

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА, ОСЛАБЛЕННОГО СИСТЕМОЙ ТЕРМОИЗОЛИРОВАННЫХ ТРЕЩИН

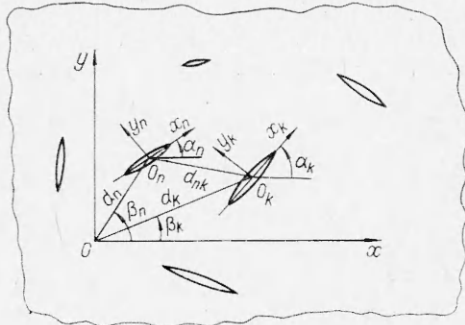
М. П. Саврук

(Львов)

Исследованию плоского термоупругого состояния тела с трещинами посвящен ряд работ (см. обзор [1]). Однако в большинстве случаев рассматриваются задачи о температурных напряжениях в теле, ослабленном одной трещиной. Существующие решения задач о взаимодействии термоизолированных трещин в упругом теле ограничены сравнительно простыми случаями коллинеарных [2, 3] или дугообразных [4, 5] трещин.

Ниже плоская задача термоупругости для бесконечного тела, содержащего произвольно размещенные прямолинейные термоизолированные трещины, приводится к системе сингулярных интегральных уравнений. При больших расстояниях между трещинами дано приближенное решение этой системы. В случае периодической системы коллинеарных трещин получено точное решение.

1. Рассмотрим плоскую задачу теплопроводности для тела с термоизолированными трещинами. Пусть в плоскости, связанной с декартовой системой координат xOy , имеется N прямолинейных разрезов (трещин) длиной $2a_k$ ($k=1, 2, \dots, N$) (см. фигуру). В центрах трещин $O_k(x_k^0, y_k^0)$ размещены начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси $O_k x_k$ которых совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью Ox .



Предположим, что в сплошной плоскости без разрезов распределение температуры описывается заданной гармонической функцией $t_0(x, y)$.

Определение стационарного температурного поля в плоскости, содержащей одну трещину $|x_k| \leq a_k, y_k=0$, сводится к решению

сингулярного интегрального уравнения [6]:

$$(1.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{\gamma_k'(t) dt}{t - x_k} = -2 \frac{\partial t_0(x, y)}{\partial y_k} \Big|_{y_k=0} = f_k(x_k), \quad |x_k| \leq a_k,$$

где $\gamma_k(x_k) = 0,5 [t_k^+(x_k, 0) - t_k^-(x_k, 0)]$ — плотность интеграла типа Коши;

$$(1.2) \quad F_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{\gamma_k(t) dt}{t - z_k}, \quad z_k = x_k + iy_k,$$

через который выражается возмущенное температурное поле $t_k(x_k, y_k)$, обусловленное наличием трещины $t_k(x_k, y_k) = \text{Re } F_k(z_k)$.

Общее температурное поле в такой области равно $T_k(x, y) = t_k(x_k, y_k) + t_0(x, y)$.

Решение уравнения (1.1), неограниченное на концах интервала $[-a_k, a_k]$, имеет вид [7]

$$(1.3) \quad \gamma'_k(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{a_k^2 - x^2}} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{\sqrt{a_k^2 - t^2} f_k(t) dt}{t - x}.$$

Можно показать, что функция $F_k(z_k)$ инвариантна при параллельном переносе осей координат, но неинвариантна при повороте осей координат. Если система координат $x_k O_k y_k$ связана с системой $x O y$ соотношением

$$z = z_k e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0,$$

а функция $F(z)$ играет ту же роль в системе $x O y$, что и функция $F_k(z_k)$ в системе $x_k O_k y_k$, то имеем

$$(1.4) \quad F_k(z_k) = e^{i\alpha_k} F(z_k e^{i\alpha_k} + z_k^0).$$

Когда на N отрезках $|x_k| \leq a_k, y_k = 0 (k=1, 2, \dots, N)$ заданы разрывы температурного поля $\gamma_k(x_k)$, то распределение температуры во всей области будет определяться формулой

$$T(x, y) = t(x, y) + t_0(x, y), \quad t(x, y) = \operatorname{Re} F(z).$$

Здесь функция

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N e^{-i\alpha_k} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{\gamma_k(t) dt}{t - z_k}$$

получена путем суперпозиции функций $F_k(z_k)$ (1.2) для одиночных трещин с учетом формулы преобразования (1.4) при переходе к новой системе координат.

Удовлетворяя граничным условиям на берегах трещин

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y_k} \right|_{y_k=0} = 0, \quad |x_k| \leq a_k \quad (k=1, 2, \dots, N),$$

для определения неизвестных функций $\gamma_k(x_k)$ получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$(1.5) \quad \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\gamma'_n(t) dt}{t - x} + \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} \gamma'_k(t) R_{nk}(t, x) dt = \pi f_n(x), \quad |x| \leq a_n \quad (n=1, 2, \dots, N).$$

Символ \sum' означает, что при суммировании исключен член с номером строки. Ядра $R_{nk}(t, x)$ находятся из соотношения

$$R_{nk}(t, x) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\alpha_k}}{T_k - X_n} \right), \quad T_k = t e^{i\alpha_k} + z_k^0, \quad X_n = x e^{i\alpha_n} + z_n^0.$$

Таким образом, задача об определении стационарного температурного поля в плоскости с термоизолированными разрезами сведена к ре-

шению системы сингулярных интегральных уравнений (1.5). Заметим, что уравнения (1.5) были получены несколько другим путем в работе [8].

Найдем решение задачи при больших расстояниях между трещинами. В этом случае для ядер $R_{nk}(t, x)$ имеют место разложения

$$R_{nk}(t, x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{v=0}^p c_{nkpv} t^v x^{p-v} d_{nk}^{-p-v},$$

где
$$c_{nkpv} = (-1)^{p+v+1} C_p^v \cos[(p-v+1)\alpha_n + v\alpha_k - (p+1)\beta_{nk}];$$

$$C_p^v = \frac{p(p-1)\dots(p-v+1)}{v!}; \quad z_{nk} e^{i\beta_{nk}} = z_n^0 \quad z_k^0.$$

Введя безразмерный параметр

$$\lambda_n^2 = \frac{2a}{d}, \quad a = \max\{a_n\}, \quad d = \min\{d_{nk}\},$$

характеризующий расстояние между трещинами, найдем, следуя работе [8], решение системы интегральных уравнений (1.5) в виде ряда

$$\gamma_n'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{np}'(x) \lambda^p,$$

где
$$\gamma_{n0}'(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - t^2} f_n(t) dt}{t-x}, \quad \gamma_{n1}'(x) = 0;$$

$$\gamma_{np}'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{v=1}^s H_{s-v} \left(\frac{x}{a_n} \right) \left(\frac{\varepsilon_{kn}}{2} \right)^{s+1} \times$$

$$\times a_n^{-v} a_{nksv} \int_{-a_k}^{a_k} t^v \gamma_{h,p-s-1}'(t) dt \quad (p = 2, 3, \dots);$$

$$H_p \left(\frac{x}{a_n} \right) = \frac{1}{\pi a_n^{p+1}} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\xi^p \sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi, \quad \varepsilon_{nk} = \frac{a_k d}{a d_{nk}} \leq 1.$$

В случае коллинеарных трещин система (1.5) может быть решена в замкнутом виде.

2. При решении задачи термоупругости для плоскости с разрезами необходимо определить термоупругое состояние сплошной плоскости, обусловленное температурным полем $t_0(x, y)$, найти компоненты напряжений на линиях разрезов, затем решить силовую задачу [9], считая, что к берегам разрезов приложены усилия, равные по величине и противоположные по знаку найденным напряжениям. Кроме того, нужно установить распределение напряжений, вызванных возмущенным температурным полем $t(x, y)$. В дальнейшем рассмотрим последнюю задачу, поскольку решения первых двух задач известны.

Предположим, что в упругой изотропной плоскости имеется одна трещина $|x_k| \leq a_k, y_k = 0$, берега которой не контактируют и свободны от нагрузки. Тогда

$$(2.1) \quad N_k^+ - iT_k^+ = N_k^- - iT_k^- = 0, \quad |x_k| \leq a_k,$$

где N_k, T_k — нормальные и касательные напряжения на оси $O_k x_k$.

Введем обозначение

$$(2.2) \quad u_k^+ - u_k^- + i(v_k^+ - v_k^-) = \frac{i(\kappa + 1)}{2G} g_k(x_k), \quad |x_k| \leq a_k.$$

Используя формулы [10, 11]

$$\begin{aligned} N_k - iT_k &= \Phi_k(z_k) + \overline{\Phi_k(z_k)} + z_k \overline{\Phi_k'(z_k)} + \overline{\Psi_k(z_k)}; \\ 2G \frac{\partial}{\partial x_k} [(u_k + iv_k)] &= \kappa \Phi_k(z_k) = \overline{\Phi_k(z_k)} - z_k \overline{\Phi_k'(z_k)} - \overline{\Psi_k(z_k)} + \\ &+ \beta F_k(z_k), \end{aligned}$$

из условий (2.1), (2.2) получим на отрезке $|x_k| \leq a_k$ задачу сопряжения для функции $\Phi_k(z_k)$

$$(2.3) \quad \Phi_k^+(x_k) - \Phi_k^-(x_k) = iG_k(x_k), \quad G_k(x) = g_k'(x) + \frac{i\beta\gamma_k(t)}{\kappa + 1},$$

где $\Phi_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$ — комплексные потенциалы напряжений [10]; $F_k(z_k)$ определяется формулой (1.2); $\kappa = 3 - 4\nu$, $\beta = \alpha E$ для плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)(1 + \nu)$, $\beta = \alpha E(1 + \nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния*; α — коэффициент температурного расширения;

$G = E/2(1 + \nu)$ — модуль сдвига; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Из краевой задачи (2.3) убывающая на бесконечности функция $\Phi_k(z_k)$ определяется интегралом типа Коши [10]

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{G_k(t) dt}{t - z_k}.$$

Отсюда заключаем, что интегральные уравнения термоупругой задачи для тела с трещинами совпадают с интегральными уравнениями соответствующей силовой задачи [9, 12], если в последних заменить неизвестные функции $g_k'(x)$ на $G_k(x)$. В случае одной прямолинейной трещины $|x_k| \leq a_k$, $y_k = 0$, берега которой свободны от нагрузки, имеем уравнение

$$\int_{-a_k}^{a_k} \frac{G_k(t) dt}{t - x} = 0, \quad |x| \leq a_k,$$

его решением будет [7]

$$(2.4) \quad G_k(x) = \frac{iA_k}{\sqrt{a_k^2 - x^2}}.$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от $-a_k$ до a_k , найдем постоянную A_k :

$$(2.5) \quad A_k = \frac{\pi\beta}{\kappa + 1} \int_{-a_k}^{a_k} \gamma_k(x) dx = -\frac{\pi\beta}{\kappa + 1} \int_{-a_k}^{a_k} x\gamma_k'(x) dx.$$

* В этом случае считается, что пластина теплоизолирована на боковых поверхностях.

Здесь учтено, что $\gamma_k(-a_k) = \gamma_k(a_k) = 0$. Подставив в (2.5) $\gamma_k^*(x)$ из (1.3), получим

$$A_k = \frac{\pi\beta}{\kappa + 1} \int_{-a_k}^{a_k} \sqrt{a_k^2 - t^2} f_k(t) dt.$$

Зная функцию $G_k(x)$, можно определить термоупругое состояние во всей плоскости. В частности, коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещины находятся по формуле

$$(2.6) \quad k_{1k}^{\pm} - ik_{2k}^{\pm} = \pm \lim_{x_k \rightarrow \pm a_k} \left[\frac{\sqrt{a_k^2 - x_k^2}}{\sqrt{a_k}} G_k(x_k) \right].$$

Здесь величины с верхним знаком относятся к правым вершинам трещин, а с нижним — к левым. На основании соотношений (2.4), (2.6) запишем

$$(2.7) \quad k_{2k}^{\pm} = \mp \frac{\beta}{\pi(\kappa + 1)\sqrt{a_k}} \int_{-a_k}^{a_k} f_k(t) \sqrt{a_k^2 - t^2} dt, \quad k_{1k}^{\pm} = 0.$$

При однородном тепловом потоке на бесконечности, направленном перпендикулярно к осп Ox , т. е.

$$(2.8) \quad t_0(x, y) = qy,$$

из формул (2.7), (2.8) находим

$$(2.9) \quad k_{2k}^{\pm} = \pm \frac{\beta q a_k \sqrt{a_k} \cos \alpha_k}{\kappa + 1}, \quad k_{1k}^{\pm} = 0.$$

Этот результат впервые получен в работе [13].

В случае системы произвольно ориентированных трещин $|x_k| \leq a_k$, $y_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), свободных от нагрузки, интегральные уравнения задачи имеют вид [9]

$$(2.10) \quad \int_{-a_n}^{a_n} \frac{G_n(t) dt}{i - t} + \sum_{k=1}^{N'} \int_{-a_k}^{a_k} [G_k(t) K_{nk}(t, x) + \overline{G_k(t)} L_{nk}(t, x)] dt = 0, \quad |x| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$K_{nk}(t, x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left(\frac{1}{T_k - X_r} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} \right);$$

$$L_{nk}(t, x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2} \left[\frac{1}{\overline{T_k} - \overline{X_n}} - \frac{T_k - X_r}{(\overline{T_k} - \overline{X_n})^2} e^{-2i\alpha_n} \right].$$

Используя формулу обращения интеграла типа Коши [7], из (2.10) приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$(2.11) \quad G_n(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - t^2}} \left\{ iA_n + \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} [G_k(t) M_{nk}(t, x) + \overline{G_k(t)} N_{nk}(t, x)] dt \right\}, \quad |x| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} M_{nh}(t, x) \\ N_{nh}(t, x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} \begin{pmatrix} K_{nh}(t, \xi) \\ L_{nh}(t, \xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

При больших расстояниях между трещинами решение системы (2.11) может быть получено в виде ряда [9]

$$G_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} G_{np}(x) \lambda^p,$$

где

$$G_{n0}(x) = \frac{iA_{n0}}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}}, \quad G_{n1}(x) = 0;$$

$$G_{np}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \left\{ \sum_{k=1}^{N'} \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{v=1}^s H_{s-v} \left(\frac{x}{a_n} \right) \left(\frac{\varepsilon_{kn}}{2} \right)^{s+1} \times \right. \\ \left. \times a_n^{-v} \int_{-a_k}^{a_k} t^v [a_{nksv} G_{k,p-s-1}(t) + b_{nksv} \overline{G_{k,p-s-1}(t)}] dt + iA_{np} \right\} \\ (p = 2, 3 \dots).$$

Здесь величины a_{nkp} , b_{nkp} и A_{np} являются коэффициентами разложения функций $K_{nh}(t, x)$, $L_{nh}(t, x)$ и A_n при малых значениях параметра λ :

$$\begin{pmatrix} K_{nh}(t, x) \\ L_{nh}(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{v=0}^p \begin{pmatrix} a_{nkp} \\ b_{nkp} \end{pmatrix} t^v x^{p-v} a_{nh}^{-p-1};$$

$$A_n = \sum_{p=0}^{\infty} A_{np} \lambda^p; \quad A_{np} = \frac{\beta}{\alpha + 1} \int_{-a_n}^{a_n} \gamma_{np}(x) dx;$$

$$a_{nkp} = \frac{1}{2} (-1)^{p+v+1} C_p^v \{ \exp \{ i [(p+1) \beta_{nh} - (p-v) \alpha_n - (v+1) \alpha_k] \} + \exp \{ i [(p+1) \beta_{nh} - (p-v+2) \alpha_n - (v-1) \alpha_k] \} \};$$

$$b_{nkp} = \frac{1}{2} (-1)^{p+v} \{ (p+1) C_p^v \exp \{ i [(p+3) \beta_{nh} - (p-v+2) \alpha_n - (v+1) \alpha_k] \} - (C_p^v + p C_{p-1}^v) \exp \{ i [(p+1) \beta_{nh} - (p-v) \alpha_n - (v+1) \alpha_k] \} - p C_{p-1}^{v-1} \exp \{ i [(p+1) \beta_{nh} - (p-v+2) \alpha_n - (v-1) \alpha_k] \} \}.$$

Заметим, что предложенный здесь подход к решению плоских задач термоупругости для тел с трещинами удобен в практическом применении, поскольку решения задач теплопроводности, термоупругости и силовой задачи находятся единообразно. Этим методом можно получить точные решения задач термоупругости в случаях двух коллинеарных трещин равной длины и периодической системы коллинеарных трещин в бесконечной плоскости. Первая из этих задач рассматривалась в работе [2], решение второй приводится ниже.

3. Рассмотрим периодическую систему коллинеарных термозолерованных трещин, размещенных на оси Ox ($\alpha_n=0, a_n=a, z_n^0=nd, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и находящихся в одинаковых условиях ($f_n(x)=f(x)$). В этом случае система (1.5) преобразуется в одно интегральное уравнение ($\gamma_n(x)=\gamma_1(x)$) [12]

$$\frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = f(x), |x| \leq a.$$

Его решение имеет вид

$$(3.1) \quad \gamma_1(x) = \frac{1}{d \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d}}} \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{d}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi t}{d}} f(t) dt}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{d} - \operatorname{tg} \frac{\pi t}{d}} + C_2 \right].$$

Интегрируя (3.1) в пределах от $-a$ до a , находим $C_2=0$.

Системе интегральных уравнений (2.10) в данном случае соответствует уравнение ($G_n(x)=G_1(x)$)

$$\int_{-a}^a G_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = 0, |x| \leq a,$$

решением которого будет

$$G_1(x) = \frac{iC_3}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{d}}}.$$

Используя соотношение

$$\int_{-a}^a G_1(x) dx = iA_1,$$

находим постоянную C_3 :

$$C_3 = \frac{A_1}{d \cos \frac{\pi a}{d}}.$$

Таким образом, решение задачи свелось к определению постоянной A_1 . Подставив в (2.5) значение $\gamma_1(x)$ (3.1), поменяв порядок интегрирования и вычислив внутренний интеграл, получим

$$A_1 = -\frac{\beta d}{2\pi(\kappa+1)} \int_{-a}^a f(t) H(t) dt,$$

$$H(t) = \ln \left| \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d}} + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi t}{d}}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d}} - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi a}{d} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi t}{d}}} \right|.$$

Коэффициенты интенсивности напряжений находятся по формуле (2.6)

$$(3.2) \quad k_{\frac{1}{2}}^{\pm} = \mp \frac{\beta d}{2\pi(\kappa+1) \sqrt{\pi d \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}}} \int_{-a}^a f(t) H(t) dt, \quad k_1^{\pm} = 0.$$

В случае однородного теплового потока на бесконечности ($f(x) = -2q$) из (3.2) имеем

$$(3.3) \quad k_{\frac{1}{2}}^{\pm} = \mp \frac{2\beta q d^2}{\pi(\kappa+1) \sqrt{\pi d \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}}} \ln \left| \cos \frac{\pi a}{d} \right|, \quad k_1^{\pm} = 0.$$

В заключение отметим, что формулы (2.7), (3.2) дают лишь те составляющие коэффициентов интенсивности напряжений, которые обусловлены возмущенным температурным полем. Результаты (2.9), (3.3) представляют собой полное решение задачи, поскольку линейное температурное поле $t_0(x, y)$ (2.8) не вызывает напряжений в сплошной бесконечной плоскости.

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С. Деякі питання термоміцності тіл з тріщинами.— «Вісник АН УРСР», 1972, № 4.
2. Кит Г. С., Дорош Н. А. Термоупругое состояние плоскости с двумя равными прямолинейными трещинами.— В кн.: Концентрация напряжений. Вып. 3. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. Кит Г. С., Лозовой Б. Л. Термоупругое состояние плоскости, ослабленной двумя коллинеарными трещинами.— «Физико-химическая механика материалов», 1974, т. 10, № 2.
4. Дорош Н. А., Кит Г. С. Термоупругое состояние плоскости с двумя равными дугообразными трещинами.— «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1969, № 5.
5. Дорош Н. А. Термоупругость круглой пластины с дугообразными трещинами, обусловленная источниками тепла.— «Вестн. Львовск. политехн. ин-та», 1970, № 47.
6. Кит Г. С. Плоская задача термомупругости для тела з тріщинами.— «Доповіди АН УРСР. Сер. А», 1969, № 5.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
8. Саврук М. П., Дацышин О. П. Плоская задача теплопроводности для тела с системой довольно размещенных термоизолирующих трещин.— «Вісник Львівського політехнічного інституту. Математика і механіка», 1974, № 87.
9. Дацышин А. П., Саврук М. П. Система произвольно ориентированных трещин в упругих телах.— ПММ, 1973, т. 37, № 2.
10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
11. Пруссов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, изд. Белорус. ун-та, 1972.
12. Саврук М. П., Дацышин А. П. О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела.— ПМ, 1974, т. 10, № 7.
13. Си. О сингулярном характере температурных напряжений у вершины трещины.— «Труды Америк. о-ва инженерно-механиков. Сер. Е», ПМ, 1962, № 3.