УДК 539.3: 517.958

ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЙ ТЕНЗОР, БЛИЖАЙШИЙ ПО ЕВКЛИДОВОЙ НОРМЕ К ЗАДАННОМУ АНИЗОТРОПНОМУ ТЕНЗОРУ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача определения трансверсально-изотропного тензора, наиболее близкого по евклидовой норме к заданному анизотропному тензору модулей упругости. На основе разложения трансверсально-изотропного тензора в общей системе координат на изотропную, две девиаторные и нонорную части получен ортонормированный базис в пространстве трансверсально-изотропных тензоров при любой заданной оси симметрии. При проецировании на этот базис общего тензора анизотропии получен ближайший трансверсально-изотропный тензор. Выведены и решены уравнения для пяти коэффициентов трансверсально-изотропного тензора. Для направляющих косинусов оси вращения (симметрии) получены три уравнения, являющиеся условиями стационарности. Решение этих уравнений позволяет найти абсолютный минимум расстояния от трансверсально-изотропного тензора до заданного анизотропного тензора модулей упругости. Найден трансверсально-изотропный тензор модулей упругости, наиболее близкий к тензору кубической симметрии.

Ключевые слова: модули упругости, неприводимые инвариантные разложения, трансверсально-изотропный тензор, евклидово расстояние, ближайшие тензоры.

DOI: 10.15372/PMTF20190114

Свойства упругости анизотропных материалов характеризуются тензором четвертого ранга модулей упругости

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \tag{1}$$

в общем случае имеющем 21 независимую компоненту. Здесь и далее используется декартова прямоугольная система координат x_i, $i = 1, 2, 3$. Исследование и решение уравнений линейной теории упругости для общих анизотропных материалов является достаточно сложной задачей. Наиболее полно изучены уравнения и разработаны способы их решения в случае изотропных, трансверсально-изотропных или ортотропных материалов. Поэтому важной задачей является наиболее точная аппроксимация тензора A_{ijkl} более простым изотропным или трансверсально-изотропным тензором с произвольной осью симметрии (вращения). Упругое деформирование слоистых горных пород часто описывается моделью

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (код проекта III.23.3.1) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00679).

трансверсально-изотропного упругого тела [1]. Задача определения изотропного тензора, ближайшего к заданному анизотропному тензору модулей упругости, рассматривалась в работах [2–5]. При разложении общего тензора A_{ijkl} на изотропную, две девиаторные и нонорную части [6, 7] изотропная часть является ближайшей к тензору A_{ijkl} по евклидовой норме. Вопросы, связанные с определением эффективных (ближайших) тензоров, аппроксимирующих заданный тензор A_{ijkl}, рассматривались, например, в работах [4, 5, 8–13].

Тензору (1) соответствует матрица $A_{ij} = A_{ji}$ шестого порядка. Для симметричных по двум индексам тензоров используются формулы перехода от двухиндексных обозначений к одноиндексным

$$\begin{gathered} h_{11} = h_1, \qquad h_{22} = h_2, \qquad h_{33} = h_3, \\ \sqrt{2}\, h_{23} = \sqrt{2}\, h_{32} = h_4, \qquad \sqrt{2}\, h_{13} = \sqrt{2}\, h_{31} = h_5, \qquad \sqrt{2}\, h_{12} = \sqrt{2}\, h_{21} = h_6. \end{gathered} \tag{2}$$

При ортогональных преобразованиях системы координат

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \qquad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \qquad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq} \tag{3}$$

матрицы $A = [A_{ij}]$ модулей упругости преобразуются по формулам

$$A = \tilde{\alpha}\hat{A}\tilde{\alpha}', \qquad \hat{A} = \tilde{\alpha}' A\tilde{\alpha}, \qquad \tilde{\alpha}'\tilde{\alpha} = \delta. \tag{4}$$

В (3) и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование по допустимым значениям; штрих означает транспонирование матрицы. В (3), (4) символом Кронекера $\delta = [\delta_{pq}]$ обозначена единичная матрица соответствующего порядка. Согласно формулам (2) шестимерная ортогональная матрица $\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_{ip}]$ соответствует тензору $\alpha_{ijpq} = (\alpha_{ip}\alpha_{jq} + \alpha_{iq}\alpha_{jp})/2$ и выражается через компоненты трехмерной ортогональной матрицы α_{ip} (3) [9, 14].

В множестве общих тензоров (1) содержится подмножество трансверсально-изотропных тензоров C_{ijkl} с осью симметрии (вращения) n_i. Пусть имеет место равенство

$$A = C + B, \tag{5}$$

где C — произвольный трансверсально-изотропный тензор; B — остаточный тензор. Параметры C_{ij} и ось вращения n_i нужно выбрать таким образом, чтобы расстояние

$$d^2 = B_{ij}B_{ij} = (A_{ij} - C_{ij})(A_{ij} - C_{ij}) \tag{6}$$

было минимальным. Так как C_{ij} — ближайший трансверсально-изотропный тензор (матрица), то из (5) следует, что B_{ij} и C_{ij} должны быть ортогональными:

$$B_{ij}C_{ij} = (A_{ij} - C_{ij})C_{ij} = 0. \tag{7}$$

Заметим, что с учетом (7) для тензоров (5) выполняется теорема Пифагора

$$AA = (C + B)(C + B) = CC + BC + CB + BB = CC + BB,$$

при этом выражение для расстояния (6) принимает вид [9]

$$d^2 = BB = AA - CC. \tag{8}$$

Таким образом, формула (8) имеет место при выполнении условия ортогональности (7).

В [7] для тензора вида (1) приведена наиболее общая форма линейного инвариантного неприводимого разложения на изотропную, две девиаторные и нонорную части. Такое разложение имеет вид

$$A_{ijkl} = k_1 c^{(1)}_{ijkl} + k_2 c^{(2)}_{ijkl} + D_{ijkl} + d_{ijkl} + N_{ijkl}; \tag{9}$$

$$c^{(1)}_{ijkl} = a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})/2, \qquad c^{(2)}_{ijkl} = b_1\delta_{ij}\delta_{kl} + b_2(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})/2; \tag{10}$$

$$D_{ijkl} = \alpha_1(H_{ij}\delta_{kl} + H_{kl}\delta_{ij}) + \alpha_2(H_{ik}\delta_{lj} + H_{lj}\delta_{ik} + H_{il}\delta_{jk} + H_{jk}\delta_{il})/2,$$
$$d_{ijkl} = \beta_1(h_{ij}\delta_{kl} + h_{kl}\delta_{ij}) + \beta_2(h_{ik}\delta_{lj} + h_{lj}\delta_{ik} + h_{il}\delta_{jk} + h_{jk}\delta_{il})/2, \qquad (11)$$

где a_1, a_2; b_1, b_2; α_1, α_2; β_1, β_2 — независимые пары произвольных действительных чисел; k_1, k_2 — постоянные; девиаторы $H_{ij} = H_{(ij)}$, $h_{ij} = h_{(ij)}$ и нонор $N_{ijkl} = N_{(ijkl)}$ определяются через A_{ijkl}, причем $H_{ii} = 0$, $h_{ii} = 0$, $N_{ijkk} = 0$; индексы в скобках означают симметричность по всем индексам. Тензоры (11) и нонор N_{ijkl} ортогональны изотропной части (9), (10). За счет выбора свободных параметров в (10), (11) можно получать различные формы разложения (9), а также привести тензоры (10), (11) к нормированному и ортогональному виду. В последнем случае квадрат нормы тензора A_{ijkl} равен [7]

$$A_{ijkl}A_{ijkl} = k_1^2 + k_2^2 + H_{pq}H_{pq} + h_{pq}h_{pq} + N_{ijkl}N_{ijkl}. \qquad (12)$$

Представление (12) можно использовать для разности $B_{ijkl} = A_{ijkl} - C_{ijkl}$, при этом параметры C_{ijkl} следует выбирать таким образом, чтобы по возможности слагаемые в (12) принимали наименьшие значения.

Если вектор n_i ($n_in_i = 1$) задает направление произвольной оси вращения, то тензор C_{ijkl} для трансверсально-изотропной среды можно записать в виде [3, 15]

$$C_{ijkl} = c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + c_2(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})/2 + c_3(n_in_j\delta_{kl} + n_kn_l\delta_{ij}) +$$
$$+ c_4(n_in_k\delta_{lj} + n_ln_j\delta_{ik} + n_in_l\delta_{jk} + n_jn_k\delta_{il})/2 + c_5n_in_jn_kn_l, \qquad (13)$$

где c_i, $i = \overline{1,5}$ — постоянные. Выражение (13) аналогично формулам (9)–(11), но не является неприводимым разложением. Следуя [7], представим (13) в виде ортогонального неприводимого разложения (9). Коэффициенты k_1, k_2 определяются по формулам [6, 7]

$$k_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(C_{iikk} + 2C_{ikki}) = \sqrt{5}\,H, \qquad k_2 = \frac{1}{3}\,(C_{iikk} - C_{ikki}) = 2h \qquad (14)$$

и соответствуют разложению изотропной части на симметричную и несимметричную составляющие.

Далее из (13) находим

$$C_{ijkk} = (3c_1 + c_2 + c_3)\delta_{ij} + (3c_3 + 2c_4 + c_5)n_in_j,$$
$$C_{iikk} = 3(3c_1 + c_2 + 2c_3) + 2c_4 + c_5, \qquad (15)$$
$$p_{ij} = C_{ijkk} - C_{sskk}\delta_{ij}/3 = (3c_3 + 2c_4 + c_5)(n_in_j - \delta_{ij}/3);$$
$$C_{ikkj} = (c_1 + 2c_2 + c_4/2)\delta_{ij} + (2c_3 + 5c_4/2 + c_5)n_in_j,$$
$$C_{ikki} = 3(c_1 + 2c_2) + 2c_3 + 4c_4 + c_5, \qquad (16)$$
$$q_{ij} = C_{ikkj} - C_{skks}\delta_{ij}/3 = (2c_3 + 5c_4/2 + c_5)(n_in_j - \delta_{ij}/3).$$

С учетом (15), (16) получаем коэффициенты (14)

$$k_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,[15(c_1 + c_2) + 10(c_3 + c_4) + 3c_5] = \sqrt{5}\,H,$$
$$k_2 = \frac{1}{3}\,[3(2c_1 - c_2) + 2(2c_3 - c_4)] = 2h \qquad (17)$$

и девиаторы

$$H_{ij} = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{7}{6}}\,(p_{ij} + 2q_{ij}) = \frac{2}{7}\sqrt{\frac{7}{6}}\,[7(c_3 + c_4) + 3c_5]\Big(n_in_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big),$$
$$h_{ij} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,(p_{ij} - q_{ij}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\Big(c_3 - \frac{1}{2}\,c_4\Big)\Big(n_in_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big). \qquad (18)$$

Затем находим симметричную составляющую изотропной части тензора

$$k_1 c^{(1)}_{ijkl} = k_1 \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{19}$$

несимметричную составляющую

$$k_2 c^{(2)}_{ijkl} = k_2 \cdot \frac{1}{3}\Big(\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})\Big) \tag{20}$$

и девиаторные части

$$\begin{aligned} D_{ijkl} &= \Big(\frac{1}{3}\,(c_3+c_4) + \frac{1}{7}\,c_5\Big)\Big[\Big(n_in_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big)\delta_{kl} + \Big(n_kn_l - \frac{1}{3}\,\delta_{kl}\Big)\delta_{ij} + \\ &+ \Big(n_in_k - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\Big)\delta_{lj} + \Big(n_ln_j - \frac{1}{3}\,\delta_{lj}\Big)\delta_{ik} + \Big(n_in_l - \frac{1}{3}\,\delta_{il}\Big)\delta_{jk} + \Big(n_jn_k - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}\Big)\delta_{il}\Big], \\ d_{ijkl} &= \frac{2}{3}\Big(c_3 - \frac{1}{2}\,c_4\Big)\Big[\Big(n_in_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big)\delta_{kl} + \Big(n_kn_l - \frac{1}{3}\,\delta_{kl}\Big)\delta_{ij} - \\ &- \frac{1}{2}\Big(\Big(n_in_k - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\Big)\delta_{lj} + \Big(n_ln_j - \frac{1}{3}\,\delta_{lj}\Big)\delta_{ik} + \Big(n_in_l - \frac{1}{3}\,\delta_{il}\Big)\delta_{jk} + \Big(n_jn_k - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}\Big)\delta_{il}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{21}$$

С учетом формул (9), (13), (19)–(21) находим нонор

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= C_{ijkl} - k_1c^{(1)}_{ijkl} - k_2c^{(2)}_{ijkl} - D_{ijkl} - d_{ijkl} = \frac{1}{35}\,c_5[35n_in_jn_kn_l - 5(n_in_j\delta_{kl} + \\ &+ n_kn_l\delta_{ij} + n_in_k\delta_{lj} + n_ln_j\delta_{ik} + n_in_l\delta_{jk} + n_jn_k\delta_{il}) + \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}], \end{aligned} \tag{22}$$

являющийся симметричным по всем индексам бесследовым тензором. Формулы (17), (19)–(22) определяют все слагаемые представления тензора (13) в виде разложения (9).

Используя формулы (2) для перехода от двухиндексных обозначений к одноиндексным, запишем тензор C_{ijkl} (13) в виде матрицы $C_{ij} = C_{ji}$ с компонентами

$$\begin{gathered} C_{11} = c_1 + c_2 + 2(c_3+c_4)n_1^2 + c_5n_1^4, \\ C_{21} = c_1 + c_3(n_1^2+n_2^2) + c_5n_1^2n_2^2, \qquad C_{22} = c_1 + c_2 + 2(c_3+c_4)n_2^2 + c_5n_2^4, \\ C_{31} = c_1 + c_3(n_1^2+n_3^2) + c_5n_1^2n_3^2, \qquad C_{32} = c_1 + c_3(n_2^2+n_3^2) + c_5n_2^2n_3^2, \\ C_{41} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_5n_1^2)n_2n_3, \qquad C_{42} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_4 + c_5n_2^2)n_2n_3, \\ C_{51} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_4 + c_5n_1^2)n_1n_3, \qquad C_{52} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_5n_2^2)n_1n_3, \\ C_{61} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_4 + c_5n_1^2)n_1n_2, \qquad C_{62} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_4 + c_5n_2^2)n_1n_2, \\ C_{33} = c_1 + c_2 + 2(c_3+c_4)n_3^2 + c_5n_3^4, \\ C_{43} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_4 + c_5n_3^2)n_2n_3, \qquad C_{44} = c_2 + c_4(n_2^2+n_3^2) + 2c_5n_2^2n_3^2, \\ C_{53} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_4 + c_5n_3^2)n_1n_3, \qquad C_{54} = (c_4 + 2c_5n_3^2)n_1n_2, \\ C_{63} = \sqrt{2}\,(c_3 + c_5n_3^2)n_1n_3, \qquad C_{64} = (c_4 + 2c_5n_2^2)n_1n_3, \\ C_{55} = c_2 + c_4(n_1^2+n_3^2) + 2c_5n_1^2n_3^2, \\ C_{65} = (c_4 + 2c_5n_1^2)n_2n_3, \qquad C_{66} = c_2 + c_4(n_1^2+n_2^2) + 2c_5n_1^2n_2^2. \end{gathered} \tag{23}$$

При задании оси вращения n_i формулы (23) определяют компоненты C_{ij} в общей ортогональной системе координат. При $n_i = (0,0,1)$ получаем компоненты C_{ij} в канонической системе координат с осью вращения (симметрии) x_3 [15].

Тензоры (1) или матрицы $A_{ij} = A_{ji}$ могут быть представлены в виде разложения по ортонормированному базису $t_{ijpq} = t_{jipq} = t_{ijqp}$ [4, 6]:

$$A_{ij} = t_{ijpq}\tilde{A}_{pq}, \quad \tilde{A}_{pq} = A_{ij}t_{ijpq}, \quad t_{ijpq}t_{ijrs} = \delta_{pqrs} = \frac{1}{2}\,(\delta_{pr}\delta_{sq} + \delta_{ps}\delta_{qr}). \tag{24}$$

В (24) индексы принимают значения от 1 до 6. Для трансверсально-изотропных тензоров (матриц) в [4] приведен базис вида (ось симметрии x_3)

$$t_{ij(1)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & \text{sym} & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad t_{ij(2)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ -1 & 2 & & & \text{sym} & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$t_{ij(3)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & & & & & \\ -2 & -2 & & & \text{sym} & \\ 1 & 1 & 4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t_{ij(4)} = \frac{1}{3\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -4 & & & & & \\ 2 & -4 & & & \text{sym} & \\ 2 & 2 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 9 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$t_{ij(5)} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -5 & 1 & & & \text{sym} & \\ 4 & 4 & -8 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

В (25) использованы обозначения (2); обозначение sym соответствует элементам матрицы, симметричным относительно ее диагонали. Первые два тензора (матрицы) в (25) соответствуют тензорам [7]

$$c^{(1)}_{ijkl} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\delta_{kl}, \qquad c^{(2)}_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-\frac{1}{3}\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk})\Big).$$

Тензоры (матрицы) (25) ортонормированы. Найдем проекции тензора A_{ij} на базис (25):

$$\tilde{A}_1 = A_{ij}t_{ij(1)} = \frac{1}{3}\,(A_{11} + A_{22} + A_{33} + 2(A_{21} + A_{31} + A_{32})),$$

$$\tilde{A}_2 = A_{ij}t_{ij(2)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(2(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 3(A_{44} + A_{55} + A_{66}) - 2(A_{21} + A_{31} + A_{32})),$$

$$\tilde{A}_3 = A_{ij}t_{ij(3)} = \frac{1}{3}\,(-A_{11} - A_{22} + 2A_{33} - 2A_{21} + A_{31} + A_{32}), \tag{26}$$

$$\tilde{A}_4 = A_{ij}t_{ij(4)} = \frac{1}{3\sqrt{30}}\,(-4(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + 9(A_{44} + A_{55}) - 6A_{66} + 4(A_{21} + A_{31} + A_{32})),$$

$$\tilde{A}_5 = A_{ij}t_{ij(5)} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\,(A_{11} + A_{22} - 8A_{33} + 6A_{66} - 10A_{21} + 8(A_{31} + A_{32})).$$

С учетом (25), (26) ближайший к заданному тензору A_{ij} трансверсально-изотропный тензор C_{ij} с осью симметрии x_3 принимает вид [4]

$$C_{ij} = t_{ij(1)}\tilde{A}_1 + t_{ij(2)}\tilde{A}_2 + t_{ij(3)}\tilde{A}_3 + t_{ij(4)}\tilde{A}_4 + t_{ij(5)}\tilde{A}_5. \tag{27}$$

Вычисляя компоненты C_{ij} (27), получаем матрицу [9]

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} (3(A_{11}+A_{22})+2(A_{66}+A_{21}))/8 & & & & & \\ (A_{11}+A_{22}-2A_{66}+6A_{21})/8 & C_{11} & & & \text{sym} & \\ (A_{31}+A_{32})/2 & C_{31} & A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & (A_{44}+A_{55})/2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{21} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Ближайший к заданному тензору A_{ij} трансверсально-изотропный тензор (27), (28) с осью симметрии x_3 получен с использованием ортонормированного базиса (25), но возможны и другие ортонормированные базисы. В [7] приведено разложение тензора (13), (23) на ортогональные составляющие вида (19)–(22) для случая оси симметрии x_3. Нормируя эти составляющие, получаем следующий базис:

$$t_{ij(1)} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & & \text{sym} & \\ 1 & 1 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad t_{ij(2)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & \text{sym} & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$t_{ij(3)} = \frac{1}{6\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 6 & & & & & \\ 2 & 6 & & & \text{sym} & \\ -1 & -1 & -12 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad t_{ij(4)} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2 & 0 & & & \text{sym} & \\ -1 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$t_{ij(5)} = \frac{1}{2\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & & \text{sym} & \\ -4 & -4 & 8 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Первые два тензора (матрицы) в (29) соответствуют тензорам $c^{(1)}_{ijkl}$ (19), $c^{(2)}_{ijkl}$ (20). Базис (29) не совпадает с базисом (25). Проверим, будет ли ближайший трансверсально-изотропный тензор, построенный на основе базиса (29), совпадать с таким же тензором, полученным с использованием базиса (25).

Найдем проекции тензора A_{ij} на базис (29):

$$\tilde{A}_1 = A_{ij}t_{ij(1)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\,(3(A_{11}+A_{22}+A_{33})+2(A_{44}+A_{55}+A_{66}+A_{21}+A_{31}+A_{32})),$$

$$\tilde{A}_2 = A_{ij}t_{ij(2)} = \frac{1}{3}\,(-(A_{44}+A_{55}+A_{66})+2(A_{21}+A_{31}+A_{32})),$$

$$\tilde{A}_3 = A_{ij}t_{ij(3)} = \frac{1}{3\sqrt{7}}\,(3(A_{11}+A_{22})-6A_{33}-(A_{44}+A_{55})+2A_{66}+2A_{21}-(A_{31}+A_{32})), \quad (30)$$

$$\tilde{A}_4 = A_{ij}t_{ij(4)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,(A_{44}+A_{55}-2A_{66}+4A_{21}-2(A_{31}+A_{32})),$$

$$\tilde{A}_5 = A_{ij}t_{ij(5)} = \frac{1}{2\sqrt{70}}\,(3(A_{11}+A_{22})+8(A_{33}-A_{44}-A_{55})+2(A_{66}+A_{21})-8(A_{31}+A_{32})).$$

С учетом (29), (30), вычисляя по формуле (27) компоненты C_{ij}, получаем те же значения (28). Таким образом, использование различных ортонормированных базисов приводит к одному и тому же результату.

Получим ортонормированный базис в общем случае при произвольной оси вращения n_i. Для этого требуется нормировать тензоры (18), (21), (22). Нормированные тензоры (18) совпадают:

$$H_{ij} = h_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big(n_i n_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big) = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} n_1^2 - 1/3 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1/3 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1/3 \end{bmatrix}, \qquad (31)$$

при этом тензоры (21) принимают вид

$$D_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\Big[\Big(n_i n_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big)\delta_{kl} + \Big(n_k n_l - \frac{1}{3}\,\delta_{kl}\Big)\delta_{ij} + \Big(n_i n_k - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\Big)\delta_{lj} + {}$$
$$+ \Big(n_l n_j - \frac{1}{3}\,\delta_{lj}\Big)\delta_{ik} + \Big(n_i n_l - \frac{1}{3}\,\delta_{il}\Big)\delta_{jk} + \Big(n_j n_k - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}\Big)\delta_{il}\Big], \qquad (32)$$
$$d_{ijkl} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\Big(n_i n_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\Big)\delta_{kl} + \Big(n_k n_l - \frac{1}{3}\,\delta_{kl}\Big)\delta_{ij} - \frac{1}{2}\,\Big(\Big(n_i n_k - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\Big)\delta_{lj} + {}$$
$$+ \Big(n_l n_j - \frac{1}{3}\,\delta_{lj}\Big)\delta_{ik} + \Big(n_i n_l - \frac{1}{3}\,\delta_{il}\Big)\delta_{jk} + \Big(n_j n_k - \frac{1}{3}\,\delta_{jk}\Big)\delta_{il}\Big)\Big],$$

а нормированный нонор (22) имеет вид

$$N_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{70}}\,[35 n_i n_j n_k n_l - 5(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij} + n_i n_k \delta_{lj} + {}$$
$$+ n_l n_j \delta_{ik} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_k \delta_{il}) + \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}]. \qquad (33)$$

Записывая тензоры (19), (20), (32), (33) в матричном виде, получаем ортонормированный базис в пространстве трансверсально-изотропных тензоров с произвольной осью симметрии n_i:

$$t_{ij(1)} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & \text{sym} & & \\ 1 & 1 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad t_{ij(2)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & \text{sym} & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$t_{ij(3)} = \frac{1}{2\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 6(n_1^2 - 1/3) & & & & & \\ 1/3 - n_3^2 & 6(n_2^2 - 1/3) & & & \text{sym} & \\ 1/3 - n_2^2 & 1/3 - n_1^2 & 6(n_3^2 - 1/3) & & & \\ \sqrt{2}\,n_2 n_3 & 3\sqrt{2}\,n_2 n_3 & 3\sqrt{2}\,n_2 n_3 & 2(1/3 - n_1^2) & & \\ 3\sqrt{2}\,n_1 n_3 & \sqrt{2}\,n_1 n_3 & 3\sqrt{2}\,n_1 n_3 & 2n_1 n_2 & 2(1/3 - n_2^2) & \\ 3\sqrt{2}\,n_1 n_2 & 3\sqrt{2}\,n_1 n_2 & \sqrt{2}\,n_1 n_2 & 2n_1 n_3 & 2n_2 n_3 & 2(1/3 - n_3^2) \end{bmatrix},$$

$$t_{ij(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1/3 - n_3^2 & 0 & & & \text{sym} & \\ 1/3 - n_2^2 & 1/3 - n_1^2 & 0 & & & \\ \sqrt{2}\,n_2 n_3 & 0 & 0 & n_1^2 - 1/3 & & \\ 0 & \sqrt{2}\,n_1 n_3 & 0 & -n_1 n_2 & n_2^2 - 1/3 & \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\,n_1 n_2 & -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & n_3^2 - 1/3 \end{bmatrix}, \qquad (34)$$

$$t_{ij(5)} = \frac{1}{2\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 35n_1^4 - 30n_1^2 + 3 & & & & & \\ 35n_1^2n_2^2 - 5(n_1^2+n_2^2)+1 & 35n_2^4 - 30n_2^2 + 3 & & & & \\ 35n_1^2n_3^2 - 5(n_1^2+n_3^2)+1 & 35n_2^2n_3^2 - 5(n_2^2+n_3^2)+1 & 35n_3^4 - 30n_3^2 + 3 & & \text{sym} & \\ (7n_1^2-1)\cdot 5\sqrt{2}n_2n_3 & (7n_2^2-3)\cdot 5\sqrt{2}n_2n_3 & (7n_3^2-3)\cdot 5\sqrt{2}n_2n_3 & 2N_{32} & & \\ (7n_1^2-3)\cdot 5\sqrt{2}n_1n_3 & (7n_2^2-1)\cdot 5\sqrt{2}n_1n_3 & (7n_3^2-3)\cdot 5\sqrt{2}n_1n_3 & \sqrt{2}N_{63} & 2N_{31} & \\ (7n_1^2-3)\cdot 5\sqrt{2}n_1n_2 & (7n_2^2-3)\cdot 5\sqrt{2}n_1n_2 & (7n_3^2-1)\cdot 5\sqrt{2}n_1n_2 & \sqrt{2}N_{52} & \sqrt{2}N_{41} & 2N_{21} \end{bmatrix}.$$

В последней матрице величины N_{ij} означают элементы матрицы без учета коэффициента перед матрицей. Базис (29) получается из базиса (34) при $n_i = (0, 0, 1)$, но в (29) коэффициент при тензоре (31) взят со знаком "минус". Кроме базиса (34) возможны и другие ортонормированные базисы, которые получаются из ортонормированных разложений вида (9)–(11), приведенных в [7].

Так как первые два тензора в базисах (29), (34) одинаковые, то проекции $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ на эти тензоры определяются первыми двумя формулами (30). Найдем остальные проекции тензора A_{ij} на базис (34):

$$\tilde{A}_3 = A_{ij}t_{ij(3)} = \frac{1}{\sqrt{7}}\Big[(3A_{11} - A_{44} - A_{32})\Big(n_1^2 - \frac{1}{3}\Big) + (3A_{22} - A_{55} - A_{31})\Big(n_2^2 - \frac{1}{3}\Big) +$$
$$+ (3A_{33} - A_{66} - A_{21})\Big(n_3^2 - \frac{1}{3}\Big) + \sqrt{2}\,(A_{41} + 3A_{42} + 3A_{43} + \sqrt{2}\,A_{65})n_2n_3 +$$
$$+ \sqrt{2}\,(3A_{51} + A_{52} + 3A_{53} + \sqrt{2}\,A_{64})n_1n_3 + \sqrt{2}\,(3A_{61} + 3A_{62} + A_{63} + \sqrt{2}\,A_{54})n_1n_2\Big], \quad (35)$$
$$\tilde{A}_4 = A_{ij}t_{ij(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(A_{44} - 2A_{32})\Big(n_1^2 - \frac{1}{3}\Big) + (A_{55} - 2A_{31})\Big(n_2^2 - \frac{1}{3}\Big) + (A_{66} - 2A_{21})\Big(n_3^2 - \frac{1}{3}\Big) +$$
$$+ 2\sqrt{2}\,\Big(A_{41} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,A_{65}\Big)n_2n_3 + 2\sqrt{2}\,\Big(A_{52} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,A_{64}\Big)n_1n_3 + 2\sqrt{2}\,\Big(A_{63} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,A_{54}\Big)n_1n_2\Big].$$

Выражения $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_4$ (35) представляют собой проекции тензоров второго ранга

$$A_{ij}^s = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\,(3A_{11} - A_{44} - A_{32}) & & \text{sym} \\ 3(A_{61} + A_{62}) + A_{63} + \sqrt{2}\,A_{54} & \sqrt{2}\,(3A_{22} - A_{55} - A_{31}) & \\ 3(A_{51} + A_{53}) + A_{52} + \sqrt{2}\,A_{64} & A_{41} + 3(A_{42} + A_{43}) + \sqrt{2}\,A_{65} & \sqrt{2}\,(3A_{33} - A_{66} - A_{21}) \end{bmatrix},$$

$$A_{ij}^{as} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} A_{44} - 2A_{32} & \text{sym} & \\ \sqrt{2}\,(A_{63} - A_{54}/\sqrt{2}\,) & A_{55} - 2A_{31} & \\ \sqrt{2}\,(A_{52} - A_{64}/\sqrt{2}) & \sqrt{2}\,(A_{41} - A_{65}/\sqrt{2}) & A_{66} - 2A_{21} \end{bmatrix}$$

на единичный девиатор (31). Далее находим $\tilde{A}_5$, учитывая свойства нонора:

$$\tilde{A}_5 = A_{ij}t_{ij(5)} = \frac{1}{2\sqrt{70}}\,[(-A_{11} - A_{22} + 2(A_{66} + A_{21}))N_{21} + (-A_{11} - A_{33} + 2(A_{55} + A_{31}))N_{31} +$$
$$+ (-A_{22} - A_{33} + 2(A_{44} + A_{32}))N_{32} + 2(-A_{41} + A_{42} - \sqrt{2}\,A_{65})N_{42} +$$
$$+ 2(-A_{41} + A_{43} - \sqrt{2}\,A_{65})N_{43} + 2(-A_{52} + A_{51} - \sqrt{2}\,A_{64})N_{51} +$$
$$+2(-A_{52} + A_{53} - \sqrt{2}\,A_{64})N_{53} + 2(-A_{63} + A_{61} - \sqrt{2}\,A_{54})N_{61} + 2(-A_{63} + A_{62} - \sqrt{2}\,A_{54})N_{62}]. \quad (36)$$

В (36) нужно подставить выражения N_{ij} из последней матрицы в (34).

Таким образом, ближайший к заданному тензору A_{ij} трансверсально-изотропный тензор C_{ij} с произвольной осью вращения n_i имеет вид (27), где $t_{ij(p)}$, $p = \overline{1,5}$ — базис (34); $\tilde{A}_p$, $p = \overline{1,5}$ — коэффициенты (30), (35), (36). Для представления (27) соотношение (7), имеющее вид $(A - C)C = AC - CC = 0$, выполняется:

$$A_{ij}(t_{ij(1)}\tilde{A}_1 + t_{ij(2)}\tilde{A}_2 + t_{ij(3)}\tilde{A}_3 + t_{ij(4)}\tilde{A}_4 + t_{ij(5)}\tilde{A}_5) = \tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2 + \tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_4^2 + \tilde{A}_5^2 =$$
$$= (t_{ij(1)}\tilde{A}_1 + t_{ij(2)}\tilde{A}_2 + t_{ij(3)}\tilde{A}_3 + t_{ij(4)}\tilde{A}_4 + t_{ij(5)}\tilde{A}_5) \times$$
$$\times (t_{ij(1)}\tilde{A}_1 + t_{ij(2)}\tilde{A}_2 + t_{ij(3)}\tilde{A}_3 + t_{ij(4)}\tilde{A}_4 + t_{ij(5)}\tilde{A}_5).$$

При этом квадрат расстояния до ближайшего трансверсально-изотропного тензора определяется формулой (8):

$$d^2 = B_{ij}B_{ij} = A_{ij}A_{ij} - C_{ij}C_{ij} = A_{ij}A_{ij} - \tilde{A}_1^2 - \tilde{A}_2^2 - \tilde{A}_3^2 - \tilde{A}_4^2 - \tilde{A}_5^2. \qquad (37)$$

В (37) первые три слагаемых не зависят от вектора n_i. От этого вектора зависят только $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_4$, $\tilde{A}_5$ (35), (36). При любой фиксированной оси вращения n_i расстояние, определяемое выражением (37), минимально, но, изменяя направление оси n_i, его можно уменьшить и получить наименьшее значение d^2. Таким образом, нужно найти экстремальные значения функции $g = \tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_4^2 + \tilde{A}_5^2$ при условии $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

Однако более целесообразно использовать четырехиндексное выражение для C_{ijkl} (13) и искать экстремум функции (6):

$$f = (A_{ijkl} - C_{ijkl})(A_{ijkl} - C_{ijkl}) + 4\lambda(n_i n_i - 1) \qquad (38)$$

(λ — множитель Лагранжа). Можно применять также двухиндексные обозначения (6), (23), при этом конечный результат будет один и тот же, но расчеты являются более сложными. Экстремум функции (38) будем искать по переменным c_i, n_i. Находим производные функции (38) по этим переменным с учетом (13), (15), (16):

$$\frac{\partial f}{\partial c_1} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})\,\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial c_1} = -2(A_{iikk} - C_{iikk}) = 2(9c_1 + 3c_2 + 6c_3 + 2c_4 + c_5 - A_{iikk}),$$
$$\frac{\partial f}{\partial c_2} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})\,\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial c_2} = -2(A_{ikki} - C_{ikki}) = 2(3c_1 + 6c_2 + 2c_3 + 4c_4 + c_5 - A_{ikki}),$$
$$\frac{\partial f}{\partial c_3} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})\,\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial c_3} = -4(A_{ijkk} - C_{ijkk})n_i n_j =$$
$$= 4(3c_1 + c_2 + 4c_3 + 2c_4 + c_5 - A_{ijkk}n_i n_j), \qquad (39)$$
$$\frac{\partial f}{\partial c_4} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})\,\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial c_4} = -4(A_{ikkj} - C_{ikkj})n_i n_j = 4(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + c_5 - A_{ikkj}n_i n_j),$$
$$\frac{\partial f}{\partial c_5} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})\,\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial c_5} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})n_i n_j n_k n_l =$$
$$= 2(c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 + c_5 - A_{ijkl}n_i n_j n_k n_l);$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_s} = -2(A_{ijkl} - C_{ijkl})\,\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial n_s} + 8\lambda n_s = -8[c_3(A_{sjkk} - C_{sjkk})n_j +$$
$$+ c_4(A_{skkl} - C_{skkl})n_l + c_5(A_{sjkl} - C_{sjkl})n_j n_k n_l] + 8\lambda n_s =$$
$$= -8\{c_3[A_{sjkk}n_j - (3c_1 + c_2 + 4c_3 + 2c_4 + c_5)n_s] + c_4[A_{skkl}n_l - (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + c_5)n_s] +$$
$$+ c_5[A_{sjkl}n_j n_k n_l - (c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 + c_5)n_s] - \lambda n_s\}, \quad s = 1, 2, 3. \qquad (40)$$

Точки экстремумов (стационарные точки) функции (38) определяются из условий равенства нулю производных (39), (40):

$$9c_1 + 3c_2 + 6c_3 + 2c_4 + c_5 = A_{iikk} = f_1,$$

$$\begin{gathered}
3c_1+6c_2+2c_3+4c_4+c_5=A_{ikki}=f_2,\\
3c_1+c_2+4c_3+2c_4+c_5=A_{ijkk}n_in_j=f_3,\\
c_1+2c_2+2c_3+3c_4+c_5=A_{ikkj}n_in_j=f_4,\\
c_1+c_2+2c_3+2c_4+c_5=A_{ijkl}n_in_jn_kn_l=f_5;
\end{gathered}\tag{41}$$

$$(c_3A_{slkk}+c_4A_{skkl}+c_5A_{sjkl}n_jn_k)n_l=(c_3f_3+c_4f_4+c_5f_5+\lambda)n_s,\qquad s=1,2,3.\tag{42}$$

В (42) использованы равенства и обозначения (41). Умножая (40) или (42) на n_s, с учетом (41) получаем $\lambda=0$ и $n_s\,\partial f/\partial n_s=0$.

Таким образом, множитель Лагранжа λ в (38), (40), (42) оказывается нулевым, а так как равенство $n_s\,\partial f/\partial n_s=0$ выполняется при любых n_s, то согласно теореме Эйлера функция $f=(A_{ijkl}-C_{ijkl})(A_{ijkl}-C_{ijkl})$ является однородной функцией нулевой степени однородности относительно переменных n_s. Эта функция принимает экстремальные (стационарные) значения при выполнении необходимых условий (41), (42). Из (39) находим вторые производные

$$\frac{\partial f}{\partial c_i\,\partial c_k}=f_{ik}=\begin{bmatrix}18&6&12&4&2\\6&12&4&8&2\\12&4&16&8&4\\4&8&8&12&4\\2&2&4&4&2\end{bmatrix}.\tag{43}$$

Функция (38) имеет минимум при выполнении условий (41), если матрица (43) является положительно-определенной. Можно показать, что все главные миноры матрицы (43) положительны, т. е. матрица (43) положительно-определенная и условия (41) определяют минимум функции f (38) при произвольной оси вращения n_i.

Запишем правые части уравнений (41) с учетом обозначений (2) в развернутом виде

$$\begin{gathered}
f_1=A_{iikk}=A_{11}+A_{22}+A_{33}+2(A_{32}+A_{31}+A_{21}),\\
f_2=A_{ikki}=A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}+A_{55}+A_{66},\\
f_3=A_{ijkk}n_in_j=(A_{11}+A_{21}+A_{31})n_1^2+\sqrt2\,(A_{61}+A_{62}+A_{63})n_1n_2+\sqrt2\,(A_{51}+A_{52}+A_{53})n_1n_3+\\
+(A_{21}+A_{22}+A_{32})n_2^2+\sqrt2\,(A_{41}+A_{42}+A_{43})n_2n_3+(A_{31}+A_{32}+A_{33})n_3^2,\\
f_4=A_{ikkj}n_in_j=\Big(A_{11}+\frac12\,(A_{55}+A_{66})\Big)n_1^2+\sqrt2\,\Big(A_{61}+A_{62}+\frac{1}{\sqrt2}\,A_{54}\Big)n_1n_2+\\
+\sqrt2\,\Big(A_{51}+A_{53}+\frac{1}{\sqrt2}\,A_{64}\Big)n_1n_3+\Big(A_{22}+\frac12\,(A_{44}+A_{66})\Big)n_2^2+\\
+\sqrt2\,\Big(A_{42}+A_{43}+\frac{1}{\sqrt2}\,A_{65}\Big)n_2n_3+\Big(A_{33}+\frac12\,(A_{44}+A_{55})\Big)n_3^2,\\
f_5=A_{ijkl}n_in_jn_kn_l=A_{(ijkl)}n_in_jn_kn_l=A_{11}n_1^4+2\sqrt2\,A_{61}n_1^3n_2+2\sqrt2\,A_{51}n_1^3n_3+\\
+2(A_{21}+A_{66})n_1^2n_2^2+2(\sqrt2\,A_{41}+2A_{65})n_1^2n_2n_3+2(A_{31}+A_{55})n_1^2n_3^2+2\sqrt2\,A_{62}n_1n_2^3+\\
+2(\sqrt2\,A_{52}+2A_{64})n_1n_2^2n_3+2(\sqrt2\,A_{63}+2A_{54})n_1n_2n_3^2+2\sqrt2\,A_{53}n_1n_3^3+A_{22}n_2^4+\\
+2\sqrt2\,A_{42}n_2^3n_3+2(A_{32}+A_{44})n_2^2n_3^2+2\sqrt2\,A_{43}n_2n_3^3+A_{33}n_3^4.
\end{gathered}\tag{44}$$

Из выражений f_3, f_4 (44) следует, что тензоры A_{ijkk} и A_{ikkj} имеют вид

$$A_{ijkk}=\begin{bmatrix}A_{11}+A_{21}+A_{31}&&\mathrm{sym}\\(A_{61}+A_{62}+A_{63})/\sqrt2&A_{21}+A_{22}+A_{32}&\\(A_{51}+A_{52}+A_{53})/\sqrt2&(A_{41}+A_{42}+A_{43})/\sqrt2&A_{31}+A_{32}+A_{33}\end{bmatrix},$$

$$A_{ikkj} = \begin{bmatrix} A_{11} + (A_{55} + A_{66})/2 & & \text{sym} \\ (A_{61} + A_{62} + A_{54}/\sqrt{2}\,)/\sqrt{2} & A_{22} + (A_{44} + A_{66})/2 & \\ (A_{51} + A_{53} + A_{64}/\sqrt{2}\,)/\sqrt{2} & (A_{42} + A_{43} + A_{65}/\sqrt{2}\,)/\sqrt{2} & A_{33} + (A_{44} + A_{55})/2 \end{bmatrix}.$$

Симметричный по всем индексам тензор $A_{(ijkl)} = (A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk})/3$ [6, 7] можно представить в матричной форме:

$$A_{(ij)} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ (A_{21} + A_{66})/3 & A_{22} & & & \text{sym} & \\ (A_{31} + A_{55})/3 & (A_{32} + A_{44})/3 & A_{33} & & & \\ (A_{41} + \sqrt{2}\,A_{65})/3 & A_{42} & A_{43} & 2A_{(32)} & & \\ A_{51} & (A_{52} + \sqrt{2}\,A_{64})/3 & A_{53} & \sqrt{2}\,A_{(63)} & 2A_{(31)} & \\ A_{61} & A_{62} & (A_{63} + \sqrt{2}\,A_{54})/3 & \sqrt{2}\,A_{(52)} & \sqrt{2}\,A_{(41)} & 2A_{(21)} \end{bmatrix}.$$

Несимметричная часть $A_{ijkl} - A_{(ijkl)} = (2A_{ijkl} - A_{iklj} - A_{iljk})/3$ [6, 7] также может быть представлена в матричной форме:

$$A_{ij} - A_{(ij)} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2A_{21} - A_{66} & 0 & & & \text{sym} & \\ 2A_{31} - A_{55} & 2A_{32} - A_{44} & 0 & & & \\ 2A_{41} - \sqrt{2}A_{65} & 0 & 0 & A_{44} - 2A_{32} & & \\ 0 & 2A_{52} - \sqrt{2}A_{64} & 0 & A_{54} - \sqrt{2}A_{63} & A_{55} - 2A_{31} & \\ 0 & 0 & 2A_{63} - \sqrt{2}A_{54} & A_{64} - \sqrt{2}A_{52} & A_{65} - \sqrt{2}A_{41} & A_{66} - 2A_{21} \end{bmatrix}.$$

Из равенства $A_{ij} - A_{(ij)} = 0$ следуют шесть условий Коши [16].

Расстояние, определяемое формулами (6), (38), является минимальным, если выполняется условие (7) ортогональности $B = A - C$ и C. Найдем выражения для величин, входящих в (7), с учетом (13):

$$A_{ijkl}C_{ijkl} = c_1 A_{iikk} + c_2 A_{ikki} + 2c_3 A_{ijkk} n_i n_j + 2c_4 A_{ikkj} n_i n_j + c_5 A_{ijkl} n_i n_j n_k n_l,$$

$$C_{ijkl}C_{ijkl} = c_1(9c_1 + 3c_2 + 6c_3 + 2c_4 + c_5) + c_2(3c_1 + 6c_2 + 2c_3 + 4c_4 + c_5) + \qquad (45)$$

$$+ 2c_3(3c_1 + c_2 + 4c_3 + 2c_4 + c_5) + 2c_4(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 3c_4 + c_5) + c_5(c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 + c_5).$$

Выражения (45) совпадают, если выполняются соотношения (41), т. е. уравнения (41) обеспечивают выполнение условия ортогональности (7) при любом векторе n_i.

Решая линейную систему (41) относительно c_i, получаем коэффициенты

$$c_1 = \frac{1}{8}\,(3f_1 - 2f_2 - 6f_3 + 4f_4 + f_5),$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\,(-f_1 + 2f_2 + 2f_3 - 4f_4 + f_5), \qquad c_3 = \frac{1}{8}\,(-3f_1 + 2f_2 + 10f_3 - 4f_4 - 5f_5), \qquad (46)$$

$$c_4 = \frac{1}{4}\,(f_1 - 2f_2 - 2f_3 + 8f_4 - 5f_5), \qquad c_5 = \frac{1}{8}\,(f_1 + 2f_2 - 10f_3 - 20f_4 + 35f_5).$$

Выражения (45) с учетом (41), (46) представляются в квадратичной форме от переменных c_i или f_i. Подставляя в (46) выражения (44) и учитывая (13) и первую формулу (45), получаем представление коэффициентов c_i

$$\begin{aligned}
c_1 &= A_{ijkl}\Big[\frac{3}{8}\,\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{4}\,(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 - \frac{3}{8}\,(n_in_j\delta_{kl}+n_kn_l\delta_{ij}) + \\
&\qquad + \frac{1}{4}\,(n_in_k\delta_{lj}+n_ln_j\delta_{ik}+n_in_l\delta_{jk}+n_jn_k\delta_{il})/2 + \frac{1}{8}\,n_in_jn_kn_l\Big] = A_{ijkl}C^{(1)}_{ijkl}, \\
c_2 &= A_{ijkl}\Big[-\frac{1}{4}\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 + \frac{1}{4}\,(n_in_j\delta_{kl}+n_kn_l\delta_{ij}) - \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,(n_in_k\delta_{lj}+n_ln_j\delta_{ik}+n_in_l\delta_{jk}+n_jn_k\delta_{il})/2 + \frac{1}{4}\,n_in_jn_kn_l\Big] = A_{ijkl}C^{(2)}_{ijkl}, \\
c_3 &= A_{ijkl}\Big[-\frac{3}{8}\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4}\,(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 + \frac{5}{8}\,(n_in_j\delta_{kl}+n_kn_l\delta_{ij}) - \\
&\qquad - \frac{1}{4}\,(n_in_k\delta_{lj}+n_ln_j\delta_{ik}+n_in_l\delta_{jk}+n_jn_k\delta_{il})/2 - \frac{5}{8}\,n_in_jn_kn_l\Big] = A_{ijkl}C^{(3)}_{ijkl}, \qquad (47)\\
c_4 &= A_{ijkl}\Big[\frac{1}{4}\,\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 - \frac{1}{4}\,(n_in_j\delta_{kl}+n_kn_l\delta_{ij}) + \\
&\qquad + (n_in_k\delta_{lj}+n_ln_j\delta_{ik}+n_in_l\delta_{jk}+n_jn_k\delta_{il})/2 - \frac{5}{4}\,n_in_jn_kn_l\Big] = A_{ijkl}C^{(4)}_{ijkl}, \\
c_5 &= A_{ijkl}\Big[\frac{1}{8}\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4}\,(\delta_{ik}\delta_{lj}+\delta_{il}\delta_{jk})/2 - \frac{5}{8}\,(n_in_j\delta_{kl}+n_kn_l\delta_{ij}) - \\
&\qquad - \frac{5}{4}\,(n_in_k\delta_{lj}+n_ln_j\delta_{ik}+n_in_l\delta_{jk}+n_jn_k\delta_{il})/2 + \frac{35}{8}\,n_in_jn_kn_l\Big] = A_{ijkl}C^{(5)}_{ijkl}
\end{aligned}$$

в виде проекций заданного тензора A_{ijkl} на некоторые трансверсально-изотропные тензоры $C^{(s)}_{ijkl}$, $s=\overline{1,5}$ вида (13) с конкретными значениями констант $c^{(s)}_i$, которые очевидны из выражений (47).

Используя формулы (45), можно показать, что тензоры $C^{(s)}_{ijkl}$, $s=\overline{1,5}$ не являются единичными (кроме $C^{(4)}_{ijkl}$) и ортогональными друг другу. Однако неортонормированный базис $C^{(s)}_{ijkl}$, $s=\overline{1,5}$ (47), как и ортонормированный базис (34) при произвольной оси вращения n_i, определяют решение (27), (30), (35), (36) или (13), (47), т. е. трансверсально-изотропный тензор, ближайший к заданному анизотропному тензору (1) модулей упругости. Записи этого решения различаются, но условие ортогональности (7) $(A-C)C = AC - CC = 0$ в обоих вариантах выполняется. Тензоры $C^{(s)}_{ijkl}$, $s=\overline{1,5}$ (47) можно записать в форме (23), кроме того, подставляя выражения c_i из (47) в (23), можно получить компоненты C_{ij}, зависящие от A_{ij} и компонент n_i произвольной оси вращения.

Из формул (8) или (37) следует, что при выполнении условия (7) расстояние d^2 будет наименьшим, если функция $AC = CC$ от n_i принимает максимальное значение при условии $n_in_i = 1$. С учетом формул (44)–(46) находим экстремум функции

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{8}\,(3f_1-2f_2-6f_3+4f_4+f_5)f_1 + \frac{1}{4}\,(-f_1+2f_2+2f_3-4f_4+f_5)f_2 + \\
&\quad + \frac{1}{4}\,(-3f_1+2f_2+10f_3-4f_4-5f_5)f_3 + \frac{1}{2}\,(f_1-2f_2-2f_3+8f_4-5f_5)f_4 + \\
&\qquad + \frac{1}{8}\,(f_1+2f_2-10f_3-20f_4+35f_5)f_5 - 4\lambda_1(n_in_i-1),
\end{aligned}$$

где λ_1 — множитель Лагранжа. Вычисляем производные от F по n_s и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial n_s} = (-3f_1 + 2f_2 + 10f_3 - 4f_4 - 5f_5)A_{sjkk}n_j + 2(f_1 - 2f_2 - 2f_3 + 8f_4 - 5f_5)A_{skkj}n_j +$$
$$+ (f_1 + 2f_2 - 10f_3 - 20f_4 + 35f_5)A_{sjkl}n_jn_kn_l - 8\lambda_1 n_s =$$
$$= 8(c_3A_{sjkk}n_j + c_4A_{skkj}n_j + c_5A_{sjkl}n_jn_kn_l - \lambda_1 n_s) = 0, \qquad s = 1, 2, 3. \tag{48}$$

Умножая выражение (48) на n_s и учитывая обозначения (41) или (44), получаем

$$c_3f_3 + c_4f_4 + c_5f_5 = \lambda_1. \tag{49}$$

Следовательно, равенства (48), (49) совпадают с уравнениями (42). Таким образом, из уравнений (42) или (48), (49) определяются оси вращения (симметрии) n_i, при которых расстояние (8) принимает экстремальные значения, в том числе наименьшее.

Из уравнения (42) следует, что n_l является собственным вектором матрицы $M_{sl} = c_3A_{slkk} + c_4A_{skkl} + c_5A_{sjkl}n_jn_k$, а λ_1 (см. (49)) — собственным значением этой матрицы. Матрица M_{sl} и величина λ_1 зависят не только от заданного тензора A_{ijkl}, но и от искомого вектора n_l. Структура уравнений (42) аналогична структуре уравнений Кристоффеля для определения продольных нормалей [3, 17] при исследовании упругих волн в анизотропных материалах. Таким образом, точки экстремумов (стационарные точки) функции $AC = CC$ или функции (38) определяются из уравнений (42), где c_3, c_4, c_5 задаются формулами (46) или (47), а f_3, f_4, f_5 — формулами (44).

Тензорный базис (34) найден при произвольном векторе n_i. Проекции тензора A_{ijkl} на этот базис имеют вид $\tilde{A}_i$ (30), (35), (36). Расстояние до ближайшего трансверсально-изотропного тензора определяется формулой (37). Необходимо найти максимальное значение функции $g = \tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_4^2 + \tilde{A}_5^2$ при условии $n_in_i = 1$. Можно сравнивать значения g для различных векторов n_i. Пусть, например, $n_i = (0, 0, 1)$, тогда из (35), (36) следует, что выражения для $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_4$ отличаются знаком от выражений (30) вследствие различия знаков базисных тензоров (29), (34), а выражение для $\tilde{A}_5$ имеет вид (30). Далее, если $n_i = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, то из (35), (36) находим проекции

$$\tilde{A}_3 = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}[A_{11} + A_{52} + A_{63} + 3(A_{42} + A_{43} + A_{51} + A_{53} + A_{61} + A_{62}) + \sqrt{2}(A_{65} + A_{64} + A_{54})],$$
$$\tilde{A}_4 = \frac{2}{3}\Big[A_{41} + A_{52} + A_{63} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(A_{65} + A_{64} + A_{54})\Big], \tag{50}$$
$$\tilde{A}_5 = \frac{1}{9\sqrt{70}}\,[14(-A_{11} - A_{22} - A_{33} + A_{44} + A_{55} + A_{66} + A_{32} + A_{31} + A_{21}) -$$
$$- 10\sqrt{2}\,(A_{42} + A_{43} + A_{51} + A_{53} + A_{61} + A_{62} - 2(A_{41} + A_{52} + A_{63}) - 2\sqrt{2}\,(A_{65} + A_{64} + A_{54}))].$$

Чтобы определить большее значение функции g, нужно сравнить выражения (30) и (50). В общем случае не ясно, какая из величин $\tilde{A}_i$ больше, поэтому целесообразно сравнивать их конкретные значения A_{ij}.

Запишем выражения (30) и (50) для тензора A_{ij} кубической сингонии [3] в главных осях симметрии. Тогда из (30), (50) получаем $\tilde{A}_3 = 0$, $\tilde{A}_4 = 0$ для обоих вариантов указанных выше осей, при этом

$$\tilde{A}_5 = \frac{7}{\sqrt{70}}\,(A_{11} - A_{21} - A_{44}) = \frac{7}{\sqrt{70}}\,A \tag{51}$$

и

$$\tilde{A}_5 = -\frac{2}{3}\,\frac{7}{\sqrt{70}}\,(A_{11} - A_{21} - A_{44}) = -\frac{2}{3}\,\frac{7}{\sqrt{70}}\,A. \tag{52}$$

Величина (51) по модулю больше величины (52), т. е. трансверсально-изотропный тензор вида (27) с осью вращения $n_i = (0, 0, 1)$ ближе к кубическому тензору, чем трансверсально-изотропный тензор с осью симметрии $n_i = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\,)$.

Можно не задавать произвольно векторы n_i, а находить стационарные значения n_i из решения уравнений (42). Рассмотрим пример кубического тензора в главных осях симметрии [3]. Из выражений (44) находим

$$\begin{gathered} f_1 = 3(A_{11} + 2A_{21}) = 3f_3, \qquad f_2 = 3(A_{11} + A_{44}) = 3f_4, \\ f_3 = A_{11} + 2A_{21}, \qquad f_4 = A_{11} + A_{44}, \\ f_5 = A_{11}(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4) + 2(A_{21} + A_{44})(n_1^2 n_2^2 + n_1^2 n_3^2 + n_2^2 n_3^2) = \\ = A_{21} + A_{44} + A(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4), \qquad A = A_{11} - A_{21} - A_{44}. \end{gathered} \tag{53}$$

Далее с учетом (53) по формулам (46) получаем коэффициенты

$$\begin{gathered} c_1 = A_{21} + \frac{1}{8}A(1 + n_1^4 + n_2^4 + n_3^4), \qquad c_2 = A_{44} + \frac{1}{4}A(1 + n_1^4 + n_2^4 + n_3^4), \\ c_3 = \frac{1}{8}\,A[3 - 5(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)], \qquad c_4 = 2c_3, \qquad c_5 = -7c_3. \end{gathered} \tag{54}$$

После подстановки выражений (53), (54) в (42) и вычисления соответствующих слагаемых уравнения (42) принимают вид

$$c_3A(n_1^4+n_2^4+n_3^4-n_1^2)n_1 = 0, \quad c_3A(n_1^4+n_2^4+n_3^4-n_2^2)n_2 = 0, \quad c_3A(n_1^4+n_2^4+n_3^4-n_3^2)n_3 = 0,$$

или (при $A \neq 0$)

$$\begin{gathered} [3 - 5(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)](n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 - n_1^2)n_1 = 0, \\ [3 - 5(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)](n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 - n_2^2)n_2 = 0, \\ [3 - 5(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4)](n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 - n_3^2)n_3 = 0. \end{gathered} \tag{55}$$

Чтобы найти стационарные значения n_i, нужно решить уравнения (55) относительно n_i. Очевидное решение $n_i = 0$ не подходит, так как необходим ненулевой вектор. Из равенства нулю первого выражения в скобках в (55) следует

$$n_1^4 + n_2^4 + n_3^4 = 3/5. \tag{56}$$

Таким образом, в силу (54) $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, поэтому тензор C_{ijkl} (13) становится изотропным. С учетом (54), (56) ненулевые компоненты (23) изотропного тензора принимают вид

$$\begin{gathered} C_{11} = C_{22} = C_{33} = c_1 + c_2 = A_{21} + A_{44} + \frac{3}{5}\,A = \frac{1}{5}\,[3A_{11} + 2(A_{21} + A_{44})], \\ C_{21} = C_{31} = C_{32} = c_1 = A_{21} + \frac{1}{5}\,A = \frac{1}{5}\,(A_{11} + 4A_{21} - A_{44}), \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} = C_{11} - C_{21} = c_2 = A_{44} + \frac{2}{5}\,A = \frac{1}{5}\,[2(A_{11} - A_{21}) + 3A_{44}]. \end{gathered} \tag{57}$$

Коэффициенты C_{11}, C_{21} в (57) совпадают с соответствующими коэффициентами в изотропной части кубического тензора $C_{11} = H$, $C_{21} = (H + 2h)/3$ [7]. Расстояние в (6), в случае если коэффициенты определяются в (57), равно $d^2 = 6A^2/5$.

Кроме решения (56) уравнения (55) допускают также решения вида

1) $n_1^2 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$;
2) $n_1 = 0$, $n_2^2 = 1$, $n_3 = 0$;
3) $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3^2 = 1$;
4) $n_1 = 0$, $n_2^2 = n_3^2 = 1/2$;
5) $n_2 = 0$, $n_1^2 = n_3^2 = 1/2$;
6) $n_3 = 0$, $n_1^2 = n_2^2 = 1/2$;
7) $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$.

Решения 1–7 определяют 26 направлений (осей вращения), являющихся также продольными нормалями для кубического тензора. Эти направления указаны в работе [17].

Для решения 7 возможны восемь осей вращения [17] с компонентами n_i, равнонаклоненных к осям координат 1, 2, 3. Эти направления равноправны, поэтому достаточно рассмотреть одно из них, например $n_i = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\,)$. С учетом (54) из (23) получаем матрицу

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ C_{21} & C_{11} & & & \text{sym} & \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & & & \\ C_{41} & C_{51} & C_{51} & C_{44} & & \\ C_{51} & C_{41} & C_{51} & C_{54} & C_{44} & \\ C_{51} & C_{51} & C_{41} & C_{54} & C_{54} & C_{44} \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = A_{21} + A_{44} + \frac{19}{27}\,A, \qquad C_{21} = A_{21} + \frac{4}{27}\,A, \qquad C_{41} = -\frac{2\sqrt{2}}{27}\,A, \tag{58}$$

$$C_{51} = \frac{\sqrt{2}}{27}\,A, \qquad C_{44} = A_{44} + \frac{8}{27}\,A, \qquad C_{54} = -\frac{4}{27}\,A$$

трансверсально-изотропного тензора с осью симметрии, определяемой решением 7, который записан не в главных осях симметрии. Чтобы получить запись в главных осях, нужно коэффициенты в (54) использовать при значениях n_i, определяемых решением 7, а в формулах (23) положить $n_i = (0, 0, 1)$. В результате получаем

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} A_{21} + A_{44} + (1/2)A & & & & & \\ A_{21} + (1/6)A & C_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{21} + (1/3)A & C_{31} & A_{21} + A_{44} + (1/3)A & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} + (2/3)A & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} + (1/3)A \end{bmatrix}.$$

Из матрицы вида (58) следует, что тензор имеет ось симметрии третьего порядка, равнонаклоненную к осям 1, 2, 3 [17–19]. Расстояние в (6), в случае если коэффициенты определяются в (58), равно $d^2 = 8A^2/9$. Это значение меньше полученного выше, т. е. трансверсально-изотропный тензор (58) с осями вращения, определяемыми решением 7, ближе к кубическому тензору, чем изотропный тензор (57).

Решения 1–3 равноправны, как и решения 4–6, т. е. достаточно рассмотреть по одному из этих вариантов. Пусть, например, $n_i = (0, 0, 1)$ (решение 3). Тогда с учетом (54) из (23) получаем матрицу

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} (1/4)(3A_{11}+A_{21}+A_{44}) & & & & & \\ (1/4)(A_{11}+3A_{21}-A_{44}) & C_{11} & & \text{sym} & & \\ A_{21} & A_{21} & A_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)(A_{11}-A_{21}+A_{44}) \end{bmatrix}. \quad (59)$$

В случае коэффициентов, определяемых в (59), расстояние в (6) равно $d^2 = A^2/2$.

Пусть $n_i = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,)$ (решение 4). При этом с учетом (54) из (23) получаем матрицу

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} A_{21}+A_{44}+(9/16)A & & & & & \\ A_{21}+(7/32)A & A_{21}+A_{44}+(41/64)A & & & \text{sym} & \\ C_{21} & A_{21}+(9/64)A & C_{22} & & & \\ (\sqrt{2}/32)A & -(\sqrt{2}/64)A & C_{42} & A_{44}+(9/32)A & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}+(7/16)A & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/16)A & C_{55} \end{bmatrix}, \quad (60)$$

которая при записи в главных осях принимает вид

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} A_{21}+A_{44}+(9/16)A & & & & & \\ A_{21}+(3/16)A & C_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{21}+(1/4)A & C_{31} & A_{21}+A_{44}+(1/2)A & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}+(1/2)A & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}+(3/8)A \end{bmatrix}.$$

В случае коэффициентов, определяемых в (60), расстояние в (6) равно $d^2 = 37A^2/32$.

Таким образом, проверены все стационарные значения n_i, т. е. решения уравнений (55). При этом наименьшее расстояние (6) равно $d^2 = A^2/2$, т. е. трансверсально-изотропный тензор с осью вращения $n_i = (0,0,1)$ и матрицей (59) наиболее близок в евклидовой норме к кубическому тензору

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & \text{sym} & & \\ A_{21} & A_{21} & A_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

На основе базиса (25) и представления (27) и без доказательства наибольшей близости трансверсально-изотропного тензора к кубическому тензору матрица вида (59) получена в [4]. Однако для компоненты c'_{66} в [4] приведено неверное выражение, правильное выражение имеет вид $c'_{66} = (c_{11} - c_{21} + 2c_{44})/4$ или (в обозначениях, принятых в данной работе) такой же вид, как в (59). Матрица (59) следует также из (28), при соответствующих значениях A_{ij} для кубического тензора.

Получим также кубический тензор, ближайший к заданному анизотропному тензору модулей упругости. Исходную систему координат считаем главной для кубического тензора. В качестве базисных тензоров выберем первые два тензора в (29) и тензор [7]

$$t_{ij(3)} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ -1 & 2 & & & \text{sym} & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (62)$$

Находим проекции тензора A_{ij} на базисные тензоры. Проекции $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ имеют вид (30), третья проекция равна

$$\tilde{A}_3 = A_{ij} t_{ij(3)} = \frac{2}{\sqrt{30}} (A_{11} + A_{22} + A_{33} - A_{44} - A_{55} - A_{66} - A_{21} - A_{31} - A_{32}).$$

Ближайший к заданному тензору A_{ij} кубический тензор (см. (61)) имеет вид [4]

$$C_{ij} = t_{ij(1)} \tilde{A}_1 + t_{ij(2)} \tilde{A}_2 + t_{ij(3)} \tilde{A}_3,$$

или

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} (1/3)(A_{11} + A_{22} + A_{33}) & & & & & \\ (1/3)(A_{21} + A_{31} + A_{32}) & C_{11} & & \text{sym} & & \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & & & \\ 0 & 0 & 0 & (1/3)(A_{44} + A_{55} + A_{66}) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}. \qquad (63)$$

В [4] в качестве базисных тензоров выбраны первые два тензора (25) и тензор (62) с противоположным знаком, но выражения, получаемые для компонент C_{ij}, те же, что и в (63) (см. также [8, 11]). В [4] эти выражения не приведены.

Вместо тензора A_{ijkl} (1) модулей упругости во всех формулах данной работы можно использовать тензор a_{ijkl} коэффициентов податливости, обратный тензору A_{ijkl}. Однако ближайший тензор, полученный на основе a_{ijkl}, в общем случае не является обратным ближайшему тензору, полученному с использованием A_{ijkl} [8].

Таким образом, в работе решена в общем виде задача построения трансверсально-изотропного тензора, ближайшего по евклидовой норме к заданному анизотропному тензору модулей упругости. Получен ортонормированный базис в пространстве трансверсально-изотропных тензоров с произвольной осью симметрии. Проецирование на этот базис заданного тензора дает ближайший трансверсально-изотропный тензор. Определены в явном виде коэффициенты ближайшего трансверсально-изотропного тензора в зависимости от компонент исходного заданного тензора и произвольной оси вращения (симметрии). Для компонент оси вращения выведены три уравнения, решения которых определяют стационарные значения и обеспечивают абсолютный минимум расстояния по евклидовой норме от наиболее близкого трансверсально-изотропного тензора до заданного анизотропного тензора. Ось вращения является собственным вектором некоторой матрицы, зависящей от искомого вектора, и в этом смысле уравнения аналогичны уравнениям Кристоффеля для определения продольных нормалей. В случае тензора кубической симметрии получены все точные решения для стационарных случаев оси вращения, а также наиболее близкий трансверсально-изотропный тензор модулей упругости. Приведены новый базис для кубического тензора в главных осях и ближайший к заданному анизотропному тензору кубический тензор.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аннин Б. Д.** Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 5–14.
2. **Федоров Ф. И.** К теории упругих волн в кристаллах. Сравнение с изотропной средой // Кристаллография. 1963. Т. 8, вып. 2. С. 213–220.
3. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
4. **Gazis D. C., Tadjbakhsh I., Toupin R. A.** The elastic tensor of given symmetry nearest to an anisotropic elastic tensor // Acta Crystallographica. 1963. V. 16, N 9. P. 917–922.
5. **Norris A. N.** The isotropic material closest to a given anisotropic material // J. Mech. Materials Structures. 2006. V. 1, N 2. P. 223–238.
6. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
7. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 149–160.
8. **Moakher M., Norris A. N.** The closest elastic tensor of arbitrary symmetry to an elasticity tensor of lower symmetry // J. Elasticity. 2006. V. 85, N 3. P. 215–263.
9. **Kochetov M., Slawinski M. A.** On obtaining effective transversely isotropic elasticity tensors // J. Elasticity. 2009. V. 94, N 1. P. 1–13.
10. **Kochetov M., Slawinski M. A.** On obtaining effective ortotropic elasticity tensors // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2009. V. 62, N 2. P. 149–166.
11. **Bucataru I., Slawinski M. A.** Invariant properties for finding distance in space of elasticity tensors // J. Elasticity. 2009. V. 94, N 2. P. 97–114.
12. **Diner Ç., Kochetov M., Slawinski M. A.** On choosing effective symmetry classes for elasticity tensors // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2010. V. 64, N 1. P. 57–74.
13. **Norris A. N.** Elastic moduli approximation of higher symmetry for the acoustical properties of an anisotropic material // J. Acoust. Soc. Amer. 2006. V. 119, N 4. P. 2114–2121.
14. **Остросаблин Н. И.** Классы симметрии тензоров анизотропии квазиупругих материалов и обобщение подхода Кельвина // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 3. С. 108–129.
15. **Остросаблин Н. И.** Диагонализация трехмерной системы уравнений в смещениях линейной теории упругости трансверсально-изотропных сред // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 6. С. 125–145.
16. **Бехтерев П. В.** Определяющие коэффициенты упругости и деформаций кристаллов с приложением к изотропии // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4, вып. 9. С. 954–981.
17. **Остросаблин Н. И.** Условия экстремальности постоянных упругости и главные оси анизотропии // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 4. С. 192–210.
18. **Бехтерев П. В.** К систематике констант упругости анизотропных веществ // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1926. Т. 60, вып. 4. С. 351–353.
19. **Bechterew P.** Zur Systematik der Elastizitatsconstanten anisotroper Stoffe // Z. Kristallographie. 1929. Bd 71, H. 3. S. 274–276.

Поступила в редакцию 22/V 2018 г.,
после доработки — 5/IX 2018 г.
Принята к публикации 24/IX 2018 г.