперсии [1, 2].

Определенный интерес для приложений представляет случай дисперсии вещества при резком снижении коэффициента эффективной диффузии в отдельных областях течения, где происходит контакт между циркуляционными зонами. Показано, что при подобной ситуации целесообразно переходить к ячеекному описанию процесса, асимптотически обоснованному в определенном интервале времени.

1. Вывод уравнения эффективной диффузии. Рассмотрим движение многокомпонентной смеси в круглой трубе при наложении на основной поток со средней скоростью u циркуляционного течения, характеризуемого компонентами скорости w, v по осям z и r цилиндрической системы координат соответственно. Будем считать распределение вещества осесимметричным: $\partial C / \partial \varphi = 0$, где C — вектор-столбец концентраций веществ, φ — циклическая координата. Это приводит к отсутствию в основной системе уравнений тепломассопереноса

$$(1.1) \quad r \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial z} + w \frac{\partial C}{\partial z} + v \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} \left[L(C) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial r} \left[L(C) \frac{\partial C}{\partial r} \right]$$

конвективного слагаемого в направлении оси φ . Здесь $L(C)$ — симметричная, положительно определенная квадратная матрица кинетических коэффициентов, как того требуют принципы взаимности Онзагера и возрастания энтропии [13, 14]. В общем случае L зависит от компонент c_i