

УДК 519.6

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОНКОГО КРЫЛА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск

Задаче о движении твердого тела в стратифицированной жидкости посвящено большое число работ [1–3], но в них исследовалось бесциркуляционное обтекание симметричных тел: цилиндров, шаров и т. п.

В настоящей работе рассматривается плоская задача обтекания крыла с острой кромкой с учетом вихревого следа за ним. Крыло моделируется бесконечно тонкой пластиной. Как и в однородной жидкости, вихревой след за крылом заменяется линией контактного разрыва скорости.

Сформулирована начальная-краевая задача для функции тока, решение которой ищется в виде логарифмического динамического потенциала [4] с неизвестной плотностью. Для определения плотности потенциала получены сингулярное интегральное уравнение на пластине и соотношение в следе. Показана однозначная разрешимость полученных уравнений при больших числах Фруда, при этом классическая формула Жуковского для подъемной силы остается справедливой и для тонкого крыла в слабостратифицированной жидкости. Найдено численное решение задачи, и исследована зависимость стационарных подъемной силы и момента, а также нестационарных гидродинамических сил, действующих на крыло, от входных параметров.

Численное решение и полученная асимптотика при больших числах Фруда свидетельствуют о том, что подъемная сила крыла в стратифицированной жидкости немонотонно зависит от числа Фруда. При больших числах Фруда подъемная сила в стратифицированной жидкости меньше, чем в однородной, а при малых — больше. Момент при этом стремится к нулю с уменьшением числа Фруда, т. е. центр давления смещается к середине крыла. Полученные результаты свидетельствуют о том, что наличие стратификации может оказать существенное влияние на гидродинамические характеристики крыла.

1. Плоские малые возмущения несжимаемой невязкой стратифицированной жидкости в декартовой системе координат  $(x_1, x_2)$  описываются системой уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } p + \mathbf{e}_2 g \rho_1 = 0, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho'_0(x_2)v_2 = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — вектор скорости;  $\rho_0(x_2)$  — плотность в невозмущенном состоянии;  $\rho_1$  — возмущение плотности;  $p$  — возмущенное давление;  $\mathbf{e}_2$  — орт оси  $Ox_2$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. Предполагается, что стратификация слабая и имеет экспоненциальный характер:

$$\rho_0(x_2) = \rho_* \exp(-\beta x_2), \quad \beta = \text{const} \ll 1.$$

Вводя функцию тока  $\psi(x)$ , из системы (1.1) можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta \psi - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + g \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0.$$

Предположим, что размеры крыла малы по сравнению с характерным размером стратификации, т. е.  $b \ll 1/\beta$  ( $b$  — хорда крыла). Тогда можно использовать приближение Буссинеска и пренебречь членом  $\beta \psi'_{x_2}$ . В результате получим уравнение Соболева:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1.2)$$

( $\omega_0^2 = -g \rho'_0 / \rho_0$  — частота Брента — Вьясяля).

Крыло будем моделировать бесконечно тонкой пластиной длиной  $2c$  ( $c$  — полухорда крыла, которая расположена горизонтально и движется с постоянной скоростью  $V$ ). При этом жидкость остается невозмущенной. В момент времени  $t = 0$  крыло занимает отрезок  $l_0 = (-c, c)$  оси  $Ox_1$  и начинает совершать малые колебания по заданному закону

$$v_2(\sigma, t) = f(\sigma, t) \quad (1.3)$$

( $\sigma$  — дуговая координата на крыле).

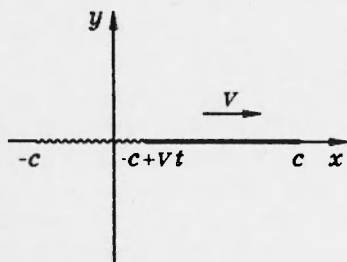


Рис. 1

В момент времени  $t = 0$  с крыла начинает сходить вихревая пелена, которую, как и в однородной жидкости, будем моделировать линией тангенциального разрыва скорости. В некоторый момент времени  $t$  крыло будет занимать положение  $l_{0t} = (-c + Vt, c + Vt)$ , а вихревая пелена  $l_{1t} = (-c, -c + Vt)$  (рис. 1).

Движение жидкости удовлетворяет, таким образом, уравнению (1.2) вне контура  $l_t$  при  $t > 0$ , начальным условиям

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (1.4)$$

а также следующим граничным условиям: условию непротекания на крыле (1.3), условиям на линии тангенциального разрыва  $l_{1t}$

$$[v_2] = 0, \quad [p] = 0, \quad (1.5)$$

условиям Кутта — Жуковского в задней кромке. Здесь квадратные скобки означают разность предельных величин сверху и снизу от контура.

Кроме того, функция  $\psi(\mathbf{x}, t)$  должна удовлетворять условиям регулярности на бесконечности:

$$|\nabla \psi| = O(r^{-2}), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

а также условию в передней кромке

$$|\nabla \psi| = O(r_1^{-\delta}), \quad 0 < \delta < 1 \quad (1.7)$$

( $r_1$  — расстояние до передней кромки). Условия регулярности (1.6) и (1.7) физически означают конечность энергии.

2. В [4] для уравнения (1.2) был введен логарифмический динамический потенциал. В общем случае этот потенциал справедлив только для неподвижной границы. Однако в данном случае крыла со следом он тоже применим. Будем искать решение задачи (1.2)–(1.7) в виде логарифмиче-

ского динамического потенциала

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{l_t} \mu(\xi, t) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\xi)| d\xi + \int_0^t d\sigma \int_{l_\sigma} \mu(\xi, \sigma) \frac{1}{t - \sigma} \left[ 1 - \cos \left( \omega_0(t - \sigma) \frac{x_2 - y_2(\xi)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\xi)|} \right) \right] d\xi, \quad (2.1)$$

где  $\mu(\xi, t)$  — неизвестная плотность;  $l_t = l_{0t} \cup l_{1t}$ .

Функция  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , определенная формулой (2.1), удовлетворяет уравнению (1.2) вне контура  $l_t$ , что можно проверить непосредственно. Задняя точка контура  $l_t$  неподвижна, в ней никаких особенностей не возникает, а в передней точке допускается бесконечность скорости вида (1.7).

Из (1.4) следует

$$\mu(\xi, 0) = \mu_t(\xi, 0) = 0. \quad (2.2)$$

Первое из условий (1.5) выполнено в силу представления (2.1). Рассмотрим второе условие. Вычислим разрыв касательной скорости на контуре  $l_t$ . Из (2.1) имеем

$$v_1(\mathbf{x}, t) = \int_{l_t} \mu(\xi, t) \frac{x_2}{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2} d\xi + \omega_0 \int_0^t d\sigma \int_{-c}^{c+V\sigma} \mu(\xi, \sigma) \frac{(x_1 - \xi)^2}{[(x_1 - \xi)^2 + x_2^2]^{3/2}} \sin \left( \omega_0 \frac{(t - \sigma)x_2}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2}} \right) d\xi.$$

Первый интеграл представляет собой нормальную производную потенциала простого слоя [5], а во втором интеграле сделаем замену переменных  $\xi - x_1 = \eta|x_2|$ . При  $|x_2| \rightarrow 0$  для разрыва касательной скорости  $[v_1(\xi, t)] = v_1(\xi + 0, t) - v_1(\xi - 0, t)$  получаем

$$[v_1(\xi, t)] = \begin{cases} 2\pi \left[ \mu(\xi, t) + \omega_0 \int_{a(\xi)}^t \mu(\xi, \sigma) G(\omega_0(t - \sigma)) d\sigma \right], & -c < \xi < c + Vt, \\ 0, & \xi < -c, \quad \xi > c + Vt, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $a(\xi) = \max\{0, (\xi - c)/V\}$  — момент времени, в который в точке  $\xi$  возник скачок скорости;

$$G(\omega_0(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^2}{(1 + \eta^2)^{3/2}} \sin \left( \frac{\omega_0 t}{\sqrt{1 + \eta^2}} \right) d\eta = \int_0^{\omega_0 t} \frac{J_1(x)}{x} dx.$$

Из первого уравнения системы (1.1) следует, что на контуре  $l_t$  выполнено соотношение

$$\frac{\partial[v_1]}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_1} [p]. \quad (2.4)$$

Так как в следе  $[p] = 0$ , то скачок касательной скорости в жидкой частице следа не меняется, как и в однородной жидкости:

$$[v_1(\xi, t)] = \left[ v_1 \left( \xi, \frac{\xi + c}{V} \right) \right] \quad \text{при} \quad t > \frac{\xi + c}{V}. \quad (2.5)$$

Здесь  $(\xi + c)/V$  — момент времени, в который через точку  $\xi$  проходит задняя кромка крыла. Подставляя в (2.5) соотношение (2.3), получим

$$\begin{aligned} \mu(\xi, t) + \omega_0 \int_{a(\xi)}^t \mu(\xi, \sigma) G(\omega_0(t - \sigma)) d\sigma = \\ = \mu\left(\xi, \frac{\xi + c}{V}\right) + \omega_0 \int_{a(\xi)}^{\frac{\xi + c}{V}} \mu(\xi, \sigma) G\left(\omega_0\left(\frac{\xi + c}{V} - \sigma\right)\right) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Обозначим  $\tau = t - (\xi + c)/V$ , тогда (2.6) представим как

$$\begin{aligned} \mu\left(\xi, \frac{\xi + c}{V} + \tau\right) + \omega_0 \int_0^\tau \mu\left(\xi, \sigma + \frac{\xi + c}{V}\right) G(\omega_0(\tau - \sigma)) d\sigma = \mu\left(\xi, \frac{\xi + c}{V}\right) + \\ + \omega_0 \int_{a(\xi)}^{\frac{\xi + c}{V}} \mu(\xi, \sigma) G\left(\omega_0\left(\frac{\xi + c}{V} - \sigma\right)\right) d\sigma - \omega_0 \int_{a(\xi)}^{\frac{\xi + c}{V}} \mu(\xi, \sigma) G(\omega_0(t - \sigma)) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Оператор левой части интегрального уравнения (2.7) запишем в виде  $I + \omega_0 G*$  ( $G*$  — оператор свертки с функцией  $G$ ,  $I$  — единичный оператор). Обратный к нему оператор найден в [4]:

$$(I + \omega_0 G*)^{-1} = I + \omega_0 J_1* \quad (2.8)$$

( $J_1*$  — оператор свертки с функцией Бесселя  $J_1(\omega_0\tau)$ ). Из (2.7) получим представление для плотности потенциала в следе через плотность на крыле:

$$\begin{aligned} \mu(\xi, t) = \left[ \mu\left(\xi, \frac{\xi + c}{V}\right) + \omega_0 \int_{a(\xi)}^{\frac{\xi + c}{V}} \mu(\xi, \sigma) G\left(\omega_0\left(\frac{\xi + c}{V} - \sigma\right)\right) d\sigma \right] J_0\left(\omega_0\left(t - \frac{\xi + c}{V}\right)\right) - \\ - \omega_0 \int_{a(\xi)}^{\frac{\xi + c}{V}} \mu(\xi, \sigma) \left[ J_1(\omega_0(t - \sigma)) + \omega_0 \int_0^{\frac{\xi + c}{V} - \sigma} J_1(\omega_0(t - \tau - \sigma)) G(\omega_0\tau) d\tau \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для стратифицированной жидкости справедлива теорема Бьеркнеса, которая в линейном приближении имеет вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_l \frac{dp}{\rho_0}$$

Здесь  $\Gamma(t)$  — циркуляция скорости по жидкому контуру  $l$ . Применяя ее к контуру  $l_t = l_{0t} + l_{1t}$  и учитывая, что вдоль  $l_t$   $\rho_0 = \text{const}$ , получаем, что  $d\Gamma/dt = 0$ . Представим  $\Gamma(t)$  в виде  $\Gamma(t) = \Gamma_0(t) + \Gamma_1(t)$ , где  $\Gamma_0(t)$  и  $\Gamma_1(t)$  — соответственно циркуляции скорости по контурам  $l_{0t}$  и  $l_{1t}$ :

$$\Gamma_0 = \int_{l_{0t}} [v_1(\xi, t)] d\xi, \quad \Gamma_1(t) = \int_{-c}^{-c+Vt} [v_1(\xi, t)] d\xi.$$

Дифференцируя теперь по  $t$  и учитывая, что в следе  $[v_{1t}] = 0$ , находим соотношение

$$[v_1(-c + Vt, t)] = -\frac{1}{V} \frac{d\Gamma_0}{dt}(t), \quad (2.10)$$

которое для скачка скорости в задней кромке имеет точно такой же вид, как и в однородной жидкости.

Подставляя (2.3) в (2.10), получим представление для плотности потенциала в задней кромке через плотность на крыле:

$$\begin{aligned} \mu(-c + Vt, t) = & -\frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_{-c+Vt}^{c+Vt} \mu(\xi, t) d\xi - \omega_0 \int_{a(t-2c/V)}^t \mu(-c + Vt, \sigma) G(\omega_0(t - \sigma)) d\sigma - \\ & - \frac{\omega_0}{V} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-c+Vt}^{c+Vt} d\xi \int_{a(\xi)}^t \mu(\xi, \sigma) G(\omega_0(t - \sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

Чтобы обеспечить условие регулярности на бесконечности (1.6), необходимо выполнить условие

$$C(t) \equiv \int_{L_t} \mu(\xi, t) d\xi = 0.$$

Из (2.3), меняя порядок интегрирования, находим

$$\Gamma(t) = C(t) + \omega_0 \int_0^t C(t) G(\omega_0(t - \sigma)) d\sigma.$$

Так как  $\Gamma(t) \equiv 0$ , из (2.8) следует, что  $C(t) \equiv 0$ .

Перейдем теперь в систему координат  $(X_1, X_2)$ , связанную с крылом формулами

$$x_1 = X_1 + Vt, \quad x_2 = X_2.$$

Определим функцию тока возмущенного течения  $\Psi(X, t) = \psi(x_1 + Vt, x_2, t)$ . Крыло в этой системе координат неподвижно,  $L_0 = (-c, c)$ , а след в момент времени  $t$  занимает положение  $L_{1t} = (-c - Vt, -c)$ ,  $L_t = L_0 \cup L_{1t}$ . Положим  $\nu(\xi, t) = \mu(\xi + Vt, t)$ . Тогда для функции тока  $\Psi(X, t)$  справедливо представление

$$\begin{aligned} \Psi(X, t) = & \int_{L_t} \nu(\xi, t) \ln |X - Y(\xi)| d\xi + \\ & + \int_0^t d\sigma \int_{L_\sigma} \nu(s, \sigma) \frac{1}{t - \sigma} \left[ 1 - \cos \left( \omega_0(t - \sigma) \frac{X_2}{|X + V\mathbf{e}_1(t - \sigma) - Y(\xi)|} \right) \right] d\xi. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Из (2.2) вытекает

$$\nu(\xi, t) = \nu_t(\xi, t) = 0, \quad \xi \in L_t.$$

Для скачка касательной скорости на контуре  $L_t$  из (2.3) получаем

$$[u_1(\xi, t)] = 2\pi \left[ \nu(\xi, t) + \frac{\omega_0}{V} \int_{\xi}^c \nu \left( \eta, t + \frac{\xi - \eta}{V} \right) \theta \left( t + \frac{\xi - \eta}{V} \right) G \left( \omega_0 \frac{\eta - \xi}{V} \right) d\eta \right], \quad (2.12)$$

где  $\theta(t)$  — функция Хевисайда.

Соотношение (2.9) для плотности потенциала в следе принимает вид

$$\nu(\xi, t) = \gamma\left(t + \frac{\xi + c}{V}\right) J_0\left(\omega_0 \frac{\xi + c}{V}\right) + h(\xi, t), \quad \xi \in L_{1t}. \quad (2.13)$$

Функция  $\gamma(t)$  имеет, как и в однородной жидкости, смысл скачка скорости в задней кромке

$$\gamma(t) = [u_1(-c, t)] = -\frac{1}{V} \frac{d\Gamma}{dt}$$

и вычисляется через плотность на крыле по формуле

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & -\frac{1}{V} \frac{d}{dt} \int_{-c}^c \nu(\eta, t) d\eta - \\ & -\frac{\omega_0}{V^2} \frac{d}{dt} \int_{-c}^c d\eta \int_{-c}^{\eta} \nu\left(\eta, t + \frac{\xi - \eta}{V}\right) \theta\left(t + \frac{\xi - \eta}{V}\right) G\left(\omega_0 \frac{\xi - \eta}{V}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Функция  $h(\xi, t)$  — добавок, обусловленный стратификацией:

$$\begin{aligned} h(\xi, t) = & -\frac{\omega_0}{V} \int_{-c}^c \nu\left(\eta, t + \frac{\xi - \eta}{V}\right) \left[ J_1\left(\omega_0 \frac{\eta - \xi}{V}\right) + \right. \\ & \left. + \omega_0 \int_0^{\frac{\eta + c}{V}} J_1\left(\omega_0 \left(\frac{\eta - \xi}{V} - \tau\right)\right) G(\omega_0 \tau) d\tau \right] d\eta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из свойств логарифмического динамического потенциала [4] следует, что условие непротекания на крыле принимает очень простой вид:

$$\int_{L_t} \frac{\nu(\xi, t)}{\xi - x} d\xi = f(x, t), \quad x \in L_0. \quad (2.16)$$

Таким образом, для неизвестной плотности потенциала  $\nu(\eta, t)$  на крыле имеем сингулярное интегральное уравнение (2.16) и соотношения (2.13)–(2.15) для плотности потенциала в следе. Заметим, что все полученные формулы при  $\omega_0 = 0$  переходят в соответствующие соотношения для однородной жидкости.

3. Для исследования удобно свести систему уравнений (2.13)–(2.16) к интегральному уравнению Фредгольма. Введем вспомогательную аналитическую функцию

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_t} \frac{\nu(\xi, t)}{\xi - z} d\xi.$$

Из (2.16) вытекает, что она удовлетворяет условиям задачи Римана:

$$\Phi^+(\xi, t) = \Phi^-(\xi, t) + \nu(\xi, t), \quad \xi \in L_{1t},$$

$$\Phi^+(\xi, t) = -\Phi^-(\xi, t) - i\pi f(\xi, t), \quad \xi \in L_0.$$

Учитывая условия (1.7) и условие Жуковского, решение ищем в классе функций, не ограниченных в передней кромке и ограниченных в задней

кромке. Решая эту задачу [6], имеем выражение для плотности потенциала на крыле через плотность потенциала в следе:

$$\nu(s, t) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{c+s}{c-s}} \left( \int_{L_{1t}} \sqrt{\frac{\xi-c}{\xi+c}} \frac{\nu(\xi, t)}{\xi-s} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \sqrt{\frac{c-\xi}{c+\xi}} \frac{f(\xi, t)}{\xi-s} d\xi \right).$$

Подставляя сюда выражения (2.13)–(2.15) для плотности в следе, получим интегральное уравнение для плотности на крыле, в которое время входит как параметр. Применим к функциям  $\nu(\xi, t)$  и  $f(\xi, t)$  преобразование Лапласа по времени:

$$\nu^L(\xi, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \nu(\xi, t) dt.$$

Тогда для функции  $\varkappa(\xi, p) = \nu^L(c\xi, p)$  находим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} \varkappa(\xi, p) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \int_{-1}^1 \varkappa(\eta, p) T(\xi, \eta; z, s_0) d\eta = \\ = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \frac{f^L(c\eta, p)}{\eta-\xi} d\eta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ядро  $T(\xi, \eta; z, s_0)$  зависит от двух безразмерных параметров: от  $z = pc/V$ , который является спектральным в данной задаче, и вещественного параметра  $s_0 = \omega_0 c/V$ , который имеет смысл числа, обратного числу Фруда. Ядро  $T$  после замены  $\xi = -\text{ch } \lambda$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta; z, s_0) = ze^z \left[ 1 + s_0 \int_0^{1+\eta} e^{-z\zeta} G(s_0\zeta) d\zeta \right] \int_0^{\infty} \frac{(1+\text{ch}\lambda)e^{-z\text{ch}\lambda} J_0(s_0(\text{ch}\lambda-1))}{\text{ch}\lambda+\xi} d\lambda + \\ + s_0 \int_0^{\infty} \frac{(1+\text{ch}\lambda)e^{-z\text{ch}\lambda} \left( J_1(s_0(\eta+\text{ch}\lambda)) + s_0 \int_0^{1+\eta} J_1(s_0(\eta+\text{ch}\lambda-x)) G(s_0x) dx \right)}{\text{ch}\lambda+\xi} d\lambda. \end{aligned}$$

Подставляя сюда интегральные представления для функций  $J_1$  и  $J_0$  и учитывая, что

$$\left( \frac{d}{dz} - \xi \right) \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\text{ch}\lambda}}{\text{ch}\lambda+\xi} d\lambda = -K_0(z),$$

где  $K_0$  — функция Макдональда, найдем аналитическое продолжение ядра  $T$  на всю комплексную плоскость:

$$\begin{aligned} T(\xi, \eta; z, s_0) = \frac{ze^z}{\pi} \left[ 1 + s_0 \int_0^{1+\eta} e^{-z\zeta} G(s_0\zeta) d\zeta \right] \times \\ \times \int_0^{\pi} e^{-is_0 \cos \theta} \left\{ K_0(z - is_0 \cos \theta) + (1-\xi) e^{\xi(z - is_0 \cos \theta)} \left[ \frac{2}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{arctg} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \int_0^{z-is_0 \cos \theta} e^{-\xi y} K_0(y) dy \right\} d\theta + \frac{s_0}{i\pi} \int_0^\pi \cos \theta e^{-(z-is_0 \cos \theta)\eta} \times \\
& \times \left[ 1 + s_0 \int_0^{1+\eta} e^{-is_0 x \cos \theta} G(s_0 x) dx \right] \left\{ K_0(z-is_0 \cos \theta) + (1-\xi) e^{\xi(z-is_0 \cos \theta)} \times \right. \\
& \left. \times \left[ \frac{2}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} - \int_0^{z-is_0 \cos \theta} e^{-\xi y} K_0(y) dy \right] \right\} d\theta. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Так как функция  $K_0$  имеет логарифмическую особенность в нуле, то ядро  $T$  аналитично по  $z$  во всей комплексной плоскости, за исключением отрезка мнимой оси  $[-is_0, is_0]$ , и непрерывно по  $z$  и  $s_0$  во всей комплексной плоскости.

Чтобы избавиться от особенности в точке  $\xi = c$ , сделаем замену переменных  $\xi = \cos \alpha$  и введем новую неизвестную функцию  $\mathfrak{a}_1(\alpha, p) = \sqrt{1 - \cos \alpha} \mathfrak{a}(\cos \alpha, p)$ . Тогда получим уравнение Фредгольма с непрерывным ядром на отрезке интегрирования  $\alpha \in [0, \pi]$ :

$$(I + T_1)\mathfrak{a}_1 = f_1; \quad (3.3)$$

$$T_1(\alpha, \beta; z, s_0) = 2T(\cos \alpha, \cos \beta; z, s_0) \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)/\pi, \quad (3.4)$$

$$f_1(\alpha, p) = \sqrt{1 - \cos \alpha} f^L(c \cos \alpha, p).$$

Рассмотрим уравнение Фредгольма (3.3) в классе функций  $L_2[0, \pi]$ . Покажем, что для слабостратифицированной жидкости ( $s_0 \ll 1$ ) уравнение (3.3) не имеет точек дискретного спектра. При  $z = O(s_0)$  из (3.2), (3.4) оператор  $T_1$  является сжимающим,  $\|T_1\| = O(s_0 |\ln(s_0)|)$ .

В случае  $|z| \gg s_0$  главная часть оператора  $T$  при  $\operatorname{Re} z \geq 0$  не зависит от переменной интегрирования  $\eta$  и поэтому легко обращается. В результате получим уравнение

$$(I + s_0^2 T_2)\mathfrak{a}_1 = f_2,$$

где норма оператора  $T_2$  ограничена. Отсюда следует, что при малых  $s_0$  уравнение (3.1) не имеет точек дискретного спектра при  $\operatorname{Re} z \geq 0, |z| \gg s_0$ . При этом из теоремы 7.2 [7, с. 382] следует, что с ростом параметра  $s_0$  точки дискретного спектра могут появиться только на границе области аналитичности ядра, т. е. на отрезке  $[-is_0, is_0]$ .

4. Рассмотрим вопрос об асимптотике решения при больших временах ( $t \rightarrow \infty$ ) для трех случаев: 1) функция  $f(\sigma, t)$  финитна по времени; 2)  $f(\sigma, t) = f_0(\sigma)e^{i\omega t}$  — гармонические колебания крыла с частотой  $\omega$ ; 3)  $f(\sigma, t) = f_0(\sigma)$ , где  $f_0(\sigma)$  — заданная функция, соответствующая, например, движению крыла под малым углом атаки.

В этих случаях правая часть уравнения (3.3) будет вести себя следующим образом. В первом случае функция  $f_1^L(\alpha, p)$  аналитична по  $p$  во всей комплексной плоскости, во втором  $f_1^L(\alpha, p)$  имеет полюс при  $p = i\omega$  и в третьем  $f_1^L(\alpha, p)$  имеет полюс при  $p = 0$ . Так как уравнение (3.3) однозначно разрешимо при малых  $s_0$ , то и решение  $\mathfrak{a}_1(\alpha, p)$  ведет себя по так же, как и  $f_1^L$ , т. е. имеет единственный полюс во втором и третьем случае и аналитично по  $p$  в первом случае.

Асимптотика решения  $\mathfrak{a}_1(\alpha, t)$  при  $t \rightarrow \infty$  теперь находится с помощью теории вычетов. Покажем, что на дугах окружностей  $C_R(|z| = R, \operatorname{Re} z < a)$   $\mathfrak{a}_1(\alpha, z) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  равномерно относительно аргумента  $z$ . Из (3.2)



следует, что существует такое  $A > 0$ , что  $\|T_1\| > A\sqrt{|z|}$  при  $z \in C_R$ . Тогда  $\|(I + T_1)^{-1}\| < 1/(A\sqrt{|z|} - 1)$ . Отсюда по лемме Жордана [8] имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \alpha_1(\alpha, p) e^{pt} dt = 0 \quad \text{при } t > 0.$$

Так как ядро  $T_1$  непрерывно по  $z$  на отрезке  $[-is_0, is_0]$ , то при малых  $s_0$  обратный оператор  $(I + T_1)^{-1}$  также непрерывен. Отсюда вытекает, что в первом случае  $\alpha_1(\alpha, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а следовательно,  $\Psi(X, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , т. е. возмущения затухают со временем, во втором  $\nu(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \nu_*(x) e^{i\omega t}$ , т. е. в системе координат, связанной с крылом, наблюдается установившийся колебательный режим  $\Psi(X, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Psi_*(X) e^{i\omega t}$ , а в третьем  $\nu(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \nu_*(x)$ , т. е. происходит стабилизация течения.

5. Найдем выражения для подъемной силы и момента, действующих на крыло в стратифицированной жидкости. Перепад давления на крыле можно вычислить из уравнения (2.4), которое в системе координат, связанной с крылом, имеет вид

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial [p]}{\partial x} = \frac{\partial [u_1]}{\partial t} - V \frac{\partial [u_1]}{\partial x}.$$

Так как в задней кромке  $[p] = 0$ , то, используя (2.10), имеем

$$[p(x, t)] = \rho_0 V \left( [u_1(x, t)] + \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \int_x^c [u_1(\xi, t)] d\xi \right). \quad (5.1)$$

Подъемная сила и момент далее находятся по формулам

$$Y(t) = - \int_{-c}^c [p(x, t)] dx; \quad (5.2)$$

$$M(t) = - \int_{-c}^c x [p(x, t)] dx. \quad (5.3)$$

Из (5.1), (5.2) следует, что для установившегося движения тонкого крыла под малым углом атаки в слабостратифицированной жидкости классическая формула Жуковского для подъемной силы остается справедливой:

$$Y = -\rho_0 V \Gamma. \quad (5.4)$$

Подставляя в (5.1)–(5.3) выражение (2.12) для скачка скорости, получим следующие формулы для силы и момента в случае гармонических колебаний крыла:

$$Y = Y_* e^{i\omega t}, \quad M = M_* e^{i\omega t}, \quad \alpha(\eta, t) = \alpha_*(\eta) e^{i\omega t};$$

$$Y_* = -2\pi \rho_0 V c \left[ (1 + is) \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta) d\eta + is \int_{-1}^1 \eta \alpha_*(\eta) d\eta + s_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta) d\eta \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\eta+1} e^{-isx} G(s_0 x) dx + iss_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta) d\eta \int_0^{\eta+1} (1 + \eta - x) e^{-isx} G(s_0 x) dx \right]; \quad (5.5)$$

$$M_* = -2\pi\rho_0 V c^2 \left[ \int_{-1}^1 \eta \alpha_*(\eta) d\eta - \frac{is}{2} \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta)(1-\eta^2) d\eta + s_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta) d\eta \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\eta+1} (\eta-x) e^{-isx} G(s_0 x) dx + iss_0 \int_{-1}^1 \int_{\xi}^1 \int_{\zeta}^1 \alpha_*(\eta) e^{is(\zeta-\eta)} G(s_0(\eta-\zeta)) d\eta \right]. \quad (5.6)$$

Здесь  $s = \omega c/V$  — число Струхала. Первые два члена в формулах (5.5), (5.6) такие же, как и в однородной жидкости, а последние члены определяют влияние стратификации. Эти формулы справедливы и для установившегося обтекания крыла при  $s = 0$ .

Найдем асимптотику подъемной силы крыла при его установившемся движении под малым углом атаки для малых значений  $s_0$ . Раскладывая в ряд ядро (3.2) интегрального уравнения при  $z = 0$  и  $s_0 \ll 1$ , имеем

$$T(\xi, \eta; 0, s_0) = s_0 T_{01} + s_0^2 \ln s_0 T_{02} + \dots,$$

где

$$T_{01} = 1; \quad T_{02} = -\frac{1}{2}(\eta + 1 - \xi).$$

При движении крыла под малым углом атаки  $\alpha$  смещение крыла задается соотношением  $x_2 = \alpha x_1$ . Тогда вертикальная скорость на крыле

$$f(x_1, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \dot{v} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) x_2 = -V\alpha,$$

и, значит,

$$f^L(x, p) = -\frac{V\alpha}{p}.$$

Методом последовательных приближений из интегрального уравнения Фредгольма находим

$$\alpha = \alpha_0 + s_0 \alpha_1 + s_0^2 \ln s_0 \alpha_2 + \dots,$$

где

$$\alpha_0(\xi) = -V\alpha \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}},$$

а функции  $\alpha_1, \alpha_2$  определяются формулами

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \int_{-1}^1 T_{01}(\xi, \eta) \alpha_0(\eta) d\eta, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \int_{-1}^1 T_{02}(\xi, \eta) \alpha_0(\eta) d\eta.$$

Подставляя теперь эти выражения в формулу (5.5) при  $s = 0$ , получим асимптотику подъемной силы при малых  $s_0$ :

$$Y = 2\pi\rho_0 c V^2 \alpha (1 - s_0 + s_0^2 \ln s_0). \quad (5.7)$$

Первый член в этой формуле соответствует однородной жидкости, а остальные члены определяют влияние стратификации. Так как  $\ln s_0 < 0$  при  $s_0 < 1$ , то следующие два члена дают снижение подъемной силы по сравнению с однородной жидкостью. На первый взгляд это кажется неожиданным, так как снизу от крыла находится более плотная жидкость. Однако при слабой стратификации влияние изменения плотности на крыле

оказывается несущественным. Как следует из формулы (5.4), подъемная сила крыла определяется циркуляцией скорости.

Физическое объяснение уменьшения циркуляции скорости вокруг крыла может быть следующее. Схема течения однородной жидкости вокруг крыла под углом атаки приведена на рис. 2, линией  $l$  показана разделяющая линия тока. В стратифицированной жидкости не все частицы могут преодолеть барьер, поэтому разделяющая линия тока сдвигается к передней кромке. Значит, сверху крыла скорость жидкости меньше, а снизу больше, чем в однородной жидкости. Отсюда следует, что стратификация плотности при малых  $s_0$  снижает циркуляцию скорости и подъемную силу.



Рис. 2

6. Найдем численное решение задачи, а также силы, действующие на крыло, для установившегося движения под малым углом атаки при гармонических изгибных и крутильных колебаниях крыла. Для численного расчета оказалось удобнее решать сингулярное уравнение (2.16) с соотношениями (2.13)–(2.15). В случае стационарного обтекания крыла под углом атаки из (2.14), (2.15) вытекает, что  $\gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Хотя скачок скорости в следе равен нулю, т. е. следа как такового нет, плотность потенциала в нуль не обращается и определяется функцией

$$h(\xi) = -s_0 \int_{-1}^1 \alpha(\eta) e^{is(\xi-\eta)} \left[ J_1(s_0(\eta-\xi)) + s_0 \int_0^{1+\eta} J_1(s_0(\eta-\xi-x)) G(s_0 x) dx \right] d\eta.$$

Для гармонических колебаний крыла

$$\gamma(t) = \gamma_* e^{i\omega t}, \quad h(\xi, t) = h_*(\xi) e^{i\omega t},$$

где

$$\gamma_*(t) = -is_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta) \left[ 1 + s_0 \int_0^{1+\eta} e^{-isx} G(s_0 x) dx \right] d\eta;$$

$$h_*(\xi) = -s_0 \int_{-1}^1 \alpha_*(\eta) e^{is(\xi-\eta)} \left[ J_1(s_0(\eta-\xi)) + s_0 \int_0^{1+\eta} J_1(s_0(\eta-\xi-x)) G(s_0 x) dx \right] d\eta.$$

Для расчета использовался метод дискретных вихрей [9] по схеме С. М. Белоперковского: вихрь на  $1/4$  отрезка и контрольная точка на  $3/4$  отрезка от передней кромки. Неизвестные интенсивности вихрей при этом находятся из решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Контролировался определитель этой системы, он вел себя гладко и монотонно, дискретных собственных значений при  $s_0 < 3$  не было обнаружено.

Результаты расчета безразмерных коэффициентов силы  $C_y$  и момента  $C_m$  в случае установившегося обтекания крыла ( $Y = 2\pi\rho_0 c V^2 \alpha C_y$ ,  $M = 2\pi\rho_0 c^2 V^2 \alpha C_m$ ) показаны на рис. 3. Расчеты, так же как и асимптотика, демонстрируют снижение подъемной силы крыла при малых значениях  $s_0$ . Причем снижение достаточно сильное и может

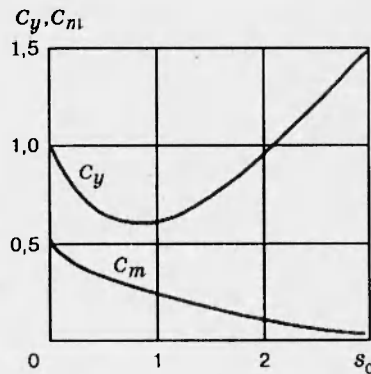


Рис. 3

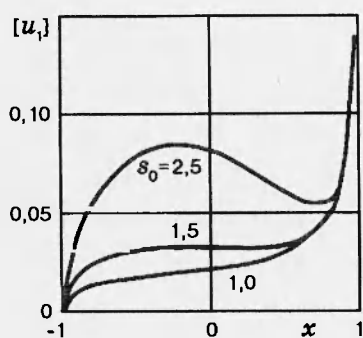


Рис. 4

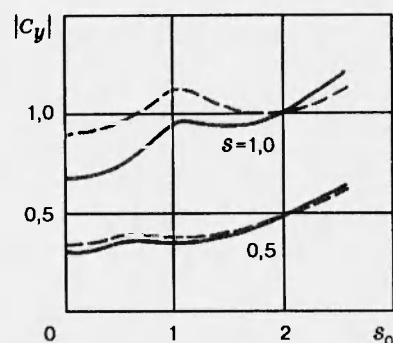


Рис. 5

достигать приблизительно 0,6 от соответствующего значения в однородной жидкости. Затем при  $s_0 > 1$  наблюдается рост подъемной силы, и при  $s_0 > 2$  подъемная сила в стратифицированной жидкости становится больше, чем в однородной. Эту немонотонность можно увидеть уже и в формуле (5.7) для подъемной силы, при  $s_0 > 1$  последние члены становятся преобладающими и дают увеличение подъемной силы. Физически это явление, по-видимому, связано с влиянием вперед по потоку при  $s_0 > 1$  [10]. Жидкость перед крылом тормозится, скачок скорости на крыле начинает расти, и соответственно увеличиваются циркуляция и подъемная сила. То, что коэффициент силы  $C_y$  бесконечно растет при  $s_0 \rightarrow \infty$ , объясняется выбранной нормировкой, которая является традиционной в теории крыла. Если перейти к размерным переменным, то подъемная сила  $Y$  стремится к нулю при  $V \rightarrow 0$ .

Из рис. 3 видно, что и момент силы стремится к нулю, т. е. центр давления перемещается к середине крыла. Это объясняется перераспределением скорости жидкости вокруг крыла.

На рис. 4 показаны графики перепада скорости на крыле при различных значениях  $s_0$ . Видно, что с ростом  $s_0$  нарушается монотонность и появляется «горб» в середине крыла. Известно [6], что сингулярные интегральные уравнения на отрезке имеют решения трех типов: два решения, не ограниченные на одном из концов и ограниченные на другом конце, и третье решение, ограниченное на обоих концах и существующее при выполнении дополнительного условия на правую часть. По-видимому, при  $s_0 \rightarrow \infty$  наблюдается переход от решения, не ограниченного на передней кромке, к решению, ограниченному на обоих концах с критической точкой в передней кромке.

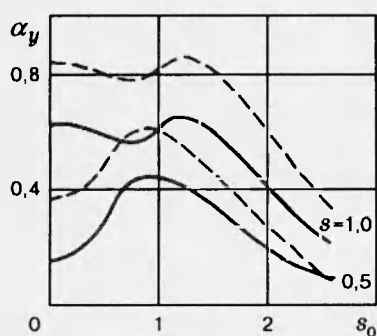


Рис. 6

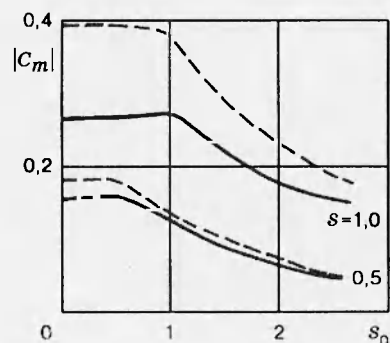


Рис. 7

Проведены также расчеты нестационарных сил и моментов в случае изгибных и крутильных колебаний крыла. На рис. 5–8 показана зависимость модуля и фазы безразмерных коэффициентов сил и моментов от параметра  $s_0$  для чисел Струхала 0,5 и 1 (сплошные линии соответствуют изгибным колебаниям, штриховые — крутильным). Здесь тоже отмечаются немонотонность модуля силы и уменьшение момента с ростом параметра  $s_0$ , т. е. с уменьшением числа Фруда. Таким образом, влияние стратификации на гидродинамические характеристики крыла является очень существенным.

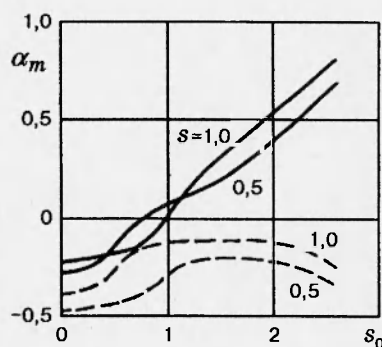


Рис. 8

## ЛИТЕРАТУРА

1. Стратифицированные течения: Библиогр. указ. отеч. и иностр. лит. за 1972–1976 гг. Новосибирск, 1978. Вып. 2.
2. Поверхностные и внутренние волны: Библиогр. указ. отеч. и иностр. лит. за 1977–1984 гг. Новосибирск, 1985. Ч. 1, 2.
3. Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В. Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. М., 1986. (Препр. / АН СССР. Ин-т пробл. механики; № 282).
4. Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
6. Гахов Ф. Ф. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
9. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985.
10. McIntyre M. E. On Long's hypothesis of no upstream influence in uniformly stratified or rotating fluid // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. P. 209–243.

Поступила в редакцию 17/X 1994 г.,  
в окончательном варианте — 6/XII 1994 г.