УДК 532.516

НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович

Институт прикладной физики РАН, 603000 Нижний Новгород
E-mail: abrash@hydro.appl.sci-nnov.ru

Выведено уравнение, описывающее движение несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа. В качестве неизвестных функций выбраны циркуляции скорости по контурам, охватывающим бесконечно малые площадки в каждой из плоскостей лагранжевых переменных (инварианты Коши). Проанализированы примеры известных точных решений, полученных с использованием данного метода описания течений жидкости.

Ключевые слова: вязкость, инварианты Коши, завихренность, лагранжевы переменные.

Введение. Вывод уравнений Навье — Стокса в переменных Лагранжа приводится в работах [1, 2]. Уравнение непрерывности для течений однородной несжимаемой жидкости записывается следующим образом:

$$[X_1, X_2, X_3] = D_0(a, b, c). \tag{1}$$

Здесь $X_1 = X(a, b, c, t)$, $X_2 = Y(a, b, c, t)$, $X_3 = Z(a, b, c, t)$ — координаты траекторий жидкой частицы; a, b, c — лагранжевы переменные. Квадратные скобки обозначают якобиан по переменным Лагранжа. Функция D_0 является некоторой функцией лагранжевых переменных и не зависит от времени t. Если начальные положения жидкой частицы совпадают с лагранжевыми координатами, т. е. $X_0 = a$, $Y_0 = b$, $Z_0 = c$, то $D_0 = 1$.

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = -(\rho D_0)^{-1}[X_j, X_k, p] + \nu D_0^{-1}\Big\{\Big[X_2, X_3, D_0^{-1}\Big[X_2, X_3, \frac{\partial X_i}{\partial t}\Big]\Big] + \\ + \Big[X_3, X_1, D_0^{-1}\Big[X_3, X_1, \frac{\partial X_i}{\partial t}\Big]\Big] + \Big[X_1, X_2, D_0^{-1}\Big[X_1, X_2, \frac{\partial X_i}{\partial t}\Big]\Big]\Big\}. \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; ν — кинематическая вязкость. Уравнения (1) и (2) относительно неизвестных $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{a}, t) = X_i(a, b, c, t)$, $i = 1, 2, 3$ и $p(a, b, c, t)$ образуют полную систему уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа. Вывод этих уравнений приведен впервые в [3]. Позднее тот же результат был независимо получен А. С. Мониным [4] (см. также [1]). В работах [1, 3, 4] полагалось, что $D_0 = 1$.

В данной работе предлагается новый способ представления уравнения движения (2), где в качестве неизвестных функций выбраны циркуляции скорости по контурам, охватывающим бесконечно малые площадки в каждой из плоскостей лагранжевых переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00695, 05-05-64265) и в рамках Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-6043.2006.2).

Рассмотрены примеры известных точных решений, полученных с использованием нового метода представления уравнений динамики вязкой жидкости.

1. Уравнения для инвариантов Коши. При записи уравнений движения используется уравнение Ньютона для отдельной жидкой частицы. Вязкая сила $\boldsymbol{f}_{\text{в}}$, действующая на единицу массы несжимаемой жидкости, равна

$$\boldsymbol{f}_{\text{в}} = \nu\Delta_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{V} = -\nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} (\operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{V}). \tag{1.1}$$

С учетом (1.1) уравнение движения жидкой частицы имеет вид

$$\boldsymbol{r}_{tt} = -\rho^{-1}\nabla p - \nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} (\operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{r}_t), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{r} = (X, Y, Z)$. Введем в рассмотрение матрицу Якоби $R = \partial X_i/\partial a_j$ и умножим левую часть уравнения (1.2) на транспонированную к ней матрицу R^*. В итоге получим

$$R^*\boldsymbol{r}_{tt} = -\rho^{-1}\nabla_{\boldsymbol{a}} p - \nu R^* \operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} (\operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{r}_t). \tag{1.3}$$

Нижние индексы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{X}$ у знака векторной дифференциальной операции означают, что дифференцирование ведется по лагранжевым или эйлеровым переменным соответственно.

Для того чтобы исключить давление, к уравнению (1.3) применим операцию ротора по лагранжевым переменным:

$$\operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^*\boldsymbol{r}_{tt}) = -\nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^* \operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} (\operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{r}_t)). \tag{1.4}$$

Полагая $\nu = 0$ и используя тождество [5. С. 12]

$$R^*\boldsymbol{r}_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} (R^*\boldsymbol{r}_t) - \frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{a}}(|r_t|^2),$$

после интегрирования по времени получим

$$\operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^*\boldsymbol{r}_t) = \boldsymbol{S}(a, b, c) \tag{1.5}$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned}
X_{tb}X_c - X_{tc}X_b + Y_{tb}Y_c - Y_{tc}Y_b + Z_{tb}Z_c - Z_{tc}Z_b &= S_1(a, b, c),\\
X_{tc}X_a - X_{ta}X_c + Y_{tc}Y_a - Y_{ta}Y_c + Z_{tc}Z_a - Z_{ta}Z_c &= S_2(a, b, c),\\
X_{ta}X_b - X_{tb}X_a + Y_{ta}Y_b - Y_{tb}Y_a + Z_{ta}Z_b - Z_{tb}Z_a &= S_3(a, b, c).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь S_1, S_2, S_3 — произвольные функции лагранжевых переменных (интегралы движения). Уравнения (1.6) впервые сформулированы Коши [6], поэтому функции S_1, S_2, S_3 будем называть инвариантами Коши. В том случае, когда начальные положения жидких частиц совпадают с лагранжевыми координатами, инварианты Коши равны начальной величине соответствующих компонент вектора завихренности $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\Omega_{X0} = S_1, \qquad \Omega_{Y0} = S_2, \qquad \Omega_{Z0} = S_3. \tag{1.7}$$

В общем случае выбора лагранжевых переменных такая простая связь между компонентами вектора завихренности и инвариантами Коши отсутствует. Величина S_1 имеет смысл потока завихренности через единицу площади в плоскости лагранжевых переменных b, c. Независимость от времени функции S_1 обусловлена сохранением циркуляции по бесконечно малому контуру $\delta b\delta c$ [6]. Аналогично независимость от времени S_2 и S_3 обусловлена сохранением циркуляции по контурам $\delta a\delta c$ и $\delta a\delta b$ соответственно.

Выражение (1.5) будем рассматривать как определение вектора инвариантов Коши. В случае вязкой жидкости величины S_1, S_2, S_3 зависят от времени, однако по-прежнему будем называть их инвариантами Коши, как и в случае идеальной жидкости.

Из проведенных выше расчетов следует, что левая часть уравнения (1.4) равна производной по времени от вектора инвариантов Коши:

$$\boldsymbol{S}_t = \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^* \boldsymbol{r}_{tt}), \tag{1.8}$$

поэтому (1.4) можно записать в виде

$$\boldsymbol{S}_t = -\nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^* \operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} (\operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{r}_t)). \tag{1.9}$$

Для учета вязкости в рамках данного подхода правую часть уравнения (1.9) следует продифференцировать по лагранжевым координатам. Используем тождество, представляющее собой операцию ротора при переходе от одних переменных к другим [7]:

$$\operatorname{rot}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A} = \frac{R}{D_0} \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^* \boldsymbol{A}). \tag{1.10}$$

Здесь $\boldsymbol{A}$ — произвольный вектор; $D_0 = \det R$ — якобиан преобразования. В частном случае, если положить $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}_t$, из (1.10) следует формула

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{R}{D_0} \boldsymbol{S}.$$

При совпадении начальных положений жидких частиц с лагранжевыми координатами эта формула, очевидно, переходит в соотношения (1.7).

Для записи уравнения (1.9) в лагранжевой форме используем дважды тождество (1.10). В итоге получим следующее уравнение:

$$\operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R^* \boldsymbol{r}_{tt}) = -\nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (D_0^{-1} R^* \hat{R} \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (D_0^{-1} R^* R \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (R \boldsymbol{r}_t))).$$

Учитывая соотношения (1.7), (1.8) и вводя новую матрицу:

$$g = R^* R, \qquad g = g_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

$$g_{11} = X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2, \qquad g_{12} = g_{21} = X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b,$$

$$g_{22} = X_b^2 + Y_b^2 + Z_b^2, \qquad g_{13} = g_{31} = X_a X_c + Y_a Y_c + Z_a Z_c,$$

$$g_{33} = X_c^2 + Y_c^2 + Z_c^2, \qquad g_{23} = g_{32} = X_b X_c + Y_b Y_c + Z_b Z_c,$$

получим уравнение для инвариантов Коши

$$\boldsymbol{S}_t = -\nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (D_0^{-1} g \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (D_0^{-1} g \boldsymbol{S})). \tag{1.11}$$

Детерминант D_0 совпадает с правой частью уравнения неразрывности. Если в качестве лагранжевых координат выбрать начальные положения частиц, то детерминант будет равен единице, при этом вид уравнения (1.11) упрощается:

$$\boldsymbol{S}_t = -\nu \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (g \operatorname{rot}_{\boldsymbol{a}} (g \boldsymbol{S})). \tag{1.12}$$

Уравнения (1.5) и (1.12) — новая форма уравнений гидродинамики для течений вязкой жидкости. Следует отметить, что дифференциальное уравнение (1.5) в этой системе уравнений такое же, как и для идеальной жидкости. В результате преобразований произошло разделение временных масштабов: инерционных, описываемых уравнением (1.5), и вязких, описываемых уравнением (1.12).

В случае двумерного течения уравнение (1.12) несколько упрощается. Вектор инвариантов Коши имеет только одну компоненту, направленную, например, по оси c (в данном случае $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_3$). Кроме того, будем учитывать, что

$$g_{ij} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_3,$$

так что уравнение (1.12) в итоге принимает следующий вид (индекс 3 опускаем):

$$S_t\boldsymbol{c}^0 = -\nu\,\mathrm{rot}_{\boldsymbol{a}}\,\Big(D_0^{-1}g\Big(\boldsymbol{a}^0\,\frac{\partial}{\partial b}\,D_0^{-1}S - \boldsymbol{b}^0\,\frac{\partial}{\partial a}\,D_0^{-1}S\Big)\Big). \tag{1.13}$$

Здесь $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{b}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ — единичные векторы лагранжевой системы координат. В скалярной форме уравнение (1.13) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} S_t = \{(D_0^{-1}g_{11}(D_0^{-1}S)_b - D_0^{-1}g_{12}(D_0^{-1}S)_a)_b - (D_0^{-1}g_{21}(D_0^{-1}S)_b - D_0^{-1}g_{22}(D_0^{-1}S)_a)_a\}, \\ g_{11} = X_a^2 + Y_a^2, \qquad g_{12} = g_{21} = X_aX_b + Y_aY_b, \qquad g_{22} = X_b^2 + Y_b^2, \\ D_0 = X_aY_b - X_bY_a. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Здесь нижние индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным. Отметим, что в силу уравнения неразрывности величина D_0 не зависит от времени. Также формулы (1.13), (1.14) упрощаются, если положить $D_0 = 1$.

Уравнения (1.12) и (1.14) эквивалентны системе уравнений (1), (2), но не содержат давления. Его следует вычислять отдельно, подставляя решение уравнений (1.12) или (1.14) в систему уравнений (1), (2).

2. Примеры течений. Обе формы вязкого уравнения весьма непривычны, поэтому имеет смысл протестировать их на некоторых конкретных примерах. В качестве таких примеров выберем известные точные решения, допускающие явное аналитическое представление в переменных Лагранжа. Два из них соответствуют прямолинейным траекториям жидких частиц, и два — круговым.

2.1. *Течения с прямолинейными траекториями жидких частиц.* Пусть плоская стенка, ранее покоившаяся, внезапно начинает двигаться в своей плоскости с постоянной скоростью U_0 (первая задача Стокса). Определим течение, вызываемое таким движением.

Положим, что стенка совпадает с плоскостью xz и движется в направлении оси x. Решение будем искать в виде

$$X = a + f(b,t), \qquad Y = b, \quad Z = c. \tag{2.1}$$

Это решение удовлетворяет уравнению неразрывности при произвольной функции f. Однако уравнение для инвариантов Коши накладывает ограничения на ее выбор. Выражения для R, $\boldsymbol{S}$, g записываются следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & f_b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_{tb} \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & f_b & 0 \\ f_b & 1+f_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (1.12), найдем искомое уравнение для функции f:

$$f_{ttb} = \nu f_{tbbb}.$$

Проинтегрируем это уравнение по лагранжевой переменной:

$$f_{tt} = \nu f_{tbb} + \lambda(a,t). \tag{2.3}$$

Из уравнений (2) нетрудно определить, что $\lambda(a,t) = -\rho^{-1}p_a$. Будем считать, что давление во всем пространстве постоянно. Тогда $\lambda = 0$, а выражение (2.3) имеет смысл уравнения теплопроводности для горизонтальной скорости $X_t = f_t = u(b,t)$. В случае внезапного (при $t = 0$) начала движения стенки со скоростью U_0 решением этого уравнения является выражение

$$u = U_0\,\mathrm{erfc}\,\eta, \qquad \eta = b/(2\sqrt{\nu t}\,),$$

$$\operatorname{erfc}\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\eta}^{\infty}\exp(-\eta^2)\,d\eta = 1 - \operatorname{erf}\eta = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\eta}\exp\left(-\eta^2\right)d\eta.$$

Единственный ненулевой инвариант Коши для данного течения равен

$$S_3 = \frac{U_0}{\sqrt{\pi\nu t}}\exp\Big(-\frac{b^2}{4\nu t}\Big)$$

и зависит от времени.

Пусть неограниченная плоская стенка совершает в своей плоскости прямолинейные гармонические колебания с частотой ω (вторая задача Стокса). Как и в задаче, рассмотренной выше, будем полагать, что ось x направлена вдоль стенки, а ось y — перпендикулярно ей. Движение жидкости по-прежнему будем описывать выражениями (2.1), а давление внутри нее считать однородно распределенным ($\lambda = 0$). Так как жидкость прилипает к стенке, для горизонтальной скорости $u(b,t)$ на ее поверхности выполняется условие $u(b,t)\big|_{b=0} = u(0,t) = U_0\cos\omega t$, которое является граничным условием для уравнения (2.3). Уравнению (2.3) с данным граничным условием удовлетворяет следующее выражение:

$$u(b,t) = U_0\,\mathrm{e}^{-kb}\cos\left(\omega t - kb\right), \qquad k = \sqrt{\omega/(2\nu)}.$$

Таким образом, частицы жидкости вблизи стенки совершают колебательное движение с убывающей по мере удаления от стенки амплитудой $U_0\exp\left(-kb\right)$, причем колебания слоя жидкости, находящегося на расстоянии b от стенки, отстают по фазе от колебаний стенки на величину $b\sqrt{\omega/(2\nu)}$.

Для данного типа течения инвариант Коши равен

$$S_3 = kU_0\,\mathrm{e}^{-kb}[\cos\left(\omega t - kb\right) - \sin\left(\omega t - kb\right)].$$

Уравнения (1.12) не включают давление. Для его вычисления необходимо каждый раз решать традиционные уравнения движения в лагранжевых переменных. В этом смысле уравнения (1.12) неполны.

2.2. *Течения с круговыми траекториями жидких частиц.* Рассмотрим течение между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися с различными, но постоянными угловыми скоростями. Пусть радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны соответственно R_1 и R_2, а угловые скорости их вращения — ω_1 и ω_2. Такое движение жидкости удобнее рассматривать в полярной системе координат. Эйлеровы полярные координаты обозначим R_*, Φ, а лагранжевы — r, φ, так что

$$X = R_*\cos\Phi, \qquad Y = R_*\sin\Phi, \qquad a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi.$$

Рассмотрим течения с круговыми линиями тока, когда

$$R_* = r, \qquad \Phi = \varphi + f(r,t), \qquad p = p(r,t). \tag{2.4}$$

Записывая систему уравнений (1), (2) в переменных $R_*(r,\varphi)$, $\Phi(r,\varphi)$ и подставляя в нее соотношения (2.4), получим следующие условия выбора f:

$$\begin{gathered} \rho r f_t^2 = \frac{dp}{dr}, \\ r f_{tt} = \nu(r f_{trr} + 3 f_{tr}). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Поскольку f_t — угловая скорость вращения жидких частиц, граничные условия для этой системы имеют вид

$$f_t = \omega_1 \quad \text{при} \quad r = R_1, \qquad f_t = \omega_2 \quad \text{при} \quad r = R_2. \tag{2.6}$$

Будем считать f линейной функцией времени. Тогда выражение для этой функции, удовлетворяющее условиям (2.6), имеет вид

$$f_t = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) r^2}.$$

Инвариант Коши для этого течения равен

$$S_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_t) = \frac{2(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}$$

и не зависит от времени в силу стационарности течения. Тот же результат можно получить более простым способом, вычислив завихренность.

Подставляя выражение

$$f_t = \frac{\Gamma_0}{2\pi r^2} \Big[1 - \exp\Big(-\frac{r^2}{4\nu t}\Big)\Big] \qquad (2.7)$$

в уравнение (2.5), можно убедиться, что оно является точным решением этого уравнения, описывающим диффузию завихренности от вихревой нити с начальной циркуляцией Γ_0 [8].

Для течения (2.7) инвариант Коши, вычисляемый по формуле (1.5), равен

$$S_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_t) = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} \exp\Big(-\frac{r^2}{4\nu t}\Big).$$

В начальный момент ($t = 0$) величина S_3 имеет особенность (завихренность равна бесконечности). Впоследствии точечный вихрь все более расплывается. Завихренность в месте первоначального расположения вихря становится конечной, но она по-прежнему максимальна в области течения в данный момент времени.

Инвариант S_3 увеличивается в случае сходящегося течения и уменьшается в случае расходящегося. Кроме того, инвариант S_3 совпадает со значением завихренности в точке, где находится данная жидкая частица.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. Т. 1.
2. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.
3. **Gerber R.** Sur la reduction a un principe variationnel des equations du movement d'un fluide visqueux incompressible // Ann. Inst. Fourier. 1949. N 1. P. 157–162.
4. **Монин А. С.** О лагранжевых уравнениях гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 2. С. 320–327.
5. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. С. 5–75.
6. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
7. **Андреев В. К.** Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 10/III 2006 г.,
в окончательном варианте — 2/V 2006 г.