

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller T. J. Use of heat transfer analysis in the manufacture of large preform by the MCVF process // *AIChE J.*— 1984.— V. 80, N 236.
2. Васильев В. Н., Дульнев Г. Н. Постановка задачи вытяжки оптического волокна при сдвиговом течении // *Энергоперенос в конвективных потоках.*— Минск: ИТМО АН БССР, 1985.
3. Наумчик В. Д. Квазидномерная модель процесса вытяжки оптического волокна // Там же.
4. Васильев В. Н., Ланин Ю. И., Наумчик В. Д. Анализ лучистого теплообмена при вытяжке оптического волокна // *Математические модели теории переноса в неоднородных и нелинейных средах с фазовыми превращениями.*— Минск: ИТМО АН БССР, 1986.
5. Churchill S. W. A comprehensive correlating equation for laminar, assisting, forced and free convection // *AIChE J.*— 1977.— V. 23, N 1.
6. Мартыненко О. Г., Сокошин Ю. А. Свободноконвективный теплообмен.— Минск: Наука и техника, 1982.
7. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача.— М.: Энергоиздат, 1981.
8. Боровский В. Г., Шелиманов В. А. Теплообмен цилиндрических тел малых радиусов и их систем.— Киев: Наук. думка, 1985.
9. Лeko В. К., Мещерякова Е. В. и др. Исследование вязкости промышленных кварцевых стекол // *Опт.-мех. пром-сть.*— 1974.— № 12.
10. Manfre G. Forces acting in continuous drawing of silica fibers // *Glass Technology.*— 1969.— V. 10, N 4.
11. Гликсман. Динамика свободной подогреваемой струи при малых числах Рейнольдса // *Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д.*— 1968.— Т. 90, № 3.
12. Oh S. M. Cooling rates of optical fibers during drawing // *Ceram. Bulletin.*— 1979.— V. 58, N 11.
13. Зябицкий А. Теоретические основы формирования волокон.— М.: Химия, 1979.

Поступила 4/1 1987 г.

УДК 533.6

О РАСЧЕТЕ СХОДЯЩИХСЯ УДАРНЫХ ВОЛН

А. И. Марченко, В. В. Урбан

(Минск)

Сходящиеся к оси или центру симметрии ударные волны (УВ) — частый объект исследований в проблеме получения плотной высокотемпературной плазмы для УТС, в устройствах типа ударных труб, работающих на принципе кумуляции энергии, запасенной в электрическом или химическом источнике, а также в других научных задачах. Так как автомоделные решения для сходящихся УВ [1—5] применимы лишь в некоторой окрестности фронта, то основным способом теоретического исследования проблемы является сочетание качественного физического анализа с численным расчетом в полной постановке задачи, учитывающей наиболее существенные физические процессы [6].

В автомоделном решении, представляющем собой асимптотику в окрестности оси или центра симметрии, имеет место неограниченный рост температуры, давления и скорости. При этом, как указано в [3], диссипативные эффекты (вязкость, теплопроводность) не всегда приводят к ограничению концентрации плотности энергии. В то же время в численных расчетах конечно-разностными методами получаются всегда ограниченные значения указанных величин, что следует, например, из [6—11], где выполнено численное моделирование ряда задач о сходящихся УВ. В частности, в [6] для таких задач сформулированы необходимые условия применимости конечно-разностного подхода, требующие совпадения численного решения с автомоделным в моменты времени до и после фокусировки, а также последующего выхода его на асимптотику точечного взрыва. В настоящей работе на примере сходящихся УВ в идеальном газе с показателем адиабаты $\gamma = 7/5$ и $5/3$ представлена сходимостью к автомоделному численным решениям, найденным лагранжевым методом с искусственной вязкостью [12]. Сопоставление результатов (каждый из которых удовлетворяет условиям [6]), полученных на различных по подробности сетках с монотонным уменьшением размера рассматриваемой окрестности центра симметрии, позволяет оценить некоторый минимальный размер этой окрестности, достаточный для достижения заданной точности расчета поля течения схождения и отражения УВ. Приведены также результаты расчетов фокусировки УВ в металлических шариках, описываемых моделью идеальной упругопластической изотропной среды [13] и уравнением состояния Тиллотсона [14]. Рассмотрено изменение параметров вещества в области фокусировки для различных материалов (Al, Fe, W) и интенсивностей УВ.

1. Расчеты сходящихся УВ в газовой среде обычно ограничиваются рассмотрением некоторой окрестности центра или оси симметрии размером порядка толщины фронта, определяемой диссипативными процессами (вязкость, теплопроводность, излучение) [6—11]. Однако в идеальном газе фронт УВ не имеет толщины и автомодельное решение Ландау—Стапоковича—Гудерля [1, 2] предсказывает неограниченную кумуляцию плотности энергии, т. е. бесконечный рост температуры, давления и массовой скорости ($T \sim p \sim R^{-2(k-1)}$, $u \sim R^{-(k-1)}$) на фронте УВ, сходящейся к центру симметрии ($R = 0$). В связи с этим возникает вопрос о поведении численного решения и его соответствии автомодельному при сколь угодно близком подходе и отражении УВ от центра симметрии.

Пусть сферический слой нагретого газа с начальным давлением $p/p_0 = 480$, плотностью $\rho/\rho_0 = 8$ при $t > 0$ начинает расширяться в неподвижную среду с параметрами $p_0 = 27$, $\rho_0 = 2,7$, заполняющую полость радиусом $R_0 = 30$. Здесь газодинамические величины приведены в безразмерных единицах. С помощью соотношений $u_* = \bar{R}_*/\bar{t}_*$, $p_*/\rho_* = u_*^2$ выбором характерных размеров длины и времени можно получить истинные значения искомых величин.

Численный расчет распада разрыва и схождения образующейся УВ к центру симметрии проводился на нерегулярной массовой сетке, построенной от центральной ячейки с линейным размером ΔR_1 , массой $\rho_0(\Delta R_1)^3$ с прогрессией 1,1 до границы полости R_0 . Для двух вариантов задачи с $\gamma = 7/5$ (а) и $5/3$ (б) на рис. 1 приведены зависимости давления на фронте от расстояния до центра для сходящейся (нижние) и отраженной (верхние точки) УВ для автомодельного $k = 1,395$ (а) и $1,452$ (б) (сплошные линии) и численного решения с различным начальным размером $\Delta R_1^{(1-3)} = 3; 1; 0,3$ и числом ячеек на отрезке $0 \leq R \leq R_0$ 50, 70 и 100 (точки 1—3). Штриховыми линиями показано неавтомодельное изменение давления в сходящемся и отраженном течении. Количество ячеек в нагретой области было постоянным для всех вариантов (50). Как видно из рис. 1, удовлетворительное соответствие численных и автомодельных решений начинается с расстояний $R = 0,5 R_0$ и соблюдается до некоторой окрестности центра $R \approx R_*^{(1-3)}$, зависящей от подробности расчетной сетки. Для каждого варианта в момент фокусировки $t = t_c$ максимальное давление в центральной ячейке — ограниченная величина, возрастающая по мере приближения решения к центру по закону $p_m \sim (\Delta R_1)^{-2(k-1)}$, где ΔR_1 — текущий размер сжатой первой ячейки при $t = t_c$. Начиная с

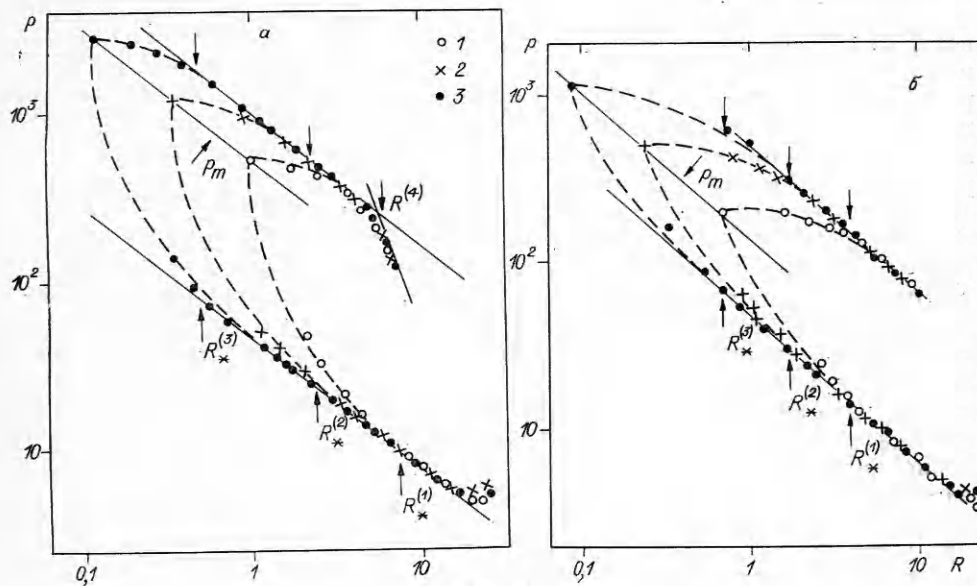


Рис. 1

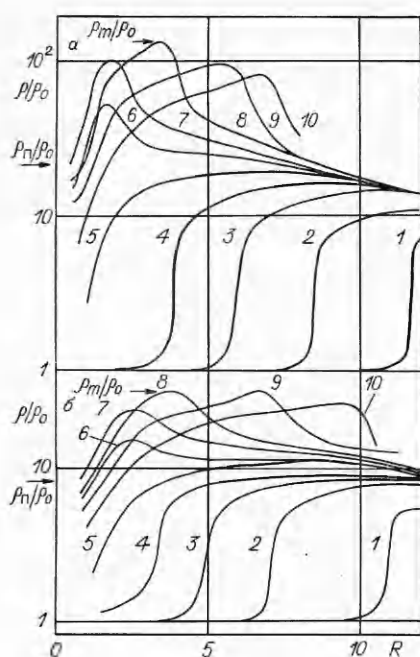


Рис. 2

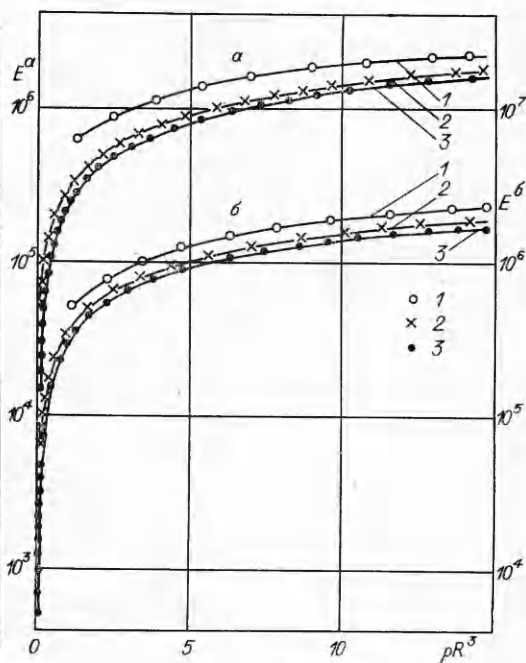


Рис. 3

некоторого расстояния $R^{(4)}$ (рис. 1, а), фронт отраженной УВ переходит на асимптотику сильного взрыва Седова — Тейлора.

На рис. 2 для расчетов на 50 ячейках показаны профили плотности в течении при сжатии и отражении УВ в моменты времени (а — $\gamma = 7/5$) $t = 14; 16; 17,5; 18,4; 19,2; 20; 20,7; 22,5; 25; 27$ мкс, (б — $\gamma = 5/3$) $t = 15; 16; 17; 17,6; 18; 18,6; 19,1; 20; 22; 24$ мкс — линии 1 — 10 соответственно. Плотность газа, равная на фронте УВ $\rho_\phi = \rho_0(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, в момент коллапса $t = t_c$ достигает в центральной ячейке предельного значения $\rho_\pi = 7,34 \rho_0$ ($\gamma = 5/3$) и $21,7 \rho_0$ ($\gamma = 7/5$), а после отражения УВ — максимального $\rho_m = 31,3 \rho_0$ ($\gamma = 5/3$) и $134,9 \rho_0$ ($\gamma = 7,5$). Расчетные значения ρ_π и ρ_m для $\gamma = 7/5$ ближе к приведенным в [4], нежели в [5].

Представленные результаты говорят об удовлетворительном соответствии численного решения автомодельному. Для всех расчетных сеток в 50, 70 и 100 ячеек выполняются условия [6] при сжатии УВ к центру симметрии и в расходящемся потоке после отражения. Однако это не позволяет сделать обоснованный выбор между рассчитанными вариантами, отличающимися как распределением газодинамических величин по радиусу, так и вычислительными затратами.

Рассмотрим расчетные зависимости полной энергии $E = \rho u^2/2 + p(\gamma - 1)$ от массы газа для $\gamma = 7/5$ (а) и $\gamma = 5/3$ (б), полученные на сетках в 50, 70 и 100 (точки 1—3) ячеек в момент времени $t \approx t_c$ (рис. 3). Видно, что имеет место сходимость расчетных кривых к некоторому предельному профилю. В данном случае этот профиль с точностью построения совпадает с полученным на сетках в 100 и 130 (дополнительный расчет) ячеек, а также с автомодельной кривой, изображающей известную зависимость энергии, заключенной в автомодельной области $R_\phi \leq R < R_a$ за фронтом $E \sim R^{5-2k}$ [4, 5]. Аналогична сходимость кривых для давления, плотности и скорости, построенных в зависимости от массы газа ρR^3 или координаты R .

Детальный анализ соответствия численных решений автомодельному при $t < t_c$, $t \geq t_c$ позволяет предположить, что существует такая окрестность центра (или оси) симметрии R_* , что для любых начальных условий $R_0 \gg R_*$ решение задачи о сжатии и отражении УВ в области $R > R_*$

не изменяется. Несмотря на то что плотность энергии здесь бесконечно возрастает, полная энергия в окрестности $R < R_*$ настолько мала, что течение во всей остальной области в пределах некоторой заданной точности от нее не зависит. Значение $R_* = n\Delta R_1^*$, где ΔR_1^* — размер центральной ячейки при $t = t_c$, n — количество ячеек, на которых фронт УВ аппроксимируется конкретной разностной схемой, можно определить из расчетов, требуя достижения заданной точности сходимости для газодинамических величин.

Таким образом, для идеального газа численный подход позволяет не только корректно рассчитать схождение УВ до любой сколь угодно малой заданной окрестности центра симметрии, но и, по-видимому, определить некоторый конечный размер этой окрестности, для которого точность расчета задачи не улучшается. В частности, для рассмотренных вариантов задачи результаты при $\Delta R_1^{(4)} = 0,1$ и 130 ячейках сетки всюду, кроме окрестности фокусировки $R < R_*$, практически совпали с данными, полученными при $\Delta R_1^{(3)} = 0,3$ и 100 ячейках. Тогда $\Delta R_1^* \leq \Delta R_1^{(3)}$.

2. Изучение сходящихся УВ в конденсированных средах представляет значительный интерес, обусловленный, в частности, поиском данных о термодинамических свойствах вещества при высоких сжатиях, давлениях и температурах [15, 16]. Сложность математического описания фокусировки УВ в неидеальной среде позволяет получить автомодельное решение лишь в отдельных случаях, например с уравнением состояния Грюнайзена [16]. Более реалистичная постановка задачи требует применения численных методов.

В соответствии с [13] система уравнений в лагранжевых координатах для случая сферической симметрии (точка над величинами означает производную по времени вдоль траектории частицы среды) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v_0 \left(\frac{R}{M} \right)^2 \frac{\partial \Sigma_R}{\partial M} + 2 \frac{\Sigma_R - \Sigma_\theta}{R}, \quad \dot{R} = u, \\ v &= v_0 \left(\frac{R}{M} \right)^2 \frac{\partial R}{\partial M}, \quad \dot{\varepsilon} - v(s_1 \dot{e}_1 + 2s_2 \dot{e}_2) + (p + q) \dot{v} = 0, \\ \Sigma_R &= -(p + q) + s_1, \quad \Sigma_\theta = -(p + q) + s_2. \end{aligned}$$

Здесь Σ_R и Σ_θ — радиальные и тангенциальные напряжения; M — массовая координата; ε — удельная внутренняя энергия; $v = 1/\rho$ — удельный объем; q — псевдовязкость; e_1, e_2, e_3 — компоненты вектора деформаций; s_1, s_2, s_3 — компоненты девиатора напряжений.

Для расчета упругопластических свойств использовались следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= 2\mu \left(\dot{e}_1 - \frac{\dot{v}}{3v} \right), \quad \dot{s}_2 = 2\mu \left(\dot{e}_2 - \frac{\dot{v}}{3v} \right), \quad \dot{s}_3 = 2\mu \left(\dot{e}_3 - \frac{\dot{v}}{3v} \right), \\ \dot{e}_1 &= \frac{\partial u}{\partial R}, \quad \dot{e}_2 = \frac{u}{R}, \quad \dot{e}_3 = \dot{e}_2. \end{aligned}$$

Корректировка компонент девиатора напряжений s в области пластического течения среды проводилась при условии Мизеса $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq \frac{2}{3} Y_0^2$, где предел текучести Y_0 и модуль сдвига μ полагались равными: $Y_0 = 0,3; 0,6; 3$ ГПа, $\mu = 24,8; 80; 154$ ГПа для Al, Fe и W соответственно.

Рассмотрим изменение параметров в области фокусировки для различных интенсивностей УВ, выходящих из слоя толщиной ΔR и полной энергией E_0 на поверхность шариков из различных материалов (Al, Fe, W) радиусом $R_0 = 0,2125$ см.

При $\Delta R/R_0 = \Delta_g \leq 0,1$ ($E_0 = 0,11$ кДж) для Al, $\Delta_g \leq 0,2$ (0,25 кДж) для Fe, $\Delta_g \leq 0,5$ (0,76 кДж) для W сходящаяся УВ в металле остается слабой за счет потери энергии при совершении работы по упругопластическому деформированию шарика. Это выражается в ограниченности

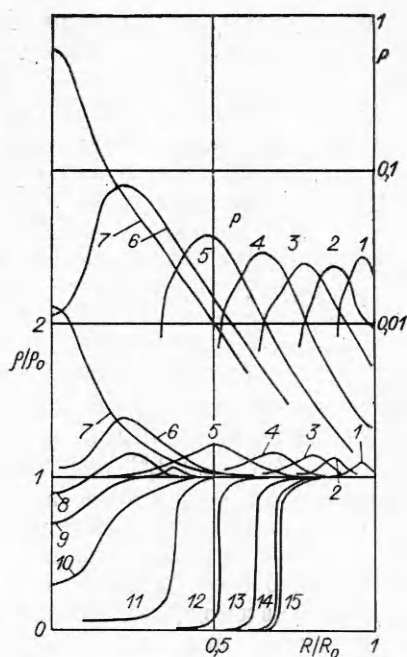


Рис. 4

$\Delta = \Delta_{II} \approx 0,1 - 0,2$ (Al), $0,2 - 0,3$ (Fe), $0,5 - 0,7$ (W), для которых внутри шара также образуется полость ограниченного размера. Динамика ее образования в железе при $\Delta = 0,3$ видна из рис. 4, где приведены профили давления p (ТПа) и относительной плотности ρ/ρ_0 по радиусу в моменты времени $t = 0,13; 0,16; 0,2; 0,25; 0,32; 0,4; 0,44; 0,5; 0,53; 0,63; 1; 1,59; 2,51; 3,98; 6,3$ мкс — соответственно линии 1—15. Как видно, при $t \approx 6,3$ мкс рост полости прекращается.

С ростом Δ и E_0 роль диссипации энергии в упругопластическом течении начинает уменьшаться и процесс фокусировки УВ переходит в режим, аналогичный сжатию в газовой среде с неограниченным ростом плотности энергии в центре. Это можно заключить по изменению отношения энергии, затрачиваемой на упругопластическое деформирование шарика из Fe, к работе сил давления в УВ $v(s_1 de_1 + 2s_2 de_2)/pdv \sim 10; 1; 0,1; 0,01$ при $\Delta = 0,1; 0,3; 1; 10$, а также по расходимости значений максимального давления p_m в центре шарика. Значения p_m в зависимости от интенсивности внешнего воздействия Δ , E_0 представлены в таблице.

Таким образом, рассмотренные результаты расчетов позволяют сделать вывод о достоверности численных решений задачи о сходящихся УВ, что подтверждается совпадением с автомодельным решением (газовая среда) и согласием расчетных и экспериментальных данных (эффект образования замкнутой полости в упругопластической среде). Относительно проблемы кумуляции плотности энергии в сходящихся УВ можно заключить, что бесконечный рост величин либо происходит в некоторой окрестности центра фокусировки, не влияющей на движение волны, либо

роста плотности энергии и других газодинамических величин в центре симметрии. Например, для Fe при $\rho_0 = 7,83$ г/см³ максимальные плотность и удельная внутренняя энергия сходятся к постоянным значениям $\rho_m/\rho_0 = 1,50; 1,55; 1,56$; $\epsilon_m = 3,49; 4,62; 4,69$ кДж/г при увеличении числа расчетных ячеек 30, 50, 70 соответственно.

При $\Delta > \Delta_g$ для всех рассматриваемых материалов фокусировка УВ приводит к повышению плотности энергии в окрестности центра до значений, больших энергии испарения вещества, и последующему уносу массы от центра после отражения УВ, т. е. образованию полости некоторого размера. В [17] экспериментально наблюдалось и численно моделировалось аналогичным методом образование замкнутой полости в центрах металлических шариков, симметрично облучаемых электронным пучком. В нашем случае, как показали расчеты, существуют узкие диапазоны нагружения $\Delta \equiv$

Δ	E_0 , кДж	p_m , ТПа		
		Число ячеек		
		30	50	70
0,1	0,11	0,163	0,209	0,217
0,31	0,43	0,449	0,875	1,128
1,0	2,25	1,47	5,89	29,4
3,0	20,2	4,09	18,8	89,2
10	426	22,3	96,6	851,2

ограничивается соответствующим реальным физическим механизмом диссипации (что указано также в [18]), если этот механизм играет существенную роль в энергетическом балансе кумулятивного течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды.— М.: Наука, 1971.
2. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstosse in der Nahe des Kugelmittelpunktes bzw der Zylinderachse // Luftfahrtforschung.— 1942.— Bd 19, N 9.
3. Забабахин Е. И. Явления неограниченной кумуляции // Механика в СССР за 50 лет.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
6. Берченко Е. А., Коробейников В. П. Численное исследование сходящихся ударных волн // ДАН СССР.— 1976.— Т. 230, № 6.
7. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. Сходящаяся цилиндрическая ударная волна в плазме с учетом структуры фронта // ЖВММФ.— 1963.— Т. 3, № 5.
8. Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С. О сходящейся цилиндрически симметричной ударной волне при наличии диссипативных эффектов // ПММ.— 1965.— Т. 29, № 6.
9. Кудиш И. И., Рыков В. А. О схождении к центру и отражении сферической волны в газе // ЖВММФ.— 1976.— Т. 16, № 5.
10. Jach K. Assesment of shock-waves convergence-radius in spherical systems of explosion-induced plasma compression // J. Techn. Phys.— 1981.— V. 22, N 4.
11. Бардин Н. А. Фокусировка ударной волны в трехтемпературной плазме // ПМТФ.— 1984.— № 4.
12. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.
13. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике.— М.: Мир, 1974.
14. О'Киф Дж. Д., Арнс Т. Дж. Ударные эффекты при столкновении больших метеоритов с Луной // Механика образования воронок при ударе и взрыве.— М.: Мир, 1977.
15. Базанов О. В., Беспалов В. Е. и др. Нерегулярное отражение конически сходящихся ударных волн в плексигласе и меди // ТВТ.— 1985.— Т. 23, № 5.
16. Кравченко В. А. О сходящейся ударной волне в конденсированной среде.— Черноголовка, 1984.— (Препринт/ИТФ АН СССР; № 4).
17. Бабыкин М. В., Байгарин К. А. и др. Симметричный нагрев и разлет металлического шарика при инъекции РЭП в электромагнитную ловушку // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Т/я синтез.— 1985.— Вып. 1(18).
18. Имшенник В. С. Кумуляция сходящихся ударных волн с учетом диссипативных процессов // ПМТФ.— 1980.— № 6.

Поступила 15/XII 1986 г.

УДК 533.952

УСТОЙЧИВОСТЬ СИММЕТРИЧНОГО СЖАТИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЛАЙНЕРА, МОДЕЛИРУЕМОГО СИСТЕМОЙ ПРОВОЛОЧЕК

А. А. Самохин

(Москва)

Малоиндуктивные многопроволочные конструкции («эррей») [1], используемые в качестве нагрузки в сильноточных диодах, позволили достигнуть больших скоростей ($\sim 10^7$ см/с) и экстремальных параметров плазмы, что сделало их перспективным инструментом в исследованиях мощных источников электромагнитного излучения и генераторов плотной плазмы [2]. Многопроволочные конструкции интересны также для моделирования динамики сжатия цилиндрических лайнеров и z-пинчей. Актуально изучение неустойчивостей, нарушающих синхронность схождения проводников в центр системы [3]. В настоящей работе выполнен анализ устойчивости симметричного схлопывания «эррея» с учетом взаимного индуктивного влияния токов и конечного омического сопротивления проводников. Предельным переходом результаты распространяются на случай сплошного лайнера.

Постановка задачи. Рассматривается система из N прямолинейных проводников (проволочек) с током, установленных между двумя плоскими электродами и замыкающих цепь с источником напряжения E , внеш-