

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАЗРУШЕНИЯ В ПЛИТАХ  
ПРИ ДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗОК**

*Н. Н. БЕЛОВ, А. И. КОРНЕЕВ, А. П. НИКОЛАЕВ*

(Томск)

Расчет разрушений в твердых телах ограниченных размеров при воздействии на них импульсных нагрузок можно рассматривать, формулируя макрокритерий разрушения. Выполнение такого критерия в частице материала означает ее разрушение. При наличии сложной интерференционной волновой картины в численном решении такой критерий выполняется в целых областях. Это требует при численном расчете формулировки модели разрушенного тела [1, 2].

Вторым подходом к расчету разрушений твердых тел при взрывных и ударных нагрузках является подход, основанный на модели пористого тела [3—6]. Ниже формулируются основные уравнения сжимаемой упругопластической среды с порами и численно исследуется процесс разрушения в плитах при воздействии динамических нагрузок.

1. Будем предполагать, что в теле существуют дефекты сферической формы радиуса  $a_0$ . Введем сферическую систему координат с центром в сферической полости, текущий радиус которой обозначим  $a$ . Пусть на расстоянии  $b$  от полости действует напряжение  $\sigma_r = -p$ . Будем характеризовать пористость величиной

$$(1.1) \quad \alpha = V/V_m = b^3/(b^3 - a^3),$$

где  $V$  — объем материала с порами;  $V_m$  — объем матрицы. Определим кинетическое уравнение роста пор, т. е. найдем изменение  $\alpha$  во времени под действием приложенного напряжения в предположении, что поры в процессе деформации остаются сферическими.

Основная система уравнений в сферических координатах в предположении несжимаемости материала матрицы примет вид

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \rho_m du/dt &= \partial \sigma_r / \partial r + 2(\sigma_r - \sigma_\theta)/r, \\ \partial u / \partial r + 2u/r &= 0, \quad \sigma_r - \sigma_\theta = Y + \eta_0 |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}, \end{aligned}$$

где  $u$  — радиальная составляющая скорости;  $\dot{\gamma} = \partial u / \partial r - u/r$ ;  $\sigma_r, \sigma_\theta$  — компоненты тензора напряжений;  $Y$  — предел текучести;  $\eta_0, n$  — константы материала;  $\rho_m$  — плотность материала матрицы.

Граничные условия, заданные на внешней и внутренней границах, имеют вид

$$(1.3) \quad \sigma_r(b, t) = -\alpha p + (\alpha - 1)p_r, \quad \sigma_r(a, t) = -p_r,$$

где  $p_r$  — давление газа внутри полости.

Интегрируя второе уравнение (1.2) по  $r$ , получим

$$(1.4) \quad u = C(t)/r^2.$$

Интегрируя еще раз и вводя новую функцию  $f(t) = -3 \int_0^t C(t) dt$ , можем записать

$$(1.5) \quad r^3 - a_0^3 = -f(t),$$

откуда с учетом (1.1) следует

$$(1.6) \quad f(t) = b^3(\alpha_0 - \alpha)/\alpha = a_0^3(\alpha_0 - \alpha)/(\alpha_0 - 1) = a^3(\alpha_0 - \alpha)/(\alpha - 1).$$

Введем новую функцию

$$\Phi = -\frac{C'(t)}{r} + \frac{1}{2} \frac{C^2(t)}{r^4},$$

тогда

$$(1.7) \quad du/dt = \partial \Phi / \partial r.$$

Заменяя в первом уравнении системы (1.2)  $du/dt$  на  $\partial \Phi / \partial r$  и выполняя интегрирование по  $r$ , найдем

$$(1.8) \quad \rho_m [\Phi(b, t) - \Phi(a, t)] = -\alpha(p - p_r) + 2 \int_a^b \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} dr.$$

Используя связь  $C(t) = -\frac{f'(t)}{3} = \frac{a_0^3}{3} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha_0 - 1}$  и (1.6), можно, как и в [6], левую часть равенства преобразовать к виду

$$\rho_m [\varphi(b, t) - \varphi(a, t)] = \frac{a_0^3 \rho_m}{3 (\alpha_0 - 1)^{2/3}} \left\{ \ddot{\alpha} [(\alpha - 1)^{-1/3} - \alpha^{-1/3}] - \right. \\ \left. - \frac{\dot{\alpha}^2}{6} [(\alpha - 1)^{-4/3} - \alpha^{-4/3}] \right\} = Q_1(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \alpha_0) \rho_m.$$

Подставим во второй член в правой части третье уравнение системы (1.2) и выполним интегрирование, считая, что весь материал вокруг поры находится в пластической области. Получим

$$2 \int_a^b \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} dr = \pm \frac{2}{3} Y \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \frac{2\eta_0}{3n} |\dot{\alpha}|^{n-1} \dot{\alpha} \frac{\alpha^n - (\alpha - 1)^n}{(\alpha - 1)^n \alpha^n}$$

или окончательно

$$(1.9) \quad \rho_m Q_1(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \alpha_0) = \pm \frac{2}{3} Y \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \frac{2}{3} \frac{\eta_0}{n} |\dot{\alpha}|^{n-1} \dot{\alpha} \frac{\alpha^n - (\alpha - 1)^n}{(\alpha - 1)^n \alpha^n} - \\ - \alpha (p - p_r).$$

Член в левой части (1.9) представляет собой инерционное сопротивление изменению  $\alpha$  и по оценкам, проведенным в [6], на несколько порядков меньше членов правой части.

Введем величину  $\Delta p - p \pm \frac{2}{3} \frac{Y}{\alpha} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1}$  и положим  $p_r = 0$ , тогда из (1.8), (1.9) следует

$$(1.10) \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} \left[ \frac{3n}{2\eta_0} (-\Delta p) \right]^{1/n} (\alpha - 1) \left[ \frac{\alpha - 1}{1 - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^n} \right]^{1/n} & \text{при } \dot{\alpha} > 0, \Delta p < 0, \\ \left[ \frac{3n}{2\eta_0} \Delta p \right]^{1/n} (\alpha - 1) \left[ \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^n} \right]^{1/n} & \text{при } \dot{\alpha} < 0, \Delta p > 0. \end{cases}$$

Величины  $\eta_0$ ,  $n$ ,  $Y$  — постоянные материала. Соотношение (1.10) есть кинетическое уравнение для определения  $\alpha$ . При достижении  $\alpha$  некоторого критического значения  $\alpha_*$  наступает разрушение материала.

2. Легко установить [7, 8], что компоненты тензоров напряжений в матрице  $\sigma_{ij}^m$  и в пористой среде  $\sigma_{ij}$  при наличии газа в порах  $p_r$  связаны соотношением

$$(2.1) \quad \sigma_{ij}^m = \alpha \sigma_{ij} + (\alpha - 1) p_r \delta_{ij}.$$

Представляя тензор напряжений в матрице и пористом теле в виде шаровой и девiatorной части, запишем

$$(2.2) \quad p^m = \alpha p - (\alpha - 1) p_r, \quad s_{ij}^m = \alpha s_{ij}.$$

На основании (2.2) критерий текучести Мизеса для материала матрицы выразим через компоненты девiatorа тензора напряжений пористой среды в виде

$$(2.3) \quad s_{ij} s_{ij} = [Y(p, T)/\alpha]^2.$$

Предполагая, что для пористого тела справедлив принцип минимума работы истинных напряжений на приращениях пластических деформаций [9], можем записать для связи компонент девiatorа тензора скоростей деформаций и девiatorа тензора напряжений соотношение, аналогичное [10],

$$(2.4) \quad 2\mu \dot{e}_{ij} = D/Dt s_{ij} + \lambda s_{ij},$$

где  $D/Dt$  обозначает производную в смысле Яуманна;  $\dot{e}_{ij}$  — компоненты тензора девiatorа скоростей деформаций в пористой среде;  $\mu$  — модуль сдвига.

Величина  $\lambda$  определяется с помощью условия (2.3) и при отсутствии пластических деформаций  $\lambda = 0$ . Выражение для  $\lambda$  легко получить, умножив обе части (2.4) на  $s_{ij}$ . Как следует из [11], между компонентами девiatorов тензоров скоростей де-

формаций и первыми инвариантами тензоров скоростей деформаций в матрице и пористом теле могут быть установлены зависимости

$$(2.5) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^m = \dot{\epsilon}_{ij} \left( 1 - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \Theta^{-1} \right), \quad \dot{\Theta}^m = \dot{\Theta} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}.$$

Чтобы определить шаровую составляющую тензора напряжений в пористом теле, воспользуемся уравнением состояния для материала матрицы в форме Ми — Грюнайзена

$$(2.6) \quad p^m = Q(V_m) + \gamma_m E_m / V_m.$$

Изменение давления в пористом теле происходит за счет изменения удельного объема и удельной энергии материала, а также за счет изменения объема пор, или, что то же самое,  $\alpha$ . Найдем приращение давления в пористом теле, предполагая, что  $p_r = 0$ ,  $\gamma_m / V_m = \gamma_0 / V_0 = \text{const}$ , и пренебрегая приращением поверхностной энергии пор:

$$(2.7) \quad dp = -\frac{d\alpha}{\alpha^2} \left[ Q(V_m) + \frac{\gamma_0}{V_0} E_{r1} \right] + \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial Q}{\partial V_m} dV_m + \frac{\gamma_0}{V_0} dE_{r1} \right].$$

Окончательно (2.7) можем переписать в виде

$$(2.8) \quad dp = -\frac{d\alpha}{\alpha} p + \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{\partial Q}{\partial V_{r1}} \left( \frac{dV}{\alpha} - V \frac{d\alpha}{\alpha^2} \right) + \frac{\gamma_0}{V_0} dE \right],$$

где  $p$ ,  $V$ ,  $E$  — давление, объем и внутренняя энергия пористого тела. Это выражение есть дифференциальное соотношение для определения  $p$  в пористой среде.

Уравнения движения пористой сплошной среды можно записать в виде

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = 0;$$

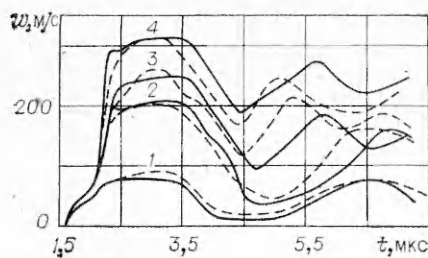
$$(2.10) \quad U = \begin{Bmatrix} \rho u^1 \\ \rho u^2 \\ \rho u^3 \\ \rho \\ \rho e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1 \\ \hat{\sigma} \cdot \mathbf{e}_2 \\ \hat{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 \\ 0 \\ \hat{\sigma} \cdot \mathbf{u} \end{Bmatrix},$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$  — вектор скорости;  $\mathbf{e}_i$  — единичные орты выбранной системы координат;  $\hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  — тензор напряжений;  $e = E + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2$  — полная энергия;  $\mathbf{n}$  — внешний вектор нормали к поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ . Все величины в (2.10) относятся к пористой среде.

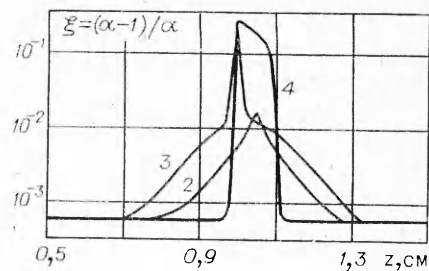
Уравнения (2.1)–(2.5), (2.8)–(2.10) совместно с кинетическим уравнением (1.10) для определения  $\alpha$  представляют замкнутую систему уравнений модели пористой среды.

3. В рамках изложенной модели рассмотрим численные решения двумерных задач о соударении двух дисков и взрыве на поверхности плиты цилиндрического заряда ВВ. Для расчета задачи соударения используем данные эксперимента [12]. Примем следующие физико-механические характеристики стали ЭИ 712:  $\rho_0 = 7,83 \text{ г/см}^3$ ,  $Y = 0,64 \text{ ГПа}$ ,  $\mu = 79 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,55$ ,  $\alpha_0 = 1,0006$ . Уравнение состояния материала матрицы выберем в виде [13].

Данные расчета, полученные методом [14], приведены на фиг. 1–3. На фиг. 1 изображены зависимости скорости тыльной поверхности преграды от времени процесса для начальных скоростей удара 86; 215; 258 и 320 м/с, этим скоростям соответ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ствуют кривые 1—4. Штриховыми линиями представлены экспериментальные зависимости [12]. Кривая 1 показывает отсутствие разрушения в преграде, кривые 2—4 отражают появление в материале микроразрушений. Накопление микроразрушений ведет к увеличению пористости  $\alpha$ . С ростом величины  $\alpha$  разрушающее напряжение уменьшается. Материал считается разрушенным, когда относительный объем пор  $\xi = (\alpha - 1)/\alpha$  в плоскости откола достигнет предельной величины  $\xi_p = 0,3$ .

Фиг. 2 иллюстрирует распределение относительного объема пор в преграде вдоль оси симметрии в момент окончания счета. Кривые 2—4 соответствуют кривым 2—4 на фиг. 1.

Отметим, что при соударении дисков с начальной скоростью 215 м/с в центре преграды появилась область материала, в которой поры активированы и растут ( $\alpha > \alpha_0$ ). Однако относительный объем пор в этой области еще недостаточен для разрушения.

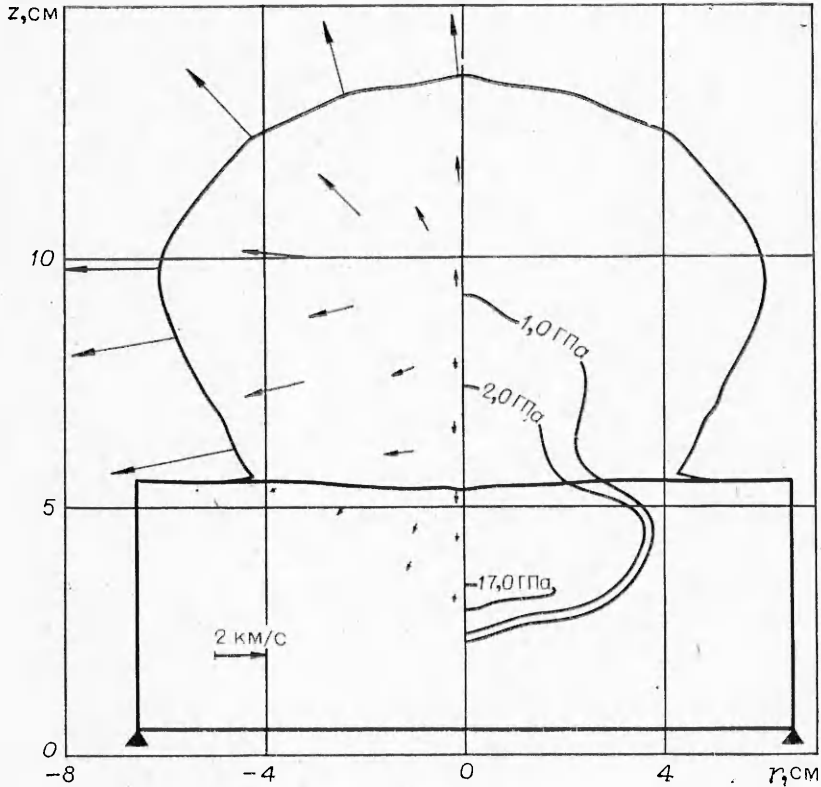
При повышении скорости удара в этой зоне повышается величина пористости. Для скорости удара 258 м/с область материала, в которой поры активированы, занимает более половины преграды. Предельная пористость достигается лишь в центре мишени. Дальнейшее увеличение скорости удара приводит к тому, что область материала, в которой  $\alpha > \alpha_0$ , уменьшается, а зона материала, в которой  $\xi$  достигает предельной величины, увеличивается.

Картина деформации и разрушения дисков в момент времени 6 мкс для начальной скорости удара 258 м/с представлена на фиг. 3. Сплошными линиями изображены изолинии относительного объема пор. Предельная пористость достигается в одном ряде ячеек, находящихся в центре преграды перпендикулярно направлению удара, где и образуется магистральная трещина. Местоположение трещины совпадает с ее расположением в эксперименте [12].

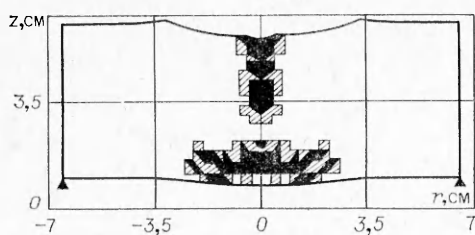
Для численного решения задачи о подрыве заряда ВВ на поверхности плиты воспользуемся численным методом [15]. Система уравнений (2.9), (2.10) при  $\alpha_0 = \alpha = 1$ ,  $Y = \mu = 0$  переходит в систему, описывающую поведение идеального газа.

Уравнение состояния продуктов детонации имеет вид

$$p = \gamma_1 E \rho + B_1 \rho^4 + C_1 \bar{e}^{\beta/\rho},$$



Фиг. 4



Фиг. 5

плите и продуктах детонации. Стрелками показано направление разлета продуктов детонации. Длина стрелки характеризует величину скорости в выбранном масштабе.

Полученная конечная картина деформации и разрушения плиты (фиг. 5) согласуется с экспериментальной [17]. Зачерненные зоны — это области материала, в которых  $\xi$  достигла предельной величины  $\xi_*$ , а заштрихованные — в которых  $\alpha > \alpha_0$ , но  $\xi < \xi_*$ .

При расчете, как и в эксперименте, видны в плите две зоны разрушений. Основная зона расположена у тыльной поверхности плиты (зона тыльного откола). Вторая область разрушенного материала находится под кратером.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г. Численный расчет напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
2. Белов Н. Н., Гриднева В. А., Корнеев А. И. Расчет разрушения в металлической плите, подвергнутой импульсной нагрузке. — В кн.: Материалы пятой науч. конф. по математике и механике. Томск, 1975.
3. Глушко А. И. Исследование откола как процесса образования микропор. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5.
4. Seaman L., Curran D. R., Shockey D. A. Computational models for ductile and fracture. — J. Appl. Phys., 1976, v. 47, N 11.
5. Нигматулин Р. И., Ахмадеев И. X., Ахметова П. А. Разрушение пластин из армо-железа в волнах разгрузки. — В кн.: Детонация. Материалы II Всесоюз. совещ. по детонации. Черноголовка, 1984, вып. 2.
6. Johnson J. N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids. — J. Appl. Phys., 1981, v. 52, N 4.
7. Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. — ПММ, 1970, т. 34, с. 1097.
8. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970, т. 2.
10. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
11. Swegle S. W. Constitutive equation for porous materials with strength. — J. Appl. Phys., 1980, v. 51, N 5.
12. Иванов А. Г., Клецевников О. А. и др. Откол в стали. — ФГВ, 1981, № 6.
13. Мак-Куин Р., Марш С., Тейлор Дж. и др. Уравнения состояния твердых тел по результатам исследований ударных волн. — В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973.
14. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
15. Корнеев А. И., Николаев А. П., Шиповский И. Е. Приложение метода конечных элементов к задачам соударения твердых деформируемых тел. — В кн.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Матер. VII Всесоюз. конф. Новосибирск, 1982.
16. Баум Ф. М., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. М.: Наука, 1975.
17. Райнхарт Дж. Некоторые экспериментальные данные о напряжениях, вызванных взрывом. — Сб. пер. Механика, 1953, № 4.

Поступила 29/II 1984 г.