

ЛИТЕРАТУРА

1. *Knoepfel H.* Pulsed high magnetic fields. Amsterdam — London, North Holland Publ. Com., 1970. (Рус. перев.: Сверхсильные импульсные магнитные поля. М., «Мир», 1972.)
2. *Crawford J. C., Damerow R. A.* Explosively driven high-energy generators. J. Appl. Phys., 1968, vol. 39, No. 11, p. 5224.
3. *Maisonnier G., Linhart J. G., Gouylan G.* Rapid transfer of magnetic energy by means of exploding foils. Rev. Sci. Instrum., 1966, vol. 37, No. 10. (Рус. перев.: Быстрая передача энергии с помощью взрывающихся фольг. Приборы для научн. исслед. 1966, № 10.)
4. *DiMarco J. N., Burkhardt L. C.* Characteristics of a magnetic energy storage system using exploding foils. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 9, p. 3894.
5. *Биченков Е. И., Войтенко А. Е., Лобанов В. А., Маточкин Е. П.* Схема расчета и включение на нагрузку плоских взрывомагнитных генераторов. ПМТФ, 1973, № 2.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1964.

УДК 533.6.011

**ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ АНАЛОГЕ ВИХРЕВОГО
СТОЛБА ЧАПЛЫГИНА (ОБОБЩЕННЫЙ ВИХРЬ ХИЛЛА)**

А. Г. Ярмицкий

(Жданов)

В связи с возможностью практического применения кольцевых вихрей для борьбы с загрязнением атмосферы промышленными предприятиями [1] возрос интерес к цилиндрическим и сферическим вихрям.

Ниже дано обобщение сферического вихря Хилла, представляющее собой пространственный аналог вихревого столба Чаплыгина [2]. В качестве частного случая подробно исследован сферический винтовой вихрь: внутри такого вихря движение жидкости представляет собой осесимметричное однородное винтовое течение. Построена картина течения внутри этого вихря и показано, что он подобно вихревому столбу Чаплыгина и вихрю Хилла может перемещаться поступательно с постоянной скоростью в покоящейся на бесконечности жидкости. Предельная скорость движения винтового вихря, определяемая требованием, чтобы давление внутри него оставалось положительным, зависит от давления жидкости на бесконечности и ее плотности. Эта скорость примерно в 2 раза меньше соответствующей скорости столба Чаплыгина и в 4 раза меньше скорости вихря Хилла.

Хотя для практического использования сферических вихрей необходимо учитывать еще целый ряд факторов, и прежде всего вязкость, представляет интерес тот факт, что в рамках модели идеальной жидкости может быть построен класс сферических вихрей, одним из частных случаев которого является вихрь Хилла.

1. В общем случае осесимметричного вихревого течения несжимаемой невязкой жидкости уравнение для функции тока ψ в сферических координатах R, θ, φ имеет вид [3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \Phi(\psi) \Phi'(\psi) + F'(\psi) R^2 \sin^2 \theta = 0$$

Здесь функция $\Phi(\psi)$ определяет закон изменения φ -компоненты скорости, а функция $F(\psi)$ характеризует закон распределения энергии в потоке.

Исследуем вопрос о возможности существования сферического вихря, перемещающегося поступательно в покоящейся на бесконечности жидкости. Внутри вихря в системе координат, движущейся вместе с ним, течение описывается дифференциальным уравнением (1.1). Сообщив всей массе жидкости скорость, равную по величине и противоположную по направлению скорости вихря, перейдем к более удобной для рассмотрения задаче о потенциальном обтекании сферического вихря. При этом потребуем непрерывности соответствующих компонент скорости на поверхности вихря. Приходим к одной из задач о склейке потенциального и вихревого течений [1]. Как отмечено в [1, 4], в общем виде эта задача не исследована даже для $\Phi(\psi) = 0$ и простей-

ших функций $F(\psi)$. Только при $\Phi(\psi) = 0$ и $F(\psi) = A\psi$, где A — постоянная, имеется точное решение — функция тока «замечательно простого поля течения, известного как сферический вихрь Хилла» [4].

Оставляя неизменным закон распределения энергии и полагая, кроме этого, $\Phi(\psi) = k\psi$, запишем уравнение (1.1) в виде

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + k^2 \psi + AR^2 \sin^2 \theta = 0$$

Функция тока ψ_+ обтекания сферы радиуса a потенциальным потоком имеет вид

$$(1.3) \quad \psi_+ = \frac{1}{2} UR^2 (1 - a^3/R^3) \sin^2 \theta \quad (R > a)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию функции тока ψ_- течения внутри вихря, удовлетворяющей уравнению (1.2) и следующим условиям на поверхности вихря:

$$(1.4) \quad \psi_-|_{R=a} = 0$$

$$(1.5) \quad \left. \frac{\partial \psi_-}{\partial R} \right|_{R=a} = \left. \frac{\partial \psi_+}{\partial R} \right|_{R=a} = \frac{3}{2} Ua \sin^2 \theta$$

2. Рассмотрим обобщение вихря Хилла. Будем искать решение задачи (1.2) (1.4), (1.5) в виде

$$(2.1) \quad \psi_- = f(R) \sin^2 \theta \quad (R < a)$$

где $f(R)$ — произвольная дифференцируемая функция переменной R . Это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(2.2) \quad R^2 f''(R) + (k^2 R^2 - 2)f(R) = AR^4$$

Чтобы найти общее решение этого уравнения при $A \neq 0$, перейдем к новым переменным z и $w(z)$

$$f = Ak^{-7/2} R^{1/2} w(z), \quad z = kR$$

Получим неоднородное уравнение Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - 9/4)w = z^{7/2}$$

Общее решение этого уравнения, остающееся конечным во всех точках внутри сферы, имеет вид [5]

$$w = CJ_{3/2}(z) + s_{5/2, 3/2}(z)$$

где C — произвольная постоянная, $J_{3/2}(z)$ — бesselева функция порядка $3/2$, $s_{5/2, 3/2}(z)$ — функция Ломмеля.

Из теории бesselевых функций имеем $s_{\nu+1, \nu}(z) = z^\nu$; в частности $s_{5/2, 3/2}(z) = z^{3/2}$. С учетом этого получаем

$$w(z) = CJ_{3/2}(z) + z^{3/2}$$

Возвращаясь к прежним переменным, находим

$$(2.3) \quad f(R) = Ak^{-7/2} R^{1/2} (CJ_{3/2}(kR) + (kR)^{3/2})$$

$$\psi_- = Ak^{-7/2} R^{1/2} (CJ_{3/2}(kR) + (kR)^{3/2}) \sin^2 \theta$$

Предположим вначале, что $0 < k < b/a$, где $b = 4.4934$ — наименьший положительный корень функции $J_{3/2}(z)$.

Тогда из условия (1.4)

$$C = -(ka)^{3/2} / J_{3/2}(ka)$$

и, следовательно

$$(2.4) \quad \psi_- = Ak^{-2} \left(1 - \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2} \frac{J_{3/2}(kR)}{J_{3/2}(ka)} \right) R^2 \sin^2 \theta$$

Удовлетворив условию (1.5), найдем

$$A = {}^{3/2} U k^2 \frac{J_{3/2}(ka)}{3J_{3/2}(ka) - ka J_{1/2}(ka)}$$

Таким образом

$$(2.5) \quad \psi_- = {}^{3/2} U \frac{J_{3/2}(ka)}{3J_{3/2}(ka) - ka J_{1/2}(ka)} \left(1 - \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2} \frac{J_{3/2}(kR)}{J_{3/2}(ka)} \right) R^2 \sin^2 \theta$$

Рассматриваемое течение обладает следующей особенностью: вектор-вихрь в каждой точке поверхности сферы расположен в касательной плоскости, проходящей через эту точку, и наклонен под одним и тем же углом к соответствующей меридиональной плоскости.

Компоненты вектора вихря Ω [3]

$$\Omega_R = kv_R, \quad \Omega_\theta = kv_\theta, \quad \Omega_\varphi = kv_\varphi - AR \sin \theta$$

На поверхности сферы

$$\Omega_R = 0, \quad \Omega_\theta = {}^{3/2} k U \sin \theta, \quad \Omega_\varphi = -Aa \sin \theta$$

Поэтому

$$(2.6) \quad \gamma = \Omega_\varphi / \Omega_\theta = \frac{\lambda J_{3/2}(\lambda)}{\lambda J_{1/2}(\lambda) - 3J_{3/2}(\lambda)} = \text{const} \quad (\lambda = ka)$$

что и доказывает приведенное выше утверждение.

Таким образом, параметр k определяется тангенсом угла наклона вектора-вихря в любой точке поверхности сферы к соответствующей меридиональной плоскости.

Рассмотрим предельные случаи $k = 0$ и $k = b/a$.

Используя выражения бесселевых функций при малых значениях аргумента, можно проверить, что в первом случае на поверхности сферы $\Omega_\theta = 0$, а функция тока (2.5) определяет течение внутри сферического вихря Хилла. Во втором случае получаем сферический вихрь, на поверхности которого $\Omega_\varphi = 0$, внутри этого вихря течение жидкости однородное ($k = \text{const}$) винтовое. Такой вихрь назовем сферическим винтовым. Параметр k , следуя [3], будем называть напряженностью однородного винтового движения, в рассматриваемом случае он определяется отношением b/a .

3. Рассмотрим сферический винтовой вихрь. Положив в (2.5) $k = b/a$, найдем

$$(3.1) \quad \psi_- = {}^{3/2} U \frac{a^{3/2}}{b J_{1/2}(b)} R^{1/2} J_{3/2}(bR/a) \sin^2 \theta$$

Так как $J_{1/2}(b) < 0$, а $J_{3/2}(bR/a) > 0$ при $R < a$, то $\psi_- < 0$, а $\psi_+ > 0$. При $k > b/a$ функция тока меняла бы знак внутри сферы.

Уравнение линий тока в меридиональных сечениях сферы ($R < a$)

$$(3.2) \quad \left(\frac{R}{a} \right)^{1/2} J_{3/2} \left(b \frac{R}{a} \right) \sin^2 \theta = \text{const}$$

Эти линии тока изображены на фиг. 1 для равноотстоящих значений ψ_- . В их число входят разделяющие течение линии тока: ось симметрии и меридиональная линия сферы.

Наибольшего по абсолютной величине значения ψ_- достигает в точке $(0.611 a, \pi/2)$, вокруг которой стягиваются линии тока. В этой точке компоненты скорости $v_R = v_\theta = 0$. Для сравнения заметим, что в случае вихревого столба Чаплыгина [2] соответствующая точка расположена на расстоянии $\delta = 0.48 a$ от оси симметрии течения,

где a — радиус цилиндрического вихря, а в случае вихря Хилла ее координаты $(0.707a, \pi/2)$. В последних двух случаях эта точка критическая, через нее проходит неподвижная центральная вихревая нить (прямолинейная в случае столба Чаплыгина и круговая в вихре Хилла).

В рассматриваемом случае точка экстремума функции ψ не является критической, так как в этой точке азимутальная компонента скорости v_φ отлична от нуля. Поэтому вихревая линия, проходящая через данную точку и представляющая собой окружность в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии течения, вращается вокруг последней с некоторой окружной скоростью. Эта скорость может быть найдена по формуле

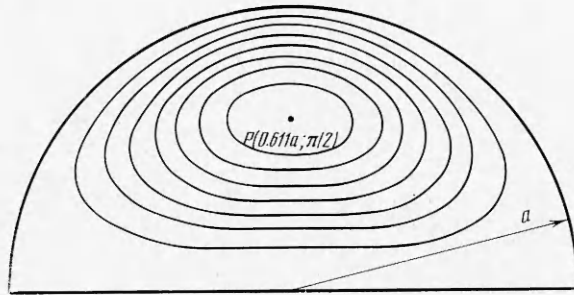
$$(3.3) \quad v_\varphi = \frac{k\psi}{R \sin \theta} = \frac{3}{2} U \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} \frac{J_{3/2}(bR/a)}{J_{1/2}(b)} \sin \theta$$

Выполнив соответствующие вычисления с помощью таблиц бесселевых функций [6] при $R/a = 0.611$ и $\theta = \pi/2$, получим

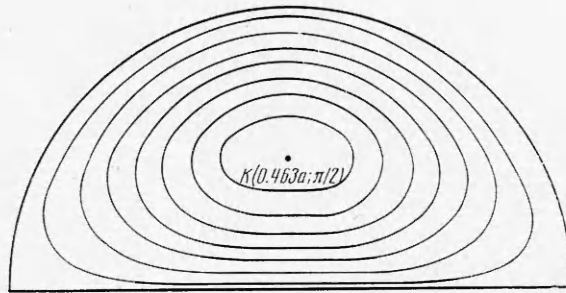
$$v_\varphi = -2.87U$$

Наибольшего по абсолютной величине значения φ -компонента скорости достигает в точке $(0.463a, \pi/2)$

$$|v_{\varphi_{\max}}| = 3.35U$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Линии пересечения поверхностей уровня функции $v_\varphi(R, \theta)$ с плоскостью меридионального сечения сферы показаны на фиг. 2.

Остальные компоненты скорости могут быть найдены по формулам

$$(3.4) \quad v_R = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{R \partial \theta} = \frac{3}{2} U \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} J_{3/2} \left(b \frac{R}{a} \right) \cos \theta$$

$$(3.5) \quad v_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -\frac{3}{2} U \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2} \left(b \frac{R}{a} J_{1/2} \left(b \frac{R}{a} \right) - J_{3/2} \left(b \frac{R}{a} \right) \right) \sin \theta$$

Максимальная по величине скорость внутри вихря возникает в его центре

$$|v_{\max}| = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{|J_{1/2}(b)|} U = 5.3 U$$

Та же скорость внутри столба Чаплыгина [2] составляет $2.48U$, а внутри вихря Хилла $1.5U$. Это указывает на большую интенсивность вихревого движения внутри сферического винтового вихря.

Перейдем к определению давления внутри вихря. Как показано в [7], при винтовом движении вязкой жидкости запас энергии во всей массе жидкости постоянен, т. е. уравнение Бернулли применимо ко всему потоку в целом

$$(3.6) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{v_R^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2}{2} = \text{const}$$

При переходе через границу вихря давление изменяется непрерывно. Поэтому можно положить

$$\text{const} = p_0 / \rho + U^2 / 2$$

где p_0 — давление на бесконечности.

Так как наибольшая по абсолютной величине скорость достигается в центре вихря, то наименьшее давление имеет место тоже в этой точке

$$(3.7) \quad p_{\min} = p_0 + \left(1 - \frac{2b}{\pi J_{1/2}^2(b)}\right) \frac{\rho U^2}{2} = p_0 - 13.5 \rho U^2$$

Чтобы внутри вихря давление оставалось положительным, необходимо соблюдение условия

$$(3.8) \quad U < 0.272 (p_0 / \rho)^{1/2}$$

При одном и том же отношении p_0 / ρ предельная скорость этого движения примерно в 2 раза меньше соответствующей скорости столба Чаплыгина и в 4 раза меньше скорости вихря Хилла.

Сообщив всей массе жидкости скорость U в противоположном направлении, получим сферический винтовой вихрь, движущийся поступательно в покоящейся на бесконечности жидкости.

Поступила 18 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
2. *Чаплыгин С. А.* Один случай вихревого движения жидкости. Собр. соч., т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958.
4. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1968.
7. *Громека И. С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собр. соч. М., Изд-во АН СССР, 1952.