Для конкретной структуры среды [3] проведены расчеты на ЭВМ для

$$\alpha_1 = 12{,}127\cdot 10^2,\ \alpha_2 = 58{,}73\cdot 10^3,\ E = 90{,}16\cdot 10^2, \tag{1.17}$$
$$\rho_0 = 200\ \text{кг}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4,\ p_0 = 105\ \text{кг/см}^2,$$
$$D = 340\sqrt{1 + 0{,}83p_0},\ R_1 = \operatorname{tg}\alpha_0 = 0{,}1255,\ R_2 = 0{,}86\cdot 10^{-3},\ h = 1{,}2\ \text{м}.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2—5 для давления, массовой скорости и $\operatorname{tg}\beta$ (ξ) в зависимости от ξ в сечениях $\eta = h/2$ (сплошные), h (штриховые линии) и вдоль фронта отраженной волны Σ_0. На рис. 2 видно, что параметры p, u, v в областях *1* и *3* в зависимости от ξ по абсолютной величине уменьшаются нелинейным образом. В области *2* p, u линейно возрастают, а v линейно уменьшается и меняет знак. Эти параметры достигают своего максимального значения на соответствующих точках фронта отраженной волны со стороны области *3*, их значения с увеличением толщины полосы уменьшаются (рис. 2, 3, $h = 1$ и 2 м). На рис. 3 кривые *1* отвечают случаю (1.17) при $h = 2$ м. При сопоставлении числовых результатов обнаружено, что с увеличением коэффициентов α_1 и α_2 происходит рост значений параметров p, u, v. При уменьшении модуля Юнга E соответственно уменьшаются все параметры среды и время их действия на полосу (рис. 3, кривые *2*). Анализ кривых рис. 4 показывает, что давление p_3^* (p_2^*) со стороны области *3* (*2*) вдоль фронта отраженной волны в зависимости от ξ постепенно падает (растет), а вертикальная (горизонтальная) составляющая скорости среды увеличивается (уменьшается). При этом в момент $\xi = 23{,}6$ м отраженная волна угасает. Кроме того, на рис. 4 для сравнения приведены также результаты расчетов для $\alpha_1 = 12{,}127\cdot 10^2$, $\alpha_2 = 58{,}73\cdot 10^3$ при $h = 2$ м (сплошные линии) и $h = 1$ м (штриховые), для $\alpha_1 = 24{,}254\cdot 10^2$, $\alpha_2 = 117{,}46\cdot 10^3$ при $h = 2$ м (линии с кружочками). Изучая кривую $\operatorname{tg}\beta(\xi)$ (рис. 5), заметим, что она с увеличением ξ медленно уменьшается, и, следовательно, фронт отраженной волны получается слабоискривленным и вогнутым к оси $O\xi$ (см. рис. 1) поверхностью. Однако изменение $\operatorname{tg}\beta(\xi)$ в рассматриваемом интервале ξ по сравнению с его первоначальным значением в точке $\xi = \xi_a$, $\eta = h$ составляет приблизительно 2—4%.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скобеев А. М., Флитман Л. М.** Подвижная нагрузка на неупругой полуплоскости.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
2. **Капустянский С. М.** Распространение и отражение двумерных пластических волн.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
3. **Атабаев К.** О воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость.— ДАН УзССР, 1979, № 9.
4. **Мамадалиев Н., Молев В. П.** О распространении двумерной пластической волны в нелинейно-сжимаемой полуплоскости.— ПМТФ, 1977, № 4.

Поступила 4/IV 1985 г.

УДК 532.135

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В. М. Волчков, А. А. Козлов, П. В. Кузин

(*Волгоград*)

Существенная особенность высокоскоростного деформирования твердых тел — локализация деформации, одной из причин которой может быть неизотермическая неустойчивость пластического течения [1—6]. В связи с интенсивным развитием высокоскоростной технологии обработки материалов исследование критериев неизотермической неустойчивости процессов пластической деформации представляет принципиальный интерес, так как в некоторых случаях они определяют оптимальные технологические режимы [5]. Критические величины скоростей деформации, выше которых эффекты тепловой неустойчивости становятся определяющими в процессе деформирования твердых тел, полуэмпирическими методами оценены в [1].

В [2] рассмотрена некраевая задача о критериях неизотермической неустойчивости с точки зрения устойчивости течения в так называемой связанной постановке. Последнее означает, что к основным уравнениям, определяющим динамику упругопластической среды, добавляется уравнение теплопроводности. В аналогичной постановке, но для осредненного по пространственной координате течения задача решена в [6]. В настоящей работе в указанной постановке дано решение краевой задачи для одномерного течения.

1. В дальнейшем принимается модель Максвелла упруговязкой среды, что удовлетворительно описывает поведение материала при высоких скоростях деформирования [7].

В этом случае уравнения одномерного движения среды записываются в виде

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\sigma}{\partial y},\quad \frac{1}{G}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\sigma}{\mu},\quad \rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\sigma^2}{\mu} \tag{1.1}$$

$$(\mu=\mu_0\exp[-\beta(T-T_0)]),$$

где ρ — плотность среды; G — модуль сдвига; c, λ — теплоемкость и теплопроводность среды; u — скорость течения; σ — напряжение; T — температура; μ_0, β — константы в формуле Рейнольдса для вязкости.

Система (1.1) исследуется при граничных условиях:

$$\partial T/\partial y=0,\ u=V_0 \text{ при } y=h,$$
$$\lambda\partial T/\partial y=\alpha(T-T_0),\ u=0 \text{ при } y=0.$$

Здесь α — коэффициент теплоотдачи на границе; V_0 — скорость верхней границы; T_0 — температура окружающей среды.

Введем безразмерные переменные [6]:

$$\tilde u=u/V_0,\ \tilde\sigma=\sigma/GDT_0,\ \Theta=\beta(T-T_0),$$
$$\tilde t=t/t_0,\ \tilde y=y/h,$$

где

$$t_0=c\rho h/\alpha;\ t_1=c\rho/(\beta\mu_0 D^2);$$
$$t_2=\mu_0/G;\ t_3=h^2\rho/G,\ D=V_0/h;$$

t_0, t_1, t_2, t_3 — характерные времена теплоотвода, тепловыделения, упругой релаксации, распространения упругих волн.

В указанных безразмерных переменных уравнения (1.1) примут вид

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde t}=A\frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde y},\quad \frac{\partial\tilde\sigma}{\partial\tilde t}=\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde y}-\delta\sigma\exp(\Theta), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tilde t}=\frac{1}{\mathrm{Bi}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\tilde y^2}+\varkappa\delta^2\sigma^2\exp(\Theta)$$

при граничных условиях

$$\partial\Theta(1,\tilde t)/\partial\tilde y=0,\ \partial\Theta(0,\tilde t)/\partial\tilde y=\mathrm{Bi}\,\Theta(0,\tilde t), \tag{1.3}$$
$$\tilde u(0,\tilde t)=0,\ \tilde u(1,\tilde t)=1$$
$$(\delta=t_0/t_2,\ \varkappa=t_0/t_1,\ A=t_0/t_3,\ \mathrm{Bi}=\alpha h/\lambda).$$

Далее верхняя черта, обозначающая безразмерную переменную, опускается. Стационарным решением задачи (1.2), (1.3) является

$$u_0=\frac{2c_1}{\delta\varkappa\sigma_0\mathrm{Bi}}\left[\frac{1}{1+\exp(-c_1)}-\frac{1}{1+\exp(c_1(y-1))}\right], \tag{1.4}$$

$$\sigma_0=\frac{c_1}{\delta\varkappa\,\mathrm{Bi}}\frac{1-\exp(-c_1)}{1+\exp(-c_1)}=\mathrm{const},$$

$$\exp(\Theta_0)=\frac{2c_1^2\exp(c_1(y-1))}{\delta^2\varkappa\,\mathrm{Bi}\,\sigma_0^2[1+\exp(c_1(y-1))]^2},$$

где постоянная интегрирования c_1 находится из условия

$$\varkappa = \frac{(\exp(c_1)-1)^2}{2\,\mathrm{Bi}\exp(c_1)}\exp\left[\frac{c_1}{\mathrm{Bi}}\left(\frac{\exp(c_1)-1}{\exp(c_1)+1}\right)\right].$$

Положив

$$u = u_0(y) + u'(y)e^{\beta t},\quad \sigma = \sigma_0(y) + \sigma'(y)e^{\beta t},$$
$$\Theta = \Theta_0(y) + \Theta'(y)e^{\beta t},$$

получим задачу об устойчивости стационарного решения (1.4) относительно малых возмущений $u'(y)$, $\sigma'(y)$, $\Theta'(y)$:

$$\beta u' = A d\sigma'/dy, \tag{1.5}$$
$$\beta\sigma' = du'/dy - \delta\sigma' \exp(\Theta_0) - \delta\sigma_0\Theta' \exp(\Theta_0),$$
$$\beta\Theta' = \frac{1}{\mathrm{Bi}}\frac{d^2\Theta'}{dy^2} + \varkappa\delta^2\sigma_0^2\Theta' \exp(\Theta_0) + 2\varkappa\delta^2\sigma_0\sigma' \exp(\Theta_0).$$

Здесь параметр β характеризует интенсивность роста возмущений. Если $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, течение неустойчиво. Вместо (1.3) найдем граничные условия для u', σ', Θ':

$$d\Theta'/dy = 0,\ u' = 0 \text{ при } y = 1, \tag{1.6}$$
$$d\Theta'/dy = \mathrm{Bi}\Theta',\ u' = 1 \text{ при } y = 0.$$

Для отыскания собственных чисел β уравнения (1.5), (1.6) представлялись в виде системы восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (для вещественных и мнимых частей возмущений). Численно методом Рунге—Кутта строились два линейно-независимых частных решения, для которых выполнены условия (1.6) в начальной точке интегрирования (при $y = 0$). Затем строилась линейная комбинация этих частных решений. Необходимость удовлетворения граничным условиям при $y = 1$ приводит к характеристическому уравнению, из которого находятся собственные числа задачи. Описанная процедура решения задач устойчивости с использованием численного построения частных решений методом Рунге—Кутта обсуждалась в [8].

На рис. 1 приведены результаты расчетов области неустойчивости для различных значений параметров δ, $\varkappa$, Bi, A (Bi = 16; 4; 1; 0,01 — линии *1—4*). Течение неустойчиво в области, прилежащей к оси $\varkappa$. Штриховыми линиями показаны границы для $A = 0$ при соответствующих значениях Bi, сплошными — для $A = 1$ (при больших A кривые с точностью до построения графика не меняются). Видно, что граница области принципиально зависит от Bi, параметр A влияет на ее положение в меньшей степени и для $\mathrm{Bi} < 1$ зависимость от A несущественна.

2. В связи с отмеченным фактом несущественной зависимости границы устойчивости от A в области указанных значений Bi и $\varkappa$ целесообразно рассмотреть задачу для $A = 0$ (без первого уравнения (1.5)).

В этом случае система уравнений для возмущений имеет вид

$$\beta\sigma' = -\delta\sigma' \exp(\Theta_0) - \delta\sigma_0\Theta' \exp(\Theta_0), \tag{2.1}$$
$$\beta\Theta' = \frac{1}{\mathrm{Bi}}\frac{d^2\Theta}{dy^2} + \varkappa\delta^2\sigma_0^2\Theta' \exp(\Theta_0) + 2\varkappa\delta^2\sigma_0\sigma' \exp(\Theta_0)$$

при граничных условиях (1.6).

Решение задачи разыскивалось методом, описанным в п. 1, и методом Галеркина (численная реализация метода с использованием QR-алгоритма [9] для определения собственных значений выполнена Г. А. Королевым) в виде разложения

$$\begin{pmatrix}\sigma\\ \Theta\end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha_n & \varphi_n\\ \beta_n & \psi_n\end{pmatrix}.$$

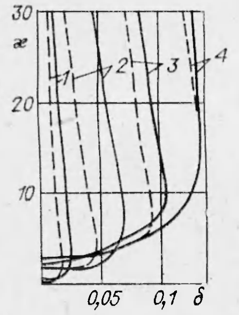

Рис. 1

В качестве системы базовых функций выбирались собственные функции задачи (1.6), (2.1) при $\Theta_0 = \mathrm{const}$:

$$\varphi_n = 1/\sqrt{2}\cos \pi n y, \tag{2.2}$$

$$\psi_n = 1/\|\Phi_n\|(\sin \omega_\Theta y + (\omega_\Theta/\mathrm{Bi})\cos \omega_\Theta y),$$

где ω_Θ определяется из соотношения

$$\omega_\Theta \operatorname{tg} \omega_\Theta = \mathrm{Bi}; \tag{2.3}$$

$\|\Phi_n\|$ — коэффициент нормировки. Система функций (2.2) полная и ортонормированная на отрезке [0; 1].

Результаты, полученные обоими методами, совпадают с найденными из решения полной задачи (при $A \to 0$), отмеченными на рис. 1 штриховыми линиями.

Для сравнения рассмотрим эту же задачу ($A = 0$), но для постоянного значения стационарного решения $\bar{\Theta}_0 = \mathrm{const}$ (в качестве $\bar{\Theta}_0$ можно взять осредненное по координате $\int_0^1 \Theta_0(y)dy$ выражение $\Theta_0(y)$ из третьей формулы (1.4)). В этом случае задача допускает аналитическое решение.

Уравнения (1.5) сводятся к одному

$$d^2\Theta'/dy^2 + M\Theta' = 0,$$

где $M = \mathrm{Bi}\left(\varkappa\delta^2\sigma_0^2\exp(\bar{\Theta}_0) - \dfrac{2\varkappa\sigma_0^2\delta^3\exp(2\bar{\Theta}_0)}{\beta - \delta\exp(\bar{\Theta}_0)} - \beta\right)$. Легко показать, что собственными функциями задачи (2.3) при граничных условиях (1.6) будут функции ψ_n из (2.2), в которых $\omega_\Theta^2 = M$.

Для неустойчивых возмущений $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ (хотя бы для одного корня). Поэтому, используя условия Гурвица, найдем из характеристического уравнения критерий неустойчивости течения

$$\omega_\Theta^2/\mathrm{Bi} + \delta\exp(\bar{\Theta}_0) - \varkappa\delta^2\sigma_0^2\exp(\bar{\Theta}_0) < 0. \tag{2.4}$$

Границы областей, определяемых этим соотношением, при различных Bi в пределах точности построения графика совпадают со штриховыми кривыми на рис. 1, полученными из решения полной задачи.

При $\mathrm{Bi} \to 0$ имеем из (2.3) $\omega_\Theta^2/\mathrm{Bi} \to 1$ и (2.4) переходит в условие

$$1 + \delta\exp(\bar{\Theta}_0) - \varkappa\delta^2\sigma_0^2\exp(\bar{\Theta}_0) < 0,$$

совпадающее с критерием неустойчивости [6].

3. Для выяснения характера нестационарного движения среды после потери устойчивости проведен численный анализ полной нелинейной системы (1.2) при граничных условиях (1.3). Разностная схема строится на основе метода интегральных соотношений [10].

На сетке $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$,

$$\omega_h = \{y_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ hN = 1\},$$
$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, 2, \ldots\}$$

система уравнений (1.2) с условиями (1.3) аппроксимируется по разностной схеме

$$h[{}^{(\alpha)}(\breve{\sigma}_t + \delta\sigma\exp(\breve{\Theta}) - {}^{(\alpha)}(\sigma_t + \hat{\sigma}\delta\exp\Theta))] +$$
$$+ A\tau(\sigma_y^{(\beta)} - \sigma_{\bar{y}}^{(\beta)}) = 0,$$
$$h({}^{(\nu)}\Theta - {}^{(\nu)}\hat{\Theta}) + (\tau/\mathrm{Bi})(\Theta_y^{(\varepsilon)} - \Theta_{\bar{y}}^{(\varepsilon)}) -$$
$$- \varkappa\delta^2 h\tau^{(\mu)}(\sigma^2\exp(\breve{\Theta}))^{(\nu)} = 0,$$

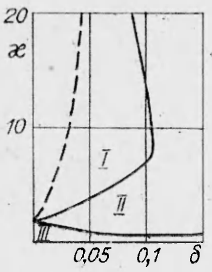

Рис. 2

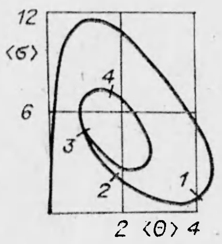

Рис. 3

в которой использованы следующие обозначения [10]:

$$\sigma(y_i, t_j) = \sigma, \quad \sigma(y_i \pm h, t_j) = \sigma(\pm 1),$$

$$\sigma(y_i, t_j + \tau) = \hat{\sigma}, \quad \sigma(y_i, t_j - \tau) = \check{\sigma},$$

$$\sigma_y = (\sigma(+1) - \sigma)/h, \quad \sigma_{\bar{y}} = (\sigma - \sigma(-1))/h, \quad \sigma_t = (\hat{\sigma} - \sigma)/\tau,$$

$$\sigma^{(\alpha)} = \alpha\hat{\sigma} + (1 - \alpha)\sigma, \quad {}^{(\alpha)}\sigma = \alpha\sigma(+1) + (1 - \alpha)\sigma.$$

Для оценки точности производилось сравнение результатов расчета при шаге по времени τ и $\tau/2$. Весовые коэффициенты разностной схемы выбирались из условий устойчивости метода прогонки [10], используемого для решения системы алгебраических уравнений, и все полагались равными 0,5. При выборе величины шага по времени в первом приближении ориентировались на соотношения, справедливые для обычной явной разностной схемы:

$$\tau < \frac{1}{\delta}\exp\left(-\max_{0 \leqslant i \leqslant N} \Theta_i\right), \quad \tau < \mathrm{Bi}\, h^2/2. \tag{3.1}$$

В дальнейшем в процессе счета эти соотношения уточнялись эмпирически. При этом устойчивость схемы обеспечивалась, как правило, при шагах по времени, больших, чем следовало из соотношений (3.1).

4. На рис. 2 приведены характерные области поведения решений при $A = 1$, $\mathrm{Bi} = 1$, I — область колебаний вокруг стационарной точки (неустойчивый режим). Область устойчивости с точки зрения линейной задачи п. 1, 2 здесь разбивается на две (II и III). В области II стационарная точка — устойчивый «фокус», в III — устойчивый «узел», в первом случае

$$\lim_{t \to \infty}\left(f_i(y_0, t) - f_i^{(0)}(y_0)\right) = 0,$$

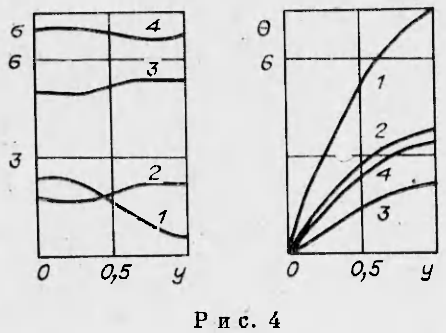

Рис. 4

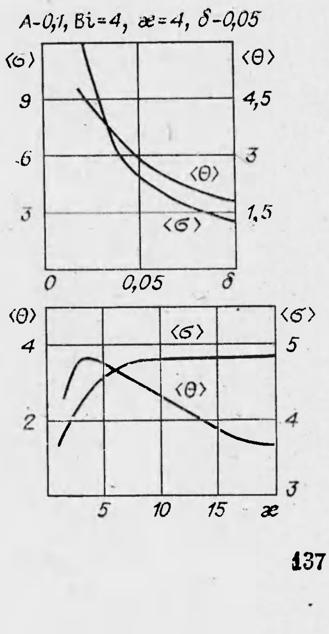

Рис. 5

во втором

$$f_i(y_0, t) - f_i^{(0)}(y_0) = 0, \ t > t^*,$$

где f_i — u, σ, Θ; $f_i^{(0)}$ — стационарное решение (1.4); $0 \leqslant y_0 \leqslant 1$.

На рис. 3 представлена фазовая диаграмма (σ^j, Θ) для области автоколебаний осредненных σ и Θ при $A = 1$, $\mathrm{Bi} = 16$, $\delta = 0{,}02$, $\varkappa = 3{,}5$. Осреднение проводилось по формуле $\langle\sigma^j\rangle = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\sigma_i^j$. Предельный цикл на этой диаграмме образуется вокруг $\langle\sigma_0\rangle$, $\langle\Theta_0\rangle$ — осредненной стационарной точки.

На рис. 4 показано изменение распределения $\langle\sigma\rangle$, $\langle\Theta\rangle$ по y в зависимости от времени. Кривые *1—4* на рис. 4 соответствуют точкам *1—4* на рис. 3. Функция $u(y, t_0)$ при $t > 0$ незначительно отличается от $u(y, 0) = y$.

Для периода колебаний величин $\langle\sigma\rangle$ и $\langle\Theta\rangle$ (в области *I*), полученных в результате настоящего расчета, можно пользоваться такой же формулой, как и в [6], выведенной при решении осредненной задачи $T = \delta^{-0,71}(2{,}6\cdot\varkappa^{-0,5} + 0{,}21)$ с той же точностью (10—15%). Таким образом, в рассматриваемой области $\varkappa \leqslant 20$ нет существенной зависимости T от Bi и A.

Для амплитуды колебаний на рис. 5 приведены характерные графики зависимости от δ и $\varkappa$. Существенной зависимости амплитуд от Bi и A при $\varkappa \leqslant 20$ также не обнаружено. Следует отметить, что не при всех значениях δ и $\varkappa$ удалось добиться устойчивого счета по разностной схеме. На рис. 2 штриховой линией отмечена приближенная граница области устойчивости схемы для $\mathrm{Bi} = 1$, $A = 1$. При $\varkappa > e$ амплитуда колебаний $\langle\sigma\rangle$ и $\langle\Theta\rangle$ растет быстрее экспоненты при уменьшении δ (рис. 5).

Изложенный в п. 1, 2 анализ краевой линейной задачи (относительно малых возмущений) позволяет определить область тепловой неустойчивости течения упруговязкой среды в зависимости от безразмерных параметров A, Bi, $\varkappa$, δ. Показано, что для небольших значений $\varkappa$ и Bi зависимость от параметра A несущественна и можно пользоваться приближенным критерием (2.4), полученным аналитически. Последний при $\mathrm{Bi} \to 0$ переходит в критерий, найденный в [6] при анализе осредненной (по пространственной координате) задачи. Численное решение нелинейной задачи принципиально подтвердило результаты линейного анализа и позволило установить закономерности развития течения после потери устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рехт Р. Ф.** Разрушающий термопластический сдвиг.— Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Прикл. механика, 1964, т. 21, сер. Е, № 2.
2. **Волчков В. М., Виноградов М. А., Козлов А. А.** Об устойчивости упругопластических течений.— ПМТФ, 1977, № 6.
3. **Пашков П. О.** Рост трещин в металлах.— В кн.: Металловедение и прочность материалов. Волгоград: Волград. политехн. ин-т, 1977, вып. 8.
4. **Волчков В. М., Пашков П. О., Павлов А. И., Рогозин В. Д.** О механизмах пластической деформации в сильных ударных волнах.— В кн.: Высокоскоростная деформация (вопросы поведения металлических материалов при импульсных нагружениях). М.: Наука, 1971.
5. **Козлов А. А.** Исследование контактных упругопластических деформаций при резании металлов. Канд. дис.— Тбилиси, 1979.
6. **Бучацкий Л. М., Столин А. М., Худяев С. И.** К теории тепловой неустойчивости течения вязкоупругой жидкости.— ПМТФ, 1979, № 3.
7. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
8. **Бирих Р. В., Рудаков Р. Н.** Применение метода Рунге — Кутта для исследования устойчивости плоскопараллельных конвективных течений.— В кн.: Приближенное решение краевых задач и функциональных уравнений. Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1971, № 84.
9. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем.— М.: Наука, 1977.

Поступила 18/I 1985 г.