УДК 532.516+538.4

О ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СПОНТАННОЙ ЗАКРУТКЕ В МГД-ТЕЧЕНИЯХ

Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В линейном приближении исследуется устойчивость стационарных осесимметричных МГД-течений несжимаемой идеально проводящей невязкой жидкости по отношению к закрутке — возмущениям азимутальных компонент поля скорости. Показано, что в течениях типа магнитогидродинамического вихря Хилла — Шафранова задача сводится к одномерной задаче на замкнутой линии тока невозмущенного течения (пространственная координата — длина дуги линии тока). Сформулирована спектральная краевая задача на собственные значения для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами с периодическими граничными условиями. Найдены достаточные условия, при которых закрутка невозможна. С помощью численного решения характеристического уравнения показано, что для каждой линии тока при выполнении некоторого условия существует действительное собственное значение, обеспечивающее монотонный экспоненциальный рост начальных возмущений.

Проблема спонтанной закрутки заключается в следующем: может ли возникать вращательно-симметричное течение при отсутствии явных внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда осесимметричное движение без вращения заведомо возможно?

Простейшим примером может служить возникновение стокового вихря [1]. Механизм, порождающий вращательное движение в этом случае, так же как при возникновении интенсивных мезомасштабных атмосферных вихрей (пылевых столбов, смерчей, торнадо), до конца не выяснен. Не исключено, что спонтанная закрутка может играть существенную роль в этом механизме. Обсуждению проблемы спонтанной закрутки посвящены работы [2, 3], в которых приведены примеры приближенных решений, описывающих это явление. Однако в этих примерах в рассматриваемую область втекает вращающаяся жидкость, что делает их недостаточно убедительными.

Более жесткая формулировка указанной проблемы дана в [4, 5]. Предложенная там постановка обеспечивает строгий контроль кинематического потока осевой составляющей момента импульса, исключающий втекание вращающейся жидкости в область течения. В [6] в случае МГД-течений показана необходимость контроля потока осевой компоненты момента импульса, переносимого магнитным полем, и предложена постановка, исключающая втекание указанной компоненты импульса. В вязкой жидкости возникновение вращательного течения рассматривается как бифуркация исходного осесимметричного течения в результате потери устойчивости к течению с закруткой [2], т. е. в этом случае задача при фиксированных граничных условиях имеет по крайней мере два решения — без вращения и с закруткой. Для невязких течений такая постановка не имеет смысла. В этом случае в ограниченной области имеется множество осесимметричных течений (без закрутки) и вращательно-симметричных течений (с закруткой). Поэтому возникновение спонтанной закрутки рассматривается как неустойчивость исходного осесимметричного

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00597).

течения, в результате которой растет амплитуда азимутальной составляющей скорости и увеличивается азимутальная компонента кинетической энергии за счет полоидальной (в точной нелинейной постановке их сумма остается постоянной в силу закона сохранения энергии). Во избежание недоразумений подчеркнем, что появление закрутки не нарушает закон сохранения момента импульса. В невязкой жидкости возникает дифференциальное вращение, сохраняющее момент импульса, а в вязкой жидкости, при условии прилипания на границах области течения, момент импульса не обязан сохраняться и может появляться вращательное течение типа стокового вихря.

Трудности, связанные с исследованием трехмерных течений, побуждают к поиску наиболее простых ситуаций, в которых рассматриваемое явление возможно. В связи с этим были проведены исследования устойчивости к закрутке некоторых стационарных осесимметричных течений при наложении вращательно-симметричных возмущений.

В [4, 5] показано, что бифуркация осесимметричного течения — появление вращательно-симметричного течения — не имеет места для произвольной сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. Для осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с конечной проводимостью в магнитном поле в [6] показано, что вращательно-симметричная спонтанная закрутка невозможна, если сечение области течения меридиональной плоскостью является односвязным. В таких областях полоидальные компоненты магнитного поля исчезают со временем из-за конечной проводимости.

Для идеально проводящей жидкости характер связности области течения не имеет значения, так как в осесимметричных течениях такой жидкости полоидальные компоненты магнитного поля из-за вмороженности не исчезают, и, как показано в [7], при определенных условиях имеет место неустойчивость к закрутке (линейный рост азимутальных возмущений со временем).

В данной работе рассматривается возможность возникновения вращательно-симметричной спонтанной закрутки в линейном приближении в результате экспоненциальной неустойчивости исходного стационарного осесимметричного течения невязкой идеально проводящей жидкости в магнитном поле типа вихря Хилла — Шафранова в ограниченной области.

Течения идеально проводящей невязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле в общепринятых обозначениях описываются следующей системой уравнений (плотность жидкости $\rho = 1$):

$$\boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{h}\times\boldsymbol{j} = -\nabla f, \quad f = p + \boldsymbol{v}^2/2, \quad \boldsymbol{j} = \operatorname{rot}\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{h}_t = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{h}), \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{h} = 0, \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/\sqrt{4\pi}.$$

Стационарные вращательно-симметричные течения рассматриваемого типа в цилиндрической системе координат $\boldsymbol{r} = (r, \varphi, z)$, $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h, h_3)$ описываются соотношениями

$$u = -\frac{\alpha(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\alpha(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad h_1 = -\frac{\beta(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad h_3 = \frac{\beta(\psi)}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{1}$$

где $\alpha(\psi)$ и $\beta(\psi)$ — произвольные функции ψ,

$$v = \alpha\Gamma(\psi)/r + \beta\Omega(\psi)r, \qquad h = \alpha\Omega(\psi)r + \beta\Gamma(\psi)/r, \tag{2}$$

и уравнением Грэда — Шафранова для ψ

$$D\psi + \frac{\alpha\alpha' - \beta\beta'}{\alpha^2 - \beta^2}(\psi_r^2 + \psi_z^2) = \frac{r^2}{\alpha^2 - \beta^2} f'(\psi) - \Gamma\Gamma' - \Omega\Omega' r^4, \tag{3}$$

где

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В формулах (1)–(3) одну из функций α, β без ограничения общности можно положить равной 1. Функции $f(\psi)$, $\Gamma(\psi)$, $\Omega(\psi)$ могут иметь произвольную зависимость от ψ. Так как рассматривается задача об устойчивости стационарного осесимметричного течения, то в исходных течениях необходимо положить $\Gamma = 0$, $\Omega = 0$. Далее функции α, β выбираются постоянными, причем $\alpha = 1$, тогда β приобретает смысл коэффициента пропорциональности между полоидальными компонентами скорости и магнитного поля в исходном стационарном течении: $\boldsymbol{h}_p = \beta \boldsymbol{v}_p$. В этом случае уравнение Грэда — Шафранова упрощается:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{r^2}{1-\beta^2} f'(\psi). \tag{4}$$

Давление определяется интегралом Бернулли вдоль линии тока $p+(u^2+v^2+w^2)/2 = f(\psi)$.

Ниже рассматриваются течения в ограниченной области, поэтому отсутствует необходимость сшивания внутреннего течения с внешним. В результате существенно расширяются возможности для получения широкого класса точных аналитических решений, описывающих исходные течения.

Для $f(\psi) = K_1\psi + K_2\psi^2$, где K_1, K_2 — некоторые константы, существуют решения вида $\psi(r,z) = g_0(r) + g_2(r)z^2 + \ldots + g_{2n}z^{2n}$, симметричные относительно плоскости $z = 0$ (и несимметричные, если добавить нечетные степени z), и вида (если $K_1 = 0$) $\psi(r,z) = g(r)\sin(kz)$. Определение течений такого вида сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, среди решений первого типа имеется решение, соответствующее известному вихрю Хилла — Шафранова в шаре, обобщенному на эллипсоид вращения. Оно определяется формулой

$$\psi(r,z) = Ur^2(1 - r^2/r_*^2 - z^2r/z_*^2)/2.$$

В таких течениях линии тока замкнуты и любая замкнутая линия тока может рассматриваться как граница области течения. Это позволяет исследовать устойчивость к закрутке широкого класса течений в односвязных и многосвязных областях, представленных точными аналитическими решениями.

Далее рассматривается задача об устойчивости стационарного осесимметричного течения ($v = 0$, $h = 0$ и соответственно $\Gamma = \Omega = 0$) по отношению к закрутке — возникновению вращательно-симметричного течения ($v \neq 0$). В линейном приближении эволюция азимутальных составляющих скорости и магнитного поля не связана с эволюцией полоидальных компонент и может рассматриваться независимо. Основная цель — выяснить, существуют ли экспоненциально растущие решения для значений β, лежащих в диапазоне $0 < \beta < 1$, и определить условия, при которых это возможно.

Азимутальные составляющие скорости $v_\varphi = v$ и магнитного поля $h_\varphi = h$ удовлетворяют уравнениям

$$v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} = h_1h_r + h_3h_z + \frac{h_1h}{r}, \quad h_t + uh_r + wh_z - \frac{uh}{r} = h_1v_r + h_3v_z - \frac{h_1v}{r}. \tag{5}$$

В линейном приближении $u(r,z)$, $w(r,z)$, $h_1(r,z)$, $h_3(r,z)$ не зависят от времени и совпадают со своими начальными значениями. На границе осесимметричной области D должны выполняться условия $\boldsymbol{vn} = 0$ и $\boldsymbol{hn} = 0$, где $\boldsymbol{n} = (n_r, 0, n_z)$ — внешняя единичная нормаль к границе области течения D.

Пусть имеется стационарное решение уравнения (4) в некоторой осесимметричной области D, удовлетворяющее указанным граничным условиям. Такие течения, как показано выше, существуют. В качестве примера возьмем магнитогидродинамический вихрь Хилла — Шафранова, рассматривая течение внутри сферы, на границе которой $\psi = 0$. В этом случае $\psi = r^2(1 - r^2 - z^2)/2$. Здесь и ниже используются безразмерные переменные (длины измеряются в радиусах шара, скорости отнесены к скорости в центре шара, время — в единицах отношения радиуса шара к указанной скорости). При этих условиях система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{aligned} &v_t + u(v-\beta h)_r + w(v-\beta h)_z + u(v-\beta h)/r = 0, \\ &h_t + u(h-\beta v)_r + w(h-\beta v)_z - u(h-\beta v)/r = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где, в частности, для вихря Хилла — Шафранова $u = rz$, $w = 1-2r^2-z^2$. Структура уравнений (6) позволяет рассматривать их на произвольной замкнутой линии тока, при этом значение величины ψ для выбранной линии тока играет роль параметра. Действительно, имеем

$$u\,\frac{\partial}{\partial r} + w\,\frac{\partial}{\partial z} = q(s)\,\frac{\partial}{\partial s}. \tag{7}$$

Здесь $q(s) = \sqrt{u^2+w^2}$ — модуль скорости; s — длина дуги вдоль линии тока, отсчитываемая от точки, где $r(s)$ на линии тока принимает минимальное значение. Функции $q(s)$ и $r(s)$ в силу замкнутости линий тока в исходном течении периодические с периодом $s_*(\psi)$, определяемым полной длиной выбранной линии. Предполагается, что на рассматриваемых линиях минимальные значения $q(0) > 0$, $r(0) = r_0 > 0$.

С учетом (7) уравнения (6) принимают вид

$$(rv)_t + q(s)\,\frac{\partial}{\partial s}\,r(v-\beta h) = 0, \quad \Bigl(\frac{h}{r}\Bigr)_t + q(s)\,\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{h-\beta v}{r} = 0. \tag{8}$$

Положим $A = (v-\beta h)r/r_0$, $B = (h-\beta v)r_0/r$. Вместо переменной s введем переменную x такую, что

$$x = \int\limits_0^s \frac{ds}{q(s)}. \tag{9}$$

Зависимость $r(x)$ и $z(x)$ вдоль линии тока для вихря Хилла — Шафранова в шаре, проходящей через точку $(r = r_0,\ z = 0)$, определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dx} = rz, \quad \frac{dz}{dx} = 1 - 2r^2 - z^2; \quad r = r_0 \quad \Bigl(0 < r_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigr), \quad z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Исключая z, для r получаем уравнение $r'' = r - 2r^3$. Отсюда с учетом граничных условий получаем $r'^2 = r^2 - r^4 - r_0^2 + r_0^4$ и окончательно находим $\bigl(\mu = \sqrt{1-r_0^2}\,\bigr)$

$$r(x) = r_0/\mathrm{dn}\,(\mu x), \qquad z(x) = r_0\mu k^2\,\mathrm{sn}\,(\mu x)\,\mathrm{cn}\,(\mu x)/\mathrm{dn}\,(\mu x),$$

$$x_* = x(s_*) = 2K(k)/\mu, \quad k = \sqrt{1-2r_0^2}/\mu, \quad r(x+x_*) = r(x), \quad z(x+x_*) = z(x),$$

где $\mathrm{sn}\,(\mu x)$, $\mathrm{cn}\,(\mu x)$, $\mathrm{dn}\,(\mu x)$ — соответствующие эллиптические функции Якоби; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

В результате с учетом (9) уравнения (8) принимают вид

$$A_t + A_x - \beta g(x)B_x = 0, \qquad B_t + B_x - \beta f(x)A_x = 0, \tag{10}$$

где $g(x) = (r(x)/r_0)^2$; $f(x) = (r_0/r(x))^2$ $(g(x)f(x) = 1)$. Разрешая эти уравнения относительно A_x, B_x, получаем

$$(1-\beta^2)A_x = -A_t - \beta g(x)B_t, \qquad (1-\beta^2)B_x = -B_t - \beta f(x)A_t. \tag{11}$$

Решение этих уравнений будем искать в виде

$$A(x,t) = a(x)\exp(-\lambda_* t), \qquad B(x,t) = b(x)\exp(-\lambda_* t), \tag{12}$$

где λ_* удобно представить в виде $\lambda_* = (1-\beta^2)\lambda$. Подставляя (12) в (11), для определения $a(x)$ и $b(x)$ получаем следующую систему уравнений:

$$a' = \lambda a + \beta\lambda g(x) b, \qquad b' = \lambda b + \beta\lambda f(x) a. \tag{13}$$

Решения системы (13) должны быть периодическими с периодом, равным x_*. Это требование определяет дискретный (как будет показано ниже) набор собственных значений λ_n, при которых существует нетривиальное решение рассматриваемой системы. Если имеется хотя бы одно собственное значение с отрицательной действительной частью, то исходное течение является неустойчивым и возникает закрутка.

Приведем некоторые априорные оценки. Проинтегрируем сумму $(\bar b a)' + (\bar a b)'$ по периоду. В результате получим

$$(\lambda + \bar\lambda)\int_0^{x_*}(\bar b a + \bar a b + \beta g(x)|b|^2 + \beta f(x)|a|^2)\,dx = 0. \tag{14}$$

Из (14) следует, что λ является чисто мнимой величиной и экспоненциально растущих решений системы (10) не существует, если β равна или больше единицы. Это совпадает с найденным ранее результатом [7].

Положим $a = rU$, $b = V/r$. Тогда для U и V получим уравнения

$$U' = (\lambda - z(x))U + \beta\lambda V, \qquad V' = (\lambda + z(x))V + \beta\lambda U,$$

где $z(x) = g'(x)/(2g(x)) = r'(x)/r(x)$ — значение координаты z на линии тока. Отсюда, используя комплексно-сопряженную форму этих уравнений, получаем

$$(\lambda+\bar\lambda)\int_0^{x_*}(|U|^2 + |V|^2)\,dx = 2\int_0^{x_*} z(x)(|U|^2 - |V|^2)\,dx - \beta(\lambda+\bar\lambda)\int_0^{x_*}(\bar V U + \bar U V)\,dx,$$

$$(\lambda+\bar\lambda)\int_0^{x_*}[(\bar V U + \bar U V) + \beta(|U|^2 + |V|^2)]\,dx = 0.$$

Комбинируя эти равенства, находим

$$(\lambda+\bar\lambda)(1-\beta^2)\int_0^{x_*}(|U|^2 + |V|^2)\,dx = 2\int_0^{x_*} z(x)(|U|^2 - |V|^2)\,dx.$$

Так как на любой линии тока $|z(x)| \leqslant 1$, то очевидно, что $|(\lambda+\bar\lambda)|(1-\beta^2) \leqslant 2$. Таким образом, собственные значения λ_* расположены в полосе $|\mathrm{Re}\,\lambda_*| \leqslant 1$.

Аналогичным образом для действительных значений λ ($\mathrm{Im}\,\lambda = 0$), интегрируя по периоду величину $aa' + bb'$, получим

$$\lambda\int_0^{x_*}(2\beta(g(x) + f(x))ab + |b|^2 + |a|^2)\,dx = 0. \tag{15}$$

Из (15) следует, что монотонная закрутка невозможна, если $\beta(p+1) < 1$, где $p = \max(r(x)/r_0)^2$ в рассматриваемой области. Для вихря Хилла — Шафранова $p = (1-r_0^2)/r_0^2$.

Для определения собственных значений сформулированной выше задачи, следуя общей теории линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [8], найдем матрицант системы (13) и соответствующее характеристическое уравнение.

Система (13) имеет два линейно независимых решения $(a_1(x),\, b_1(x))$ и $(a_2(x),\, b_2(x))$, принимающих в точке $x = 0$ значения $a_1(0) = 1$, $b_1(0) = 0$ и $a_2(0) = 0$, $b_2(0) = 1$, которые получаются методом последовательных приближений и представимы в виде сходящихся бесконечных рядов

$$a_1(x) = \exp(\lambda x)(1 + A_2(x)(\beta\lambda)^2 + A_4(x)(\beta\lambda)^4 + \ldots),$$
$$b_1(x) = \exp(\lambda x)(B_1(x)(\beta\lambda) + B_3(x)(\beta\lambda)^3 + \ldots),$$
$$a_2(x) = \exp(\lambda x)(A_1(x)(\beta\lambda) + A_3(x)(\beta\lambda)^3 + \ldots),$$
$$b_2(x) = \exp(\lambda x)(1 + B_2(x)(\beta\lambda)^2 + B_4(x)(\beta\lambda)^4 + \ldots).$$

Здесь A_n и B_n определяются формулами

$$A_1(x) = \int_0^x g(x_1)\,dx_1, \qquad B_1(x) = \int_0^x f(x_1)\,dx_1,$$

$$A_2(x) = \int_0^x f(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} g(x_2)\,dx_2, \qquad B_2(x) = \int_0^x g(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2)\,dx_2,$$

$$A_3(x) = \int_0^x g(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2)\,dx_2 \int_0^{x_2} g(x_3)\,dx_3,$$

$$B_3(x) = \int_0^x f(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} g(x_2)\,dx_2 \int_0^{x_2} f(x_3)\,dx_3,$$

$$A_4(x) = \int_0^x f(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} g(x_2)\,dx_2 \int_0^{x_2} f(x_3)\,dx_3 \int_0^{x_3} g(x_4)\,dx_4,$$

$$B_4(x) = \int_0^x g(x_1)\,dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2)\,dx_2 \int_0^{x_2} g(x_3)\,dx_3 \int_0^{x_3} f(x_4)\,dx_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Характеристическое уравнение для определения мультипликаторов ρ имеет вид

$$\rho^2 - (a_1 + b_2)\rho + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) имеет два корня ρ_1 и ρ_2, для которых выполняются равенства

$$\rho_1\rho_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \exp(2\lambda x_*) \tag{17}$$

(здесь второе равенство имеет место в силу формулы Лиувилля) и

$$\rho_1 + \rho_2 = a_1 + b_2. \tag{18}$$

В (16)–(18) значения функций $a_1(x)$ и $b_2(x)$ соответствуют точке $x = x_*$.

Из требования периодичности следует, что по крайней мере один из мультипликаторов должен быть равен единице. Учитывая это, из (17) и (18) имеем

$$1 + \exp(2\lambda x_*) = a_1(x_*) + b_2(x_*). \tag{19}$$

Подставляя в правую часть найденные выше функции, получим

$$1 + \exp(2\lambda x_*) = \exp(\lambda x_*)(2 + C_2(\beta\lambda)^2 + C_4(\beta\lambda)^4 + \ldots), \tag{20}$$

где C_{2n} — постоянные, определяемые формулами $C_2 = A_2(x_*) + B_2(x_*) = A_1(x_*)B_1(x_*)$, $C_{2n} = A_{2n}(x_*) + B_{2n}(x_*)$, $n \geqslant 2$. Вводя обозначения $\lambda x_* = \zeta$, $C_2 = c$, $C_{2n} = 2x_*^{2n}c_{2n}/(2n)!$, $n \geqslant 2$, преобразуем уравнение (20) к следующему виду:

$$\operatorname{ch}\zeta = 1 + c(\beta\zeta)^2/2! + c_4(\beta\zeta)^4/4! + \ldots. \tag{21}$$

Для величин c_{2n} справедливы оценки $p^{-n} < c_{2n} < p^n$, $n \geqslant 1$. Из этих соотношений следует, что ряд в правой части (21) сходится для любых $\beta\zeta$ и является целой функцией в комплексной плоскости ζ, а множество собственных значений является дискретным. Численные расчеты для вихря Хилла — Шафранова показывают, что для c_{2n} выполняются более сильные неравенства, чем приведенные выше, а именно $1 < c < p$, $1 < c_{2n} < c^n$, $n \geqslant 2$. Первое из этих неравенств доказано строго для произвольной зависимости $r(x)$, т. е. для произвольных осесимметричных течений с замкнутыми линиями тока. Однако строгого доказательства этих неравенств для $n \geqslant 2$ в общем случае получить не удалось.

Разложим $\operatorname{ch}\zeta$ в ряд. В результате, сокращая на $(\beta\zeta)^2$ (собственное значение $\zeta = 0$ соответствует стационарному течению с закруткой (2)), получим

$$(1-\beta^2 c)/2! + (1-\beta^4 c_4)\zeta^2/4! + (1-\beta^6 c_6)\zeta^4/6! + \ldots + (1-\beta^{2n}c_{2n})\zeta^{2(n-1)}/(2n)! + \ldots = 0. \tag{22}$$

Корни этого уравнения, имеющие отрицательную действительную часть, как сказано выше, соответствуют экспоненциальному росту начальных возмущений. Из (22) следует, что для существования такого корня достаточно существования корня с неравной нулю действительной частью, так как если имеется корень ζ, то существует и корень $-\zeta$. С учетом этого ниже рассматриваются только корни, лежащие в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$. Попытки искать корень в виде разложения по степеням β не приводят к цели, так как корень с отличной от нуля действительной частью может появиться только при конечных значениях величин $\beta^{2n}C_{2n}$. При $\beta = 0$ собственные значения равны $\zeta_n = 2\pi n i$. При $\beta \ll 1$, предполагая аналитичность зависимости $\zeta_n(\beta)$, корни можно искать в виде рядов по степеням β, но при этом получаются только чисто мнимые величины. Полученные таким образом ряды имеют конечный радиус сходимости, вне которого возможно появление точек ветвления и появление корней с ненулевой действительной частью.

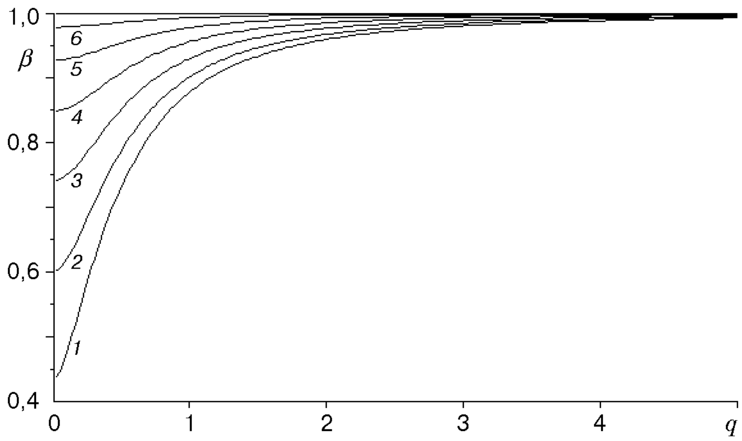
Для отыскания действительных корней и уточнения диапазона значений β, при которых они могут появляться, была использована следующая вычислительная процедура. (Эти вычисления выполнены совместно с М. С. Котельниковой.) Из уравнения (19) определялась зависимость $\beta(q)$ $(q = \beta\zeta)$:

$$\begin{gathered} 1 + \exp(2q/\beta) = \exp(q/\beta)(\tilde a_1(x_*) + \tilde b_2(x_*)) = 2\exp(q/\beta)\, d, \\ d = (\tilde a_1(x_*) + \tilde b_2(x_*))/2, \qquad \beta = q/\ln(d + \sqrt{d^2-1}\,), \end{gathered} \tag{23}$$

где $\tilde a_1(x_*) = a_1(x_*)\exp(-q/\beta)$, $\tilde b_2(x_*) = b_2(x_*)\exp(-q/\beta)$ — значения решений в точке x_* уравнений

$$\tilde a_1' = qg(x)\tilde b_1, \quad \tilde b_1' = qf(x)\tilde a_1, \qquad \tilde a_2' = qg(x)\tilde b_2, \quad \tilde b_2' = qf(x)\tilde a_2 \tag{24}$$

с начальными условиями $\tilde a_1(0) = 1$, $\tilde b_1(0) = 0$, $\tilde a_2(0) = 0$, $\tilde b_2(0) = 1$. Уравнения (24) решались численно. Из (23) определялась зависимость $\beta(q)$. Графики этих зависимостей на разных



линиях тока, задаваемых величиной r_0, для вихря Хилла — Шафранова в шаре приведены на рисунке (кривые *1–6* соответствуют значениям $r_0 = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6$). При малых и больших значениях $|q|$ можно получить аналитические представления этих графиков. При $|q| \to 0$ из (23) имеем

$$\beta = (1 + (c^2 - c_4)q^2/(24c) + O(q^4))/\sqrt{c}.$$

Для вихря Хилла — Шафранова $c_4 < c^2$ и при $1 > \beta > 1/\sqrt{c}$, $c \geqslant 1$ имеется действительный положительный (и, следовательно, как показано выше, действительный отрицательный) корень характеристического уравнения, свидетельствующий о возникновении неустойчивости.

При $|q| \to \infty$ согласно общей теории [9] имеем следующее асимптотическое представление решений системы (13): $a(x) = rU_*(x)\exp(\lambda x)$, $b(x) = V_*(x)\exp(\lambda x)/r$, где U_*, V_* удовлетворяют уравнениям

$$U_*' = \beta\lambda V_* - z(x)U_*, \qquad V_*' = \beta\lambda U_* + z(x)V_*. \tag{25}$$

Пусть $(U_1,\, V_1)$ и $(U_2,\, V_2)$ — линейно независимые решения этой системы уравнений, имеющие вид

$$U_1 = \exp(\beta\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty} U_{1,n}(\beta\lambda)^{-n}, \qquad V_1 = \exp(\beta\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty} V_{1,n}(\beta\lambda)^{-n},$$

$$U_2 = \exp(-\beta\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty} U_{2,n}(\beta\lambda)^{-n}, \qquad V_2 = \exp(-\beta\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty} V_{2,n}(\beta\lambda)^{-n},$$

где $U_{1,n}$, $V_{1,n}$, $U_{2,n}$, $V_{2,n}$ находятся из рекуррентной системы уравнений, получающейся при подстановке этих разложений в (25). В результате получаем

$$U_{1,0} = 1, \quad U_{1,n+1} = \frac{1}{2}\Big(V_{1,n}' - z(x)V_{1,n} - \int_0^{x_*} z(x)(V_{1,n}' - z(x)V_{1,n})\,dx\Big),$$

$$V_{1,0} = 1, \quad V_{1,n+1} = -\frac{1}{2}\Big(V_{1,n}' - z(x)V_{1,n} + \int_0^{x_*} z(x)(V_{1,n}' - z(x)V_{1,n})\,dx\Big),$$

$$U_{2,0} = -1, \quad U_{2,n+1} = \frac{1}{2}\Big(V_{2,n}' - z(x)V_{2,n} - \int_0^{x_*} z(x)(V_{2,n}' - z(x)V_{2,n})\,dx\Big),$$

$$V_{2,0} = 1, \quad V_{2,n+1} = \frac{1}{2}\bigg(V'_{2,n} - z(x)V_{2,n} + \int\limits_0^{x_*} z(x)(V'_{1,n} - z(x)V_{2,n})\,dx\bigg).$$

Используя эти разложения и пренебрегая членами порядка $O(1/|q|^2)$, находим $1 + \exp(2q/\beta) = \exp(q/\beta)[(1 + O(1/|q|^2)\operatorname{ch} q + (\gamma/q + O(1/|q|^2)\operatorname{sh} q]$ и для действительных значений $q > 0$ получаем

$$\beta = \frac{1}{1 + \gamma/q^2}, \qquad q = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{1-\beta}}, \quad \gamma = \frac{x_*}{2}\int\limits_0^{x_*} z^2(x)\,dx.$$

Напомним, что инкремент роста возмущений $\lambda_* = (1 - \beta^2)\lambda$ и при $\beta \to 1$ стремится к нулю.

На рисунке видно, что при заданной величине β для каждой линии тока λ_* имеет свое значение (очевидно, что это имеет место и для комплексных собственных значений). Отсюда следует, что решений вида $v = \exp(-\lambda_* t)V(r,z)$, $h = \exp(-\lambda_* t)H(r,z)$, где $\lambda_* \neq 0$ — единая для всей области постоянная, не существует. Исключением является значение $\lambda_* = 0$, при котором решение существует и соответствует стационарному течению с закруткой (2).

Для отыскания комплексных корней численно решалось уравнение (22), в котором коэффициенты c_{2n} рассчитывались по формуле

$$c_{2n} = \frac{(2n)!}{2x_*^{2n}}\,(A_{2n}(x_*) + B_{2n}(x_*)),$$

где $A_{2n}(x)$, $A_{2n}(x)$ — решения уравнений

$$A'_1 = g(x), \quad A'_2 = A_1/g(x), \quad A'_3 = g(x)A_2, \ldots,$$
$$B'_1 = 1/g(x), \quad B'_2 = g(x)B_1, \quad B'_3 = B_2/g(x), \ldots$$

с нулевыми начальными условиями: $A_i(0) = B_i(0) = 0$.

В результате корни и диапазон значений β, при которых они могут появляться, полученные этими двумя способами, для небольших по модулю значений ζ совпали с точностью до третьей значащей цифры, причем при отыскании корней вторым способом получены комплексные значения с ненулевыми действительной и мнимой частями, что свидетельствует о возможности колебательной неустойчивости.

Таким образом, с помощью численных расчетов показано, что для любой линии тока ($r_0 > 0$) найдется значение β, а именно

$$1 > \beta > \frac{1}{\sqrt{c}}, \qquad c = \int\limits_0^{x_*} r^2(x)\,dx \int\limits_0^{x_*} \frac{dx}{r^2(x)} \geqslant 1, \tag{26}$$

при котором существует действительное собственное значение и соответственно экспоненциально растут начальные возмущения. Результаты, полученные при численном определении корней из уравнения (22), позволяют предположить, что критерий (26) определяет и границу немонотонной (колебательной) неустойчивости.

Численные эксперименты по прямому расчету нестационарных решений уравнений (10) с начальными периодическими данными $A = v_0(x)r/r_0$, $B = -\beta v_0(x)r_0/r$ и периодическими граничными условиями (начальные данные такого вида соответствуют азимутальным возмущениям $v = v_0(x)$, $h = 0$) подтверждают возникновение неустойчивости экспоненциального типа и согласуются с критерием (26).

В [5–7] показано, что для возникновения спонтанной закрутки необходимо существование механизма, обеспечивающего контрградиентный поток осевой составляющей момента импульса. Полученные результаты свидетельствуют о возможности возникновения вращательно-симметричной спонтанной закрутки за счет такого потока, связанного с магнитным полем, по крайней мере, в рамках модели невязкой идеально проводящей жидкости в линейном приближении. Остается открытым вопрос: сохранится ли этот результат при учете нелинейности и вязкости?

Автор выражает благодарность Р. М. Гарипову за полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
2. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
3. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнит. гидродинамика. 1993. № 1. С. 41–48.
4. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
5. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.
6. **Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 35–43.
7. **Луговцов Б. А.** Осесимметричная спонтанная закрутка в идеально проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 6. С. 29–31.
8. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М.: Наука, 1972.
9. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 6/VII 2000 г.