

ЛИТЕРАТУРА

1. Lowengrub M. A two-dimensional crack problem.— «Int. J. Engng Sci.», 1966, vol. 4, N 3.
2. England A. M., Green A. F. Some two-dimensional punch and crack problem in classical elasticity.— «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1963, 59, N 2, p. 489—500.
3. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое.— «Инж. журн. МТИ», 1968, № 2.
4. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины.— ПММ, 1965, № 4.
5. Александров В. М., Сметанин Б. И. О равновесных продольных трещинах в пластинках.— В кн.: VI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
6. Sih G. C., Embley G. T., Ravera R. S. Impact response of a finite crack in plane extension.— «Int. J. Solids and Struct.», 1972, vol. 8, N 7.
7. Рывкин И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1963.

УДК 539.214

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. У. Ушицкий

(Москва)

В некоторых технологических задачах и, в частности, при получении композиционных материалов путем соединения их компонентов в твердом состоянии существенную роль играет процесс образования физического контакта между ними, который сопровождается пластической деформацией микрорельефа на соединяемых поверхностях [1].

Основной модельной задачей об образовании физического контакта является задача о пластическом деформировании шероховатой поверхности идеально пластического тела гладким жестким штампом [2]. Рассмотрим решение этой задачи в условиях плоской деформации, полагая профиль шероховатой поверхности $H(x)$ реализацией стационарного случайного процесса.

Следуя [2], аппроксимируем микрорельеф деформируемой поверхности системой клиньев. Пусть на участке реализации профиля длиной L расположено N таких клиновидных микровыступов. Процесс смятия каждого из них может быть описан в рамках автомодельного решения Хилла [3], в соответствии с которым величина образующейся площадки контакта h_i пропорциональна осадке штампа s и составляет

$$(1) \quad h_i = 2s\varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\varphi_i = (1 + \sin \psi_i) \sec \psi_i$, ψ_i — угол центрированного веера поля линий скольжения. При этом величина действующего на клин контактного усилия p_i равна [3]

$$(2) \quad p_i = \sigma_k h_i = 4k s \chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\sigma_k = 2k(1 + \sin \psi_i)$ — контактное напряжение, определяемое решением Хилла [3]; k — значение предела текучести при сдвиге; $\chi_i = (1 + \sin \psi_i)(1 + \sin \psi_i) \sec \psi_i$.

Воспользуемся соотношениями (1), (2) для построения уравнений, описывающих смятие ансамбля клиновидных микровыступов. Пронумеруем высоты H_i вершин микровыступов на участке реализации L в порядке их возрастания от H_1 до H_N и зафиксируем начальное положение штампа на высоте H_N . Перемещая штамп вниз произвольно малыми ступенями так, чтобы каждому приращению осадки соответствовало смятие не более одного нового микровыступа, определим величину суммарной площадки контакта h . Для этого разобьем область изменения осадки штампа s на N интервалов следующим образом:

$$(3) \quad \begin{aligned} 0 < c_1 &\leq H_N - H_{N-1}, \\ H_N - H_{N-1} &< c_2 \leq H_N - H_{N-2}, \\ &\dots \\ H_N - H_{N-m+1} &< c_m \leq H_N - H_{N-m}, \\ &\dots \\ H_N - H_1 &< c_N. \end{aligned}$$

Пусть в каждом из этих интервалов штамп перемещается путем n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) последовательных шагов, так что для l -го шага осадки на m -м интервале ($l \leq n_m$) величина осадки $c_{m,l}$ может быть представлена в виде

$$c_{m,l} = \sum_{j=1}^{n_1} c_{1,j} + \sum_{j=1}^{n_2} c_{2,j} + \dots + \sum_{j=1}^{n_{m-1}} c_{m-1,j} + \sum_{j=1}^l c_{m,j} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n_i} c_{i,j} + \sum_{j=1}^l c_{m,j}.$$

Величина суммарной площадки контакта при любом фиксированном положении штампа в интервалах (3) определяется с учетом (1) членами приведенной ниже последовательности:

$$(4) \quad \begin{aligned} h &= h_N = 2c_{1,l}\varphi_N, \\ h &= h_N + h_{N-1} = 2c_{2,l}\varphi_N + 2[c_{2,l} - (H_N - H_{N-1})]\varphi_{N-1}, \\ &\dots \\ h &= \sum_{i=N-m+1}^N h_i = 2c_{m,l}\varphi_N + 2[c_{m,l} - (H_N - H_{N-1})] \times \\ &\times \varphi_{N-1} + \dots + 2[c_{m,l} - (H_N - H_{N-m+1})]\varphi_{N-m+1}, \\ &\dots \\ h &= \sum_{i=1}^N h_i = 2c_{N,l}\varphi_N + 2[c_{N,l} - (H_N - H_{N-1})]\varphi_{N-1} + \dots \\ &\dots + 2[c_{N,l} - (H_N - H_1)]\varphi_1. \end{aligned}$$

Точно так же с учетом соотношения (2) может быть построена последовательность, описывающая рост контактного усилия на каждой ступени приращения осадки штампа:

$$(5) \quad \begin{aligned} p &= p_N = 4kc_{1,l}\chi_N, \\ p &= p_N + p_{N-1} = 4kc_{2,l}\chi_N + 4k[c_{2,l} - (H_N - H_{N-1})]\chi_{N-1}, \\ &\dots \\ p &= \sum_{i=N-m+1}^N p_i = 4kc_{m,l}\chi_N + 4k[c_{m,l} - (H_N - H_{N-1})] \times \\ &\times \chi_{N-1} + \dots + 4k[c_{m,l} - (H_N - H_{N-m+1})]\chi_{N-m+1}, \\ &\dots \\ p &= \sum_{i=1}^N p_i = 4kc_{N,l}\chi_N + 4k[c_{N,l} - (H_N - H_{N-1})] \times \\ &\times \chi_{N-1} + \dots + 4k[c_{N,l} - (H_N - H_1)]\chi_1. \end{aligned}$$

В последовательностях (4), (5) m -е члены преобразуем к виду

$$\begin{aligned} h_{m,l} &= 2c_{m,l} \sum_{i=N-m+1}^N \varphi_i - 2 \sum_{i=N-m+1}^{N-1} (H_N - H_i) \varphi_i, \\ p_{m,l} &= 4kc_{m,l} \sum_{i=N-m+1}^N \chi_i - 4k \sum_{i=N-m+1}^{N-1} (H_N - H_i) \chi_i \end{aligned}$$

и вычислим приращения площадки контакта Δh_m и Δp_m на l -й ступени m -го интервала осадки

$$(6) \quad \begin{aligned} \Delta h_m &= h_{m,l} - h_{m,l-1} = 2\Delta c \sum_{i=N-m}^N \varphi_i, \\ \Delta p_m &= p_{m,l} - p_{m,l-1} = 4k\Delta c \sum_{i=N-m}^N \chi_i. \end{aligned}$$

Так как $\sum_{i=N-m}^N \varphi_i = m\bar{\varphi}$ и $\sum_{i=N-m}^N \chi_i = m\bar{\chi}$, то соотношение (6) можно представить следующим образом:

$$(7) \quad \Delta h_m / \Delta c = 2m\bar{\varphi}, \quad \Delta p_m / \Delta c = 4k\bar{\chi}m,$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\chi}$ — средние по m значения случайных величин φ и χ .

Переходя в уравнениях (7) к пределу при $\Delta c \rightarrow 0$, получим дифференциальные уравнения, описывающие рост площадки контакта и усилия в контакте на интервале $[H_N - H_m; H_N - H_{N-m+1}]$:

$$(8) \quad dh_m / dc = 2\bar{\varphi}m, \quad dp_m / dc = 4k\bar{\chi}m,$$

где m — число вершин профиля, смятых штампом, при таком его положении, что $c = C$.

Используя для h и p их представления, с помощью средних значений интегрируем уравнения (8). Получим выражения для определения средних значений единичной площадки контакта \bar{h} и единичного усилия в контакте \bar{p} . С учетом начальных условий $\bar{h}(c=0) = 0$, $\bar{p}(c=0) = 0$ и условия непрерывности $\bar{h}(c)$ и $\bar{p}(c)$ на границах интервалов (3) эти решения могут быть представлены в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{h}_m(c) &= 2\bar{\varphi} \frac{m}{N} c - 2\bar{\varphi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m-1} (H_N - H_{N-i}), \\ \bar{p}_m(c) &= 4k\bar{\chi} \frac{m}{N} c - 4k\bar{\chi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m-1} (H_N - H_{N-i}). \end{aligned}$$

Отношение m/N представляет собой приближенное значение вероятности смятия m -го микровыступа при $c = C$. Представим разности $(H_N - H_{N-i})$, входящие в решения (9), следующим образом:

$$(10) \quad H_N - H_{N-i} = (H_N - H_{N-1}) + (H_{N-1} - H_{N-2}) + \dots + (H_{N-i+1} - H_{N-i}).$$

С учетом (10) соотношения (9) могут быть представлены в виде

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{h}_m(c) &= 2\bar{\varphi} \left[\frac{m}{N} c - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i}{N} \Delta H_i \right], \\ \bar{p}_m(c) &= 4k\bar{\chi} \left[\frac{m}{N} c - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i}{N} \Delta H_i \right], \end{aligned}$$

где $\Delta H_i = H_{N-i+1} - H_{N-i}$.

Предполагая, что существует непрерывная функция распределения вершин профиля $f(H)$, и переходя в соотношениях (11) к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим асимптотические выражения для $\bar{h}(c)$ и $\bar{p}(c)$

$$(12) \quad \bar{h}(c) = 2\bar{\varphi} \left[c \int_{H_N-c}^{H_N} f(H) dH - \int_{H_N-c}^{H_N} \int_{H_N-c=H}^{H_N} f(H) dH dH \right],$$

$$\bar{p}(c) = 4k\bar{\chi} \left[c \int_{H_N-c}^{H_N} f(H) dH - \int_{H_N-c}^{H_N} \int_{H_N-c=H}^{H_N} f(H) dH dH \right].$$

Для идеально пластического несжимаемого материала из условия несжимаемости необходимо ограничить осадку штампа значением $C_{пр}$

$$(13) \quad c \leq C_{пр} = \bar{H},$$

где \bar{H} — среднее арифметическое высот профиля $H(x)$. Таким образом, полученные выше решения определены на интервале $0 \leq c \leq \bar{H}$.

Для построения решений (12) необходимо определить $\bar{\chi}$, $\bar{\varphi}$ и $f(H)$. Средние значения случайных величин φ и χ вычисляются обычными методами математической статистики, а для определения функции $f(H)$ возможны два подхода: теоретический на основе предельной теоремы Крамера [4] и эмпирический с использованием статистических методов. Согласно [5], с помощью предельной теоремы Крамера для стационарных случайных гауссовских процессов m может быть аппроксимировано средним числом максимумов функции $H(x)$ на единичном интервале, лежащих выше уровня $(H_N - c)$:

$$(14) \quad m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{K^{(4)}(0)}{K''(0)}} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{H_N - c}{\sqrt{K(0)}}\right) - \frac{\rho}{2} \exp\left[-\frac{(H_N - c)^2}{2K(0)}\right] - \sqrt{2\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\rho^{2v}}{(2v)!} \Phi(2v)\left(\frac{H_N - c}{\sqrt{K(0)}}\right) \Phi(2v - 1)(0) \right\},$$

где $K(x)$ — корреляционная функция профиля $H(x)$;

$$\rho = \frac{K''(0)}{K(0)K^{(4)}(0)}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \text{ — интеграл вероятности.}$$

Среднее число максимумов N на единичном интервале стационарного случайного гауссовского процесса определяется, согласно [6, 4], в виде

$$(15) \quad N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{K^{(4)}(0)}{K''(0)}}.$$

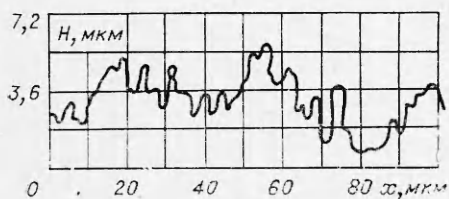
С учетом (15), (14) для вероятности смятия m -й вершины профиля имеем следующее выражение:

$$\frac{m}{N} = 1 - \Phi\left(\frac{H_N - c}{\sqrt{K(0)}}\right) - \frac{\rho}{2} \exp\left[-\frac{(H_N - c)^2}{2K(0)}\right] - \sqrt{2\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\rho^{2v}}{(2v)!} \Phi(2v)\left(\frac{H_N - c}{\sqrt{K(0)}}\right) \Phi(2v - 1)(0).$$

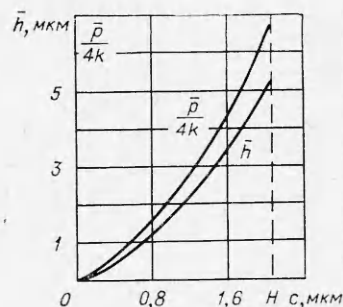
Функцию $f(H)$ можно также построить методами математической статистики при анализе профилограмм. При этом на вид функции распределения не накладываются никакие ограничения, однако для получения статистически достоверной функции распределения необходимо обработать больший объем реализаций профиля $H(x)$, чем при корреляционном анализе.

Для профилограммы поверхности образца из титанового сплава ОТ4 длиной $L = 1,7$ мм ($N = 213$), фрагмент реализации которой приведен на фиг. 1, решения уравнений (12) $\bar{h}(c)$ и $\bar{p}(c)$ с учетом ограничения (13) приведены на фиг. 2.

Построенные кривые $\bar{h}(c)$ и $\bar{p}(c)$ полностью определяются начальной конфигурацией профиля $H(x)$ и хорошо согласуются с основными экспериментальными результатами в области контакта шероховатых поверхностей [2]. Так, рост площади контакта и усилия в контакте идет с возрастающей скоростью преимущественно за счет



Фиг. 1



Фиг. 2

вовлечения в пластическое течение вновь сминаемых микровыступов. Влияние роста размеров отдельных площадок контакта в начальный период незначительно, но увеличивается по мере осадки штампа.

Применительно к задаче получения композиционного материала в твердом состоянии функция $p(c) = \bar{p}(c)N$ представляет собой программу приложения нагрузки, обеспечивающую образование физического контакта между соединяемыми компонентами, а $\bar{h}(c)$ позволяет определить соответствующую плотность контакта.

Автор выражает благодарность Ю. Н. Работнову и В. Д. Ключникову за внимание к работе.

Поступила 7 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Каракозов Э. С. Соединение металлов в твердой фазе. М., «Металлургия», 1976.
2. Демкин Н. Б. Контактное шероховатых поверхностей. М., «Наука», 1970.
3. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М., ИЛ, 1956.
4. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
5. Худсон Д. Статистика для физиков. М., «Мир», 1967.
6. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхности. Теоретико-вероятностный подход. М., «Мир», 1969.