ОТСКОК ЖЕСТКОГО ТЕЛА, ПАДАЮЩЕГО НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

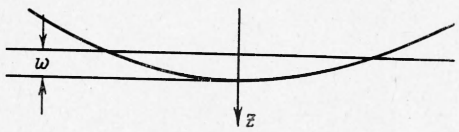
И. В. Симонов, Л. М. Флитман

(Москва)

Излагается приближенное решение задачи об отскоке жесткого массивного тела с гладкой поверхностью, падающего на упругое полупространство. Приведены результаты расчета.

1. Жесткое тело массы m с гладкой выпуклой поверхностью, не вращаясь, падает на упругое полупространство со скоростью v_0, направленной перпендикулярно границе. Форма тела предполагается такой, что площадка контакта имеет неподвижный центр симметрии, а центр инерции тела лежит на нормали к полупространству, проведенной через центр площадки контакта. Трение между средой и телом отсутствует.

Обозначим $w\ (t)$ смещение центра инерции тела относительно положения, которое он занимал в момент соприкосновения со средой. Будем предполагать w малым по сравнению с главными радиусами кривизны поверхности тела в области контакта.



Фиг. 1

Задача состоит в определении $w\ (t)$ и, в частности, скорости отскока, если он произойдет. Для $w\ (t)$ имеем уравнение

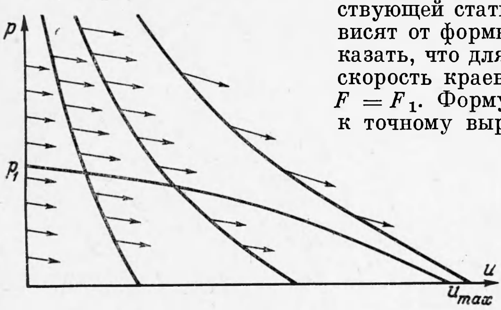
$$mw^{\cdot\cdot} = F \qquad (w\ (0) = 0,\ w^{\cdot}\ (0) = v_0) \qquad (1.1)$$

Здесь F — равнодействующая нормальных напряжений на площадке контакта, зависящая от w. Для определения F нужно решить динамическую задачу о вдавливании штампа с гладкой поверхностью в упругое полупространство по произвольному закону $w\ (t)$. Решение этой задачи неизвестно. Приближенно полагаем

$$F = F_1 + F_2 \qquad (F_1 = -\rho a \Omega\ (w)\ w^{\cdot},\ F_2 = -kw^{\alpha}) \qquad (1.2)$$

Здесь ρ — плотность среды, a — скорость продольных волн, Ω — площадь контакта; через F_2 обозначена равнодействующая контактных напряжений в соответствующей статической задаче [1]; постоянные k и α зависят от формы тела и параметров среды. Можно показать, что для начального этапа вдавливания, когда скорость краев площадки контакта больше a, будет $F = F_1$. Формула (1.2) будет хорошим приближением к точному выражению равнодействующей в начальный период движения, когда скорость вдавливания велика, а смещение мало, и в моменты, близкие к остановке, когда скорость мала. Аналогичное приближение для равнодействующей контактных напряжений получается из точного решения задачи о вдавливании полосы в упругое полупространство [2]. Из (1.1) и (1.2) получаем

$$mw^{\cdot\cdot} + a\rho\Omega\ (w)\ w^{\cdot} + kw^{\alpha} = 0 \qquad (1.3)$$



Фиг. 2

Условие прекращения контакта тела со средой, очевидно, состоит в том, что $F = 0$ или, что то же

$$w^{\cdot\cdot} = 0 \qquad (1.4)$$

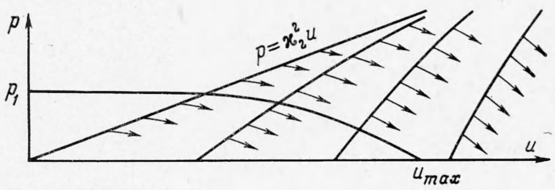
Если падающее тело шар радиуса R, то [1]

$$\Omega\ (w) = 2\pi Rw, \qquad k = 4E\sqrt{R}\ /\ 3\ (1 - \nu^2) \qquad (1.5)$$

Введем безразмерные величины $u = w\ /\ R$, $\tau = at\ /\ R$. Из (1.3) получим для u нелинейное уравнение

$$u'' + 0.5\varkappa_1 u\ (u' + \varkappa_2 \sqrt{u}) = 0$$
$$\varkappa_1 = 3M, \quad M = \rho\ /\ \rho$$
$$\varkappa_2 = 8\gamma^2\ (1 - \gamma^2)\ /\ 3\pi)$$
$$u\ (0) = 0, \qquad u'\ (0) = u_0 \qquad (1.6)$$

Здесь ρ_0 — средняя плотность шара, γ — отношение скоростей поперечных и продольных волн; штрих—дифференцирование по τ.



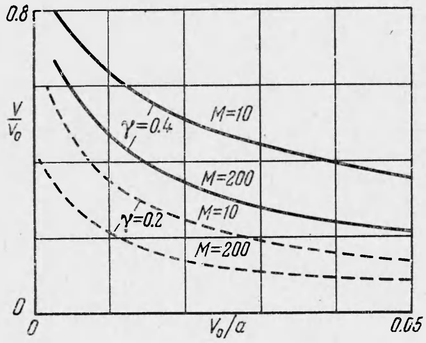
Фиг. 3

2. Уравнение (1.6) допускает понижение порядка. Обозначая, $p = (u')^2$, получим

$$\frac{dp}{du} = -\varkappa_1 u\,(\varkappa_2 \sqrt{u} \pm \sqrt{p}), \qquad p(0) = u_0^2 \tag{2.1}$$

При этом знак плюс берется, когда тело движется в глубь среды, а минус — при движении в противоположном направлении. Условие отскока (1.4) приобретает вид

$$dp/du = 0 \tag{2.2}$$



Фиг. 4

На фиг. 2 изображены поле направлений и интегральная кривая уравнения (2.1) при движении в глубь среды. Обратному движению соответствует фиг. 3. Интегральные кривые возвратного движения прерываются на прямой $p = \varkappa_2^2 u$, так как точки этой прямой соответствуют состояниям, когда прекращается контакт тела со средой (отскок).

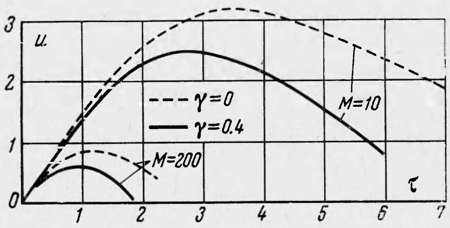
Интересно отметить, что контакт прекращается при $u \neq 0$, т. е. до того как точки среды вернулись к невозмущенному состоянию. Исследование показало, что при прочих равных условиях, чем больше радиус шара, тем скорость отскока меньше, или что то же, массивное тело отскакивает с большой скоростью, скорость отскока возрастает с ростом $\gamma = \sqrt{\mu / (\lambda + 2\mu)}$. На фиг. 4 дана зависимость коэффициента восстановления v_1 / v_0 (v_1 — скорость отскока) от относительной скорости падения v_0 / a. Из графиков следует, что при малых v_0 / a коэффициент восстановления близок к единице, т. е. доля энергии, передаваемая в среду, мала. Однако при $v_0 / a = 0.05$ доля энергии, идущая на колебания полупространства, составляет для принятых в расчете параметров M и γ 85—99%.

Фиг. 5

В интервале значений v_0 / a от 0.001 до 0.05 и для данных величин M и γ энергия, идущая на колебания среды, и энергия, аккомулированная в шаре при отскоке, отличаются мало по порядку величины.

Это согласуется с результатами, изложенными в [3,4], где указывается, что процесс соударения можно считать квазистатическим лишь при $(v_0 / a)^{1/5} \ll 1$.

На фиг. 5 приведены графики зависимости относительной текущей скорости v / a от относительного времени $\tau = at / R$, а на фиг. 6 — относительного смещения u / R в зависимости от τ (везде при $v_0 / a = 0.015$, $\gamma = 0.2$, $\gamma = 0.4$).



Фиг. 6

Сравнение расчета с результатами эксперимента, в которых твердое тело сбрасывалось на сухой грунт, показало, что расчетные данные будут верхней гранью таких значений параметров соударения как скорость отскока и перегрузка, т. е. изложенная теория предсказывает более «жесткий» удар; различие является следствием главным образом пластических деформаций, возникающих в грунте при ударе.

Поступила 10 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, 1953.
2. Флитман Л. М. О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.
4. Hunter S. C. Energy absorbed by elastic Waves during Impact. J. Mech. Phys. Solids, 1957, N 5.