

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ  
СЕЗОННЫХ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ  
И ПРОИНТЕГРИРОВАННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО  
В ЗАДАЧАХ РЕСУРСОСБЕРЕЖЕНИЯ**

**Р. Р. Ахметьянов, Л. А. Делегодина, Н. П. Копылова,  
Б. Н. Луценко, Г. М. Собстель, Г. П. Чейдо**

*Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,  
г. Новосибирск  
E-mail: lad@kti.nsc.ru*

Рассмотрен способ идентификации и оценки параметров мультипликативной модели авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего, описывающей однородные нестационарные процессы с сезонными колебаниями, основанный на выборочном зондировании пространства ее параметров. Предложенный способ идентификации отличается от способа, обычно использующего корреляционные и частные корреляционные функции. Он позволяет работать с моделями большей размерности с несколькими интервалами сезонности. Приведен пример прогноза потребления энергоресурса.

**Введение.** Процессы потребления энергоресурсов обладают суточной и недельной цикличностью. Их прогнозирование должно способствовать соблюдению жестких границ выделяемых потребителям мощностей. Для описания таких процессов с сезонными колебаниями уместно использовать однородные нестационарные стохастические модели авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС).

Целью данной работы является создание математического инструмента для исследования процессов с сезонными колебаниями и их описания, в частности, с помощью однородных нестационарных стохастических моделей АРПСС. Рассмотрим вопросы идентификации и уточнения параметров мультипликативной сезонной модели АРПСС, представленной в [1]. Предлагаемый способ идентификации и уточнения параметров опирается на выборочное зондирование пространства параметров, т. е. на извлечение из приведенного в стационарное состояние процесса на интервале прогнозной базы последовательности так называемого белого шума при некоторых искусственно задаваемых значениях параметров модели. Шум может стать, действительно, близким к белому лишь в случае выбора значений параметров, соответствующих модели, адекватной исследуемому процессу. Степень его «близости» и значение квадратичной нормы служат критерием приближения к, возможно, адекватной модели.

**«Метод складного ножа».** Особенностью модели авторегрессии и скользящего среднего (АРСС) является возможность прогнозировать процесс  $W_t$  как в будущее, так и в прошлое заменой оператора В оператором F [2]. Чтобы извлечь последовательность  $a_t$  из исходного процесса  $W_t$  на интервале  $t \in (1, n)$ , необходимо уже располагать значениями  $a_t$  и  $W_t$  при  $t < 0$ , которых у нас изначально нет. Получить их оценки, а также дополнительные данные как бы из ничего и позволяет так называемый «метод складного ножа» (впоследствии метод бутстреп) [3–5]. После выхода за пределы прогнозной базы, когда исчерпаны реальные данные  $W_t$ , прогнозирование продолжается с заменой реальных данных их прогнозом. Только оценивать компоненты белого шума  $e_t$  мы уже не сможем, и они полагаются равными их математическому ожиданию, т. е. нулю. Суть операции состоит в том, что, используя исходный процесс  $W_t$  и задавая значения параметров модели, можно осуществлять последовательное одношаговое прогнозирование в прошлое процесса  $W_t$  с попутным вычислением последовательности белого шума  $e_t$ . Эта последовательность представляет собой разность между фактическими и прогнозируемыми на один шаг значениями  $W_t$ . Реальные данные в случае адекватной процессу модели, кроме инерционной компоненты, представляемой прогнозом, содержат и независимую от них случайную компоненту.

После затухания процесса, спрогнозированного таким образом в прошлое, начинается возвратное движение в прямом времени: от точки затухания до конечной точки прогнозной базы. Прогноз в прошлое был вполне корректен, и этот же метод будет использован для пролонгации исходного процесса, уже  $Z_t$ , в будущее.

В методе складного ножа при движении в прямом времени как бы из ничего получаем оценку последовательности белого шума, теперь уже  $a_t$ , для отрицательных значений  $t$ , где отсутствуют реальные данные, а имеются лишь прогнозные.

Эта процедура позволяет погасить переходной процесс в  $a_t$  до выхода его в область положительных значений  $t$ . Здесь самое главное – обеспечить стационарный режим формирования  $a_t$  на интервале прогнозной базы.

Конечно, для нас важно обеспечить стационарность  $a_t$  для точки (параметров модели) в глобальном минимуме критерия или его окрестности и менее важно – в остальных точках.

Мы будем работать с сезонной моделью АРСС, представленной вариантом с избыточными параметрами [1]:

$$\sum_{i=0}^{n_p} \varphi_i^* B^{l_i} w_t = \sum_{i=0}^{n_q} \theta_i^* B^{m_i} a_t, \quad (1)$$

или в эквивалентном виде:

$$W_t = \sum_{i=1}^{n_q} \theta_i^* a_{t-m_i} - \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_i^* W_{t-l_i} + a_t, \quad t > 0,$$

а при прогнозировании в обратном времени, т. е. после замены оператора В оператором F:

$$W_t = \sum_{i=1}^{n_q} \theta_i^* e_{t+m_i} - \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_i^* W_{t+l_i} + e_t, \quad t \leq 0.$$

Прогноз для  $a_t$  получается как условное математическое ожидание при заданных значениях  $W_t$  и  $a_t$  (или  $e_t$ ), предшествующих моменту  $t$  (или следующих за ним), т. е. поскольку  $E(a_t) = E(e_t) = 0$ , то полагается  $a_t = 0$  при  $t > n$  и  $e_t = 0$  при  $t < 1$ . При движении в положительном времени

$$\hat{W}_t = \sum_{i=1}^{n_q} \theta_i^* a_{t-m_i} - \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_i^* W_{t-l_i}, \quad \hat{a}_t = W_t - \hat{W}_t, \quad (2)$$

а при движении в обратном времени

$$\hat{W}_t = \sum_{i=1}^{n_q} \theta_i^* e_{t+m_i} - \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_i^* W_{t+l_i}, \quad \hat{e}_t = W_t - \hat{W}_t. \quad (3)$$

Если при прогнозировании в прошлое значение  $|e_t|$  превысит некоторый порог, дальнейшие вычисления последовательности  $e_t$  прекращаются и ее среднему квадрату присваивается заданное большое значение. Это позволяет избежать ненужных вычислений и переполнений.

После завершения процедуры извлечения последовательности  $a_t$  из  $W_t$  вычисляется ее средний квадрат на интервале прогнозной базы:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad (4)$$

а далее и средняя дисперсия прогноза на интервале пролонгации.

**Дихотомическое зондирование пространства параметров.** Предложенный в работе [2] подход к идентификации моделей АРПСС, основанный на использовании корреляционных и частных корреляционных функций исходного процесса, успешно работает при сравнительно небольшом количестве параметров, что подтверждается включением этих моделей в ряд пакетов статистической обработки данных. Однако с увеличением количества параметров и усложнением модели, особенно при наличии нескольких периодов сезонности, использование этого подхода становится все более проблематичным. Вместе с тем стремительное развитие вычислительной техники открывает здесь перспективы и позволяет предложить иной подход к идентификации и оценке параметров моделей АРСС. На наш взгляд, он более универсален, хотя, естественно, нуждается в более тщательной проработке. Это метод выборочного зондирования всей области возможных значений параметров модели с постепенным отсевом неперспективных точек и связанных с ними областей и поэтапным отбором наиболее перспективных в плане минимизации критерия качества модели.

Координаты каждой точки в пространстве параметров – это вектор упорядоченных компонент параметров авторегрессии (АР) и скользящего среднего (СС) для всех интервалов сезонности. Зондированием точки будем называть извлечение из исходного процесса с помощью метода складного ножа последовательности  $a_t$ ,  $t \in (1, n)$ , и оценку ее критерия качества. Под критерием качества подразумевается среднеквадратичная норма последовательности  $a_t$  в виде  $S^2$  либо средняя дисперсия прогноза  $V_t(\beta)$  процесса АРСС на интервале пролонгации  $L$ . Перспективным претендентом будем считать

точку с минимальным значением критерия качества, в окрестности которой можно рассчитывать обнаружить точку глобального минимума критерия.

Размеры области пространства параметров в виде прямоугольного  $m$ -мерного бруса определяются условиями стационарности и обратимости модели с заданной структурой, налагающими ограничения на значения параметров АР и СС. Одним из достоинств мультипликативной модели является факторизация характеристических уравнений (при определении условий стационарности и обратимости) на сомножители, относящиеся к различным интервалам сезонности. Размеры бруса зависят только от количества параметров для каждого интервала сезонности и одинаковы как для параметров АР, так и для параметров СС. Эти размеры не зависят от значений интервалов сезонности.

В таблице приводятся данные, позволяющие по количеству параметров АР  $p_i$  или СС  $q_i$  для каждого интервала сезонности выбирать размеры сторон бруса для области зондирования параметров модели АРСС: строка 1 – количество параметров АР или СС для одного периода сезонности, 2 – номера параметров по мере возрастания сдвига в прошлое, 3 – интервалы изменения параметров, 4 – размер стороны бруса для данного параметра, 5 – координата центра бруса по данному параметру.

Не все точки бруса являются допустимыми, т. е. соответствуют стационарным и обратимым процессам. Они будут отбракованы при попадании в эту область зондирования.

Конечно, немыслимо детально исследовать пространство  $m$ -мерной размерности при  $m > 5$ . Поэтому, как и при планировании эксперимента, придется экономно распоряжаться ресурсами. Из этих соображений и выбрано дихотомическое погружение, суть которого состоит в отборе для каждой избранной точки при зондировании ее окрестности весьма ограниченного количества точек, названных нами дихотомическими по способу их размещения в этой окрестности. Количество таких точек при  $m$ -мерном пространстве параметров равно  $2^m$ . Они располагаются симметрично относительно центра области, являясь, в свою очередь, центрами  $2^m$  подобных областей, но с уменьшенным в 2 раза размером по каждой из координат. Таким образом, зондирование осуществляется по узлам прямоугольной решетки с дихотомически уменьшающимся размером клеток.

Каждый этап дихотомического погружения сопровождается замещением менее перспективных претендентов более перспективными. Количество отбираемых претендентов сокращается по мере приближения к финишу. На последнем этапе отбирается единственная точка, возможно, как результат усреднения оставшихся, с минимальным значением критерия.

Формирование координат дихотомических точек осуществляется по следующему алгоритму. После задания структуры модели определяется размер

Номер строки	Количество параметров сезонности					
	1	2		3		
1	1					
2	1	1	2	1	2	3
3	(-1, +1)	(-2, +2)	(-1, +1)	(-3, +3)	(-3, +1)	(-1, +1)
4	2	4	2	6	4	2
5	0	0	0	0	-1	0

вектора  $\beta$  ее параметров  $m = n_\beta$  и вычисляется количество дихотомических точек в окрестности любой точки  $m_2 = 2^m$ .

Задается область возможных значений параметров модели в виде прямоугольного бруса с центром, выбираемым согласно строке 5 таблицы. Вводится диагональная матрица  $\mathbf{V}_r$  с элементами – размерами сторон бруса  $b_i$  по каждой из  $m$  координат:

$$\mathbf{V}_r(i, i) = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Если координаты некоторой  $j$ -й точки, отобранной на  $s$ -м этапе погружения для последующего обследования, обозначим  $\beta_0(s, j)$ , то координатами  $m_2$  дихотомических точек ее окрестности будут

$$\beta_s(j, k) = \beta_0(s, j) + \mathbf{X}(k, \circ) \mathbf{V}_r 2^{-1-s}, \quad k = 1, \dots, m_2. \quad (5)$$

Здесь  $\beta_0$  и  $\beta_s$  – вектор-строки размера  $m$ ;  $\mathbf{X}(k, \circ)$  –  $k$ -я строка матрицы  $\mathbf{X}(m_2, m)$  относительных дихотомических координат с элементами  $\pm 1$ , полученными путем замены 0 величиной  $-1$  в бинарном представлении чисел (или номеров дихотомических точек) от 0 до  $m_2 - 1$ .

У отсеянных на предыдущих этапах значений  $\beta$  последовательности  $a_t$  обычно далеки от белого шума. После завершения процедуры дихотомического зондирования производится контрольная проверка полученной модели на стационарность и обратимость, а также на адекватность исходному процессу, которая оценивается по степени белизны извлеченной последовательности  $a_t$ .

**Уточнение параметров модели методом модифицированного скорейшего спуска.** Алгоритм дихотомического зондирования приводит к дискретным оценкам параметров модели. Несмотря на его удовлетворительное функционирование, оставалось сомнение: не утрачивается ли точка глобального минимума на начальных этапах погружения, когда размеры ячеек еще достаточно велики.

При использовании точек, отобранных при дихотомическом погружении, в качестве отправных на одном из ранних этапов была сделана попытка уточнить значения вектора параметров  $\beta$  с помощью алгоритма скорейшего градиентного спуска [6, 7]. Выяснилось, что рельеф критерия образует не просто вытянутые эллипсоидоподобные структуры, а, скорее, напоминающие каньоны с довольно крутыми берегами и меняющимся направлением русла. Было решено объединить действия обычного градиентного спуска со спуском по градиенту, преобразованному матрицей Гессе [7]. Первый обеспечивает выход на «дно русла», а второй – движение вдоль него. Каждый шаг итерационной процедуры включает последовательные действия обоих алгоритмов.

Матрица Гессе симметрична, но в отличие от матрицы Грама не обладает свойством положительной полуопределенности. Построенная на ней квадратичная форма может принимать отрицательные значения. Диагональные элементы матрицы положительные, если по данному параметру критерий имеет локальный минимум, и наоборот. Квадратичная форма, построенная на базе матрицы Грама, описывает многомерный эллипсоид, а при ее вырождении, когда одна из осей эллипсоида устремляется в бесконечность, – цилиндрическую поверхность с многомерным эллипсоидом в качестве образующей.

В поверхности, описываемой квадратичной формой на базе матрицы Гессе, в дополнение к эллиптичности может появиться и гиперболичность (при отрицательной квадратичной форме). Тем самым изобразительные возможности этой матрицы шире, нежели матрицы Грама, и она оказывается предпочтительной в подобных задачах с более сложным рельефом критерия качества.

Опишем теперь алгоритм и приведем основные формулы. Если стационарный процесс  $W_t$  представлен сходящимся бесконечным рядом

$$W_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}, \quad \psi_0 = 1,$$

то дисперсию прогноза для  $W_t$  можно вычислить по рекуррентной формуле

$$V(1) = S^2; \quad V(i) = V(i-1) + S^2 \psi_{i-1}^2, \quad (6)$$

где  $S^2$  – оценка дисперсии случайного белого шума или оценка его нормы, если он далеко не белый, вычисляемая согласно (4). Коэффициенты разложения  $\psi_i$  определяются вектором  $\beta$ . В качестве интегрального критерия можно взять некоторый линейный функционал от дисперсий прогноза  $V_t(\beta)$  на интервале пролонгации  $L$ , в частности среднюю величину дисперсии прогноза

$$V_t(\beta) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L V(i). \quad (7)$$

Компоненты градиента и матрицы Гессе будем определять численным дифференцированием. Вектор-столбец градиента

$$\mathbf{G}(i) = \frac{\partial V_t(\beta)}{\partial \beta_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

матрица Гессе

$$\mathbf{H}(i, j) = \frac{\partial^2 V_t(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (9)$$

Градиент, преобразованный с помощью матрицы Гессе, имеет вид

$$\mathbf{G}\mathbf{e} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}.$$

Если матрица  $\mathbf{H}$  вырождена, т. е.  $\text{rank } \mathbf{H} < m$ , то

$$\mathbf{G}\mathbf{e} = \mathbf{H}^+\mathbf{G}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{H}^+$  – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза, удовлетворяющая условиям:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^+\mathbf{H} = \mathbf{H}; \quad \mathbf{H}^+\mathbf{H}\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^+; \quad (\mathbf{H}\mathbf{H}^+)^T = \mathbf{H}\mathbf{H}^+; \quad (\mathbf{H}^+\mathbf{H})^T = \mathbf{H}^+\mathbf{H}, \quad (11)$$

обеспечивающим ее единственность [8]. Здесь индекс  $T$  – символ транспонирования.

Если оценка вектора параметров модели, полученная на  $i$ -м шаге итерации, равна  $\beta_i$ , то с помощью обычного метода скорейшего спуска уточненной оценкой будет

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \alpha_i \mathbf{G}_i^T.$$

Здесь  $\mathbf{G}_i$  – вектор градиента, полученный на  $i$ -м шаге;  $\alpha_i$  – коэффициент, который поясним далее.

При скорейшем спуске с преобразованным градиентом формула внешне аналогична предыдущей:

$$\beta_{i+1} = \beta_i - \gamma_i \mathbf{G}_i^T.$$

Вычисления коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\gamma_i$  громоздки и здесь не приводятся, поэтому опишем их словесно.

Величина критерия  $V_i(\beta)$  вычисляется в равноудаленных на расстояние  $\delta$  точках вдоль градиента: на спуске и подъеме. Вначале она определяется на спуске в точках

$$\beta_i - j\delta \mathbf{G}_i^T, \quad j=1,2,\dots,$$

вплоть до значения  $j$ , при котором величина критерия превысит в  $\nu$  раз ( $\nu = 1,5-3,0$ ) исходную величину  $V_i(\beta_i)$ , при этом коэффициент  $\nu$  должен уменьшаться по мере приближения к глобальному минимуму. Затем такое же скакирование осуществляется на подъеме, т. е. для  $j = -1, -2, \dots$ . Обычно в этом направлении число шагов до превышения  $V_i(\beta_i)$  в  $\nu$  раз невелико.

Среди полученных точек находится точка с минимальным значением критерия. Поведение критерия в ее окрестности аппроксимируется параболой, и находится значение  $\beta$ , отвечающее минимуму параболы. Оно и является итоговым для данного спуска. Если минимальное значение критерия превышает исходное, то параболическое уточнение критерия  $V_i(\beta_i)$  осуществляется для этой исходной точки аналогично, а соответствующее ему уточненное значение  $\beta_i$  принимается за  $\beta_{i+1}$ . Далее следует переход к скорейшему спуску по преобразованному матрицей Гессе градиенту (где операции аналогичны). Это завершает один цикл итерации. Итерации прекращаются, когда уменьшение интегрального критерия окажется меньше задаваемого порога  $\varepsilon$ :

$$V_i(\beta_i) - V_i(\beta_{i+1}) < \varepsilon.$$

Разумеется, этот алгоритм требует более тщательного исследования. При его использовании проводились вычисления для пространства параметров размерности  $m=12$ .

**Выбор модели и проверка ее адекватности.** После уточнения параметров модели в отобранном подмножестве точек-претендентов осуществляется выбор точек с минимальными значениями интегрального критерия (отбор по критерию качества), успешно завершивших итерации. Затем это подмножество разбивается на кластеры уже в  $m$ -мерном пространстве параметров модели. От каждого из кластеров отбирается представитель по максимуму окружающих его точек. Для этих точек осуществляется проверка на стационарность и обратимость моделей с данными значениями параметров. Лишь после этого совершается окончательный выбор единственного представителя, но его возможные дублиеры из ближайшего окружения пока остаются. Окончательный вывод будет сделан после проверки адекватности выбран-

ной модели, т. е. ее пригодности для описания реального обрабатываемого процесса.

Адекватность модели оценивается по степени приближения к белому шуму последовательности  $a_t$ . По-видимому, нельзя от реального процесса требовать идеальной белизны, тем более при ограниченном объеме выборки.

При проверке независимости компонент  $a_t$  можно использовать простейшие критерии: критерий поворотных точек и критерий, основанный на знаках разностей [9].

Для критерия поворотных точек вычисляются статистики

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{при } a_i < a_{i+1} > a_{i+2} \text{ или } a_i > a_{i+1} < a_{i+2}, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

сумма которых  $c = \sum_{i=1}^{n-2} u_i$  достаточно быстро сходится к нормальному распределению со средним  $E(c) = 2/3(n-2)$  и дисперсией  $\text{var}(c) = (16n-29)/90$ . Нормированные отклонения  $\frac{c-E(c)}{\sqrt{\text{var}(c)}}$  близки к нормальному  $N(0,1)$ , по которому и строятся доверительные интервалы.

В случае критерия, основанного на знаках разностей, вычисляются статистики

$$u_i = \begin{cases} 1 & \text{при } a_{i+1} > a_i, \\ 0 & \text{при } a_{i+1} < a_i, \end{cases}$$

сумма которых также достаточно быстро сходится к нормальному распределению со средним  $E(c) = (n-1)/2$  и дисперсией  $\text{var}(c) = (n+1)/12$ . И здесь также нормированное отклонение  $\frac{c-E(c)}{\sqrt{\text{var}(c)}}$  близко к  $N(0,1)$ .

Важным является критерий, основанный на проверке близости корреляционной функции  $a_t$  к  $\delta$ -функции. При достаточной протяженности  $a_t$  компоненты ее корреляционной функции близки к нормальному распределенным с дисперсией  $1/n$ .

Пример корреляционной функции белого шума  $a_t$ , извлекаемого из приведенного в стационарное состояние исходного процесса, представлен на рис. 1. К сожалению, из графика видна неидеальная адекватность  $a_t$  белому шуму и частичные выходы его за пределы 99 %-ного доверительного интервала.

Несколько более трудоемок критерий, основанный на проверке степени близости кумулятивной периодограммы последовательности  $a_t$  к кумулятивной периодограмме идеального белого шума и оценке ее отклонений по критерию Колмогорова [2]. При этом вычисляется вначале периодограмма случайной последовательности

$$I(f_i) = \frac{2}{n} \left[ \left( \sum_{t=1}^n a_t \cos 2\pi f_i t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^n a_t \sin 2\pi f_i t \right)^2 \right]$$



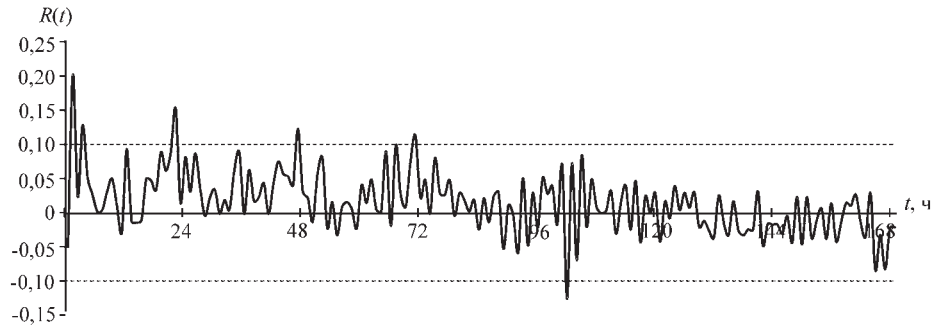


Рис. 1. Автокорреляционная функция последовательности белого шума  $a_t$  (сплошная кривая), верхняя и нижняя границы 99 %-ного доверительного интервала (пунктирные линии)

(здесь  $f_i = i/n$  – частота), а затем нормированная кумулятивная периодограмма

$$C(f_j) = \sum_{i=1}^j I(f_i) / (nS^2).$$

Для белого шума  $C_0(f_j) = 2f_j$ ,  $f_j \in (0; 0,5)$ . Отклонение реальной кумулятивной периодограммы от идеальной, отвечающей белому шуму, подчиняется распределению Колмогорова с нулевым средним и дисперсией  $1/q$ , где

$$q = \begin{cases} (n-2)/2 & \text{для четных } n, \\ n(n-1)/2 & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

График отклонения приведен на рис. 2.

И наконец, уже не связанное с проверкой адекватности, но полезное на будущее построение распределения  $a_t$  и возможную оценку его близости к нормальному распределению иллюстрирует рис. 3.

**Прогнозирование однородных нестационарных процессов АРСС.** Завершающим этапом данной работы является построение прогноза наблю-

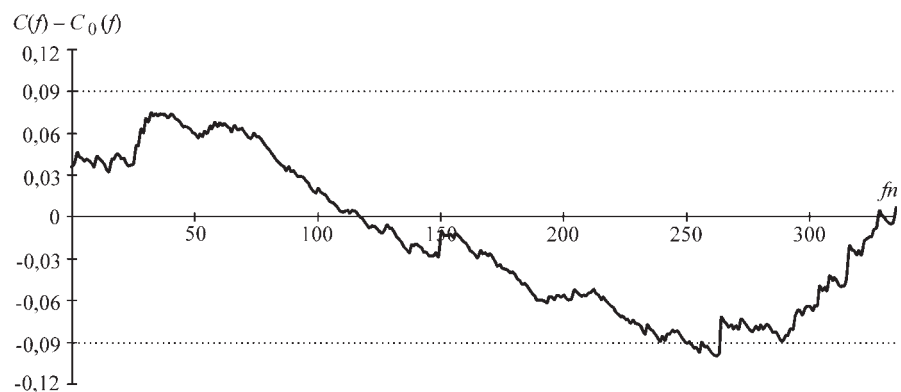


Рис. 2. Отклонение нормированной кумулятивной периодограммы  $C(f)$  последовательности  $a_t$  от кумулятивной периодограммы идеального белого шума  $C_0(f)$  (сплошная кривая) и границы 99 %-ного доверительного интервала (пунктирные линии)

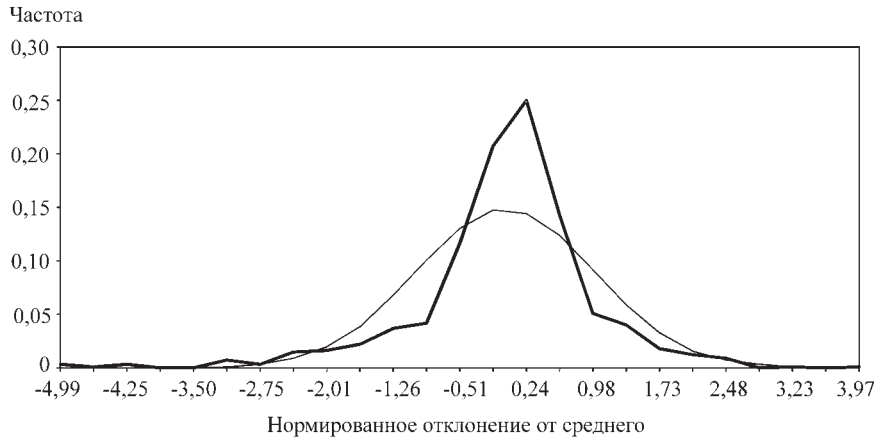


Рис. 3. Нормированная гистограмма распределения значений  $a_t$  (жирная кривая) и гистограмма стандартной нормальной случайной величины (тонкая кривая)

даемого процесса и оценка его точности. Идентификация и вычисление параметров модели осуществлялись по стационарному процессу  $W_t$ , получаемому из исходного  $Z_t$ . При прогнозировании мы возвращаемся к  $Z_t$ , используя полученные оценки этих параметров.

Прогнозирование осуществляется с помощью линейной разностной модели последовательным продвижением на один шаг. На каждом шаге прогноз получается как условное математическое ожидание при известных значениях  $Z_t$  и вычисленных заранее значениях последовательности  $a_t$  на интервале  $t < n$ . Когда измеренные значения процесса и вычисленные значения  $a_t$  исчерпываются, вместо  $Z_t$  используются их прогнозные значения  $\hat{Z}_t$ , а вместо  $a_t$  при  $t > n$  математические ожидания  $Z_t$  (нулевые значения). При этом в линейной разностной модели в качестве приведенных параметров АР будем использовать

$$\prod_{i=1}^k \Phi_{p_i}(B^{s_i}) \nabla_{s_i}^{d_i} = \sum_{i=0}^{n_{p_i}^*} \varphi_i^{**} B^{g_i}, \quad \varphi_0^{**} = 1, \quad (12)$$

т. е. теперь в параметрах  $\varphi_i^{**}$  будут учтены и сезонные разности. Постоянная компонента сигнала вычисляется по оценке математического ожидания процесса  $W_t$  после взятия сезонных разностей из  $Z_t$  и параметрам АР из (1):

$$\theta_0 = \mathbf{G} W_s, \quad W_s = \frac{1}{n - n_d + 1} \sum_{t=n_d}^n W_t, \quad \mathbf{G} = \prod_{i=1}^k \left( 1 - \sum_{j=1}^{p_i} \varphi_{ij} \right). \quad (13)$$

Прогнозирование осуществляется в соответствии с формулой

$$\hat{Z}_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^{n_q} \theta_i^* a_{t-m_i} - \sum_{i=1}^{n_p^*} \varphi_i^{**} Z_{t-g_i} \quad (14)$$

в предположении регулярности процесса, не прерываемого праздничными днями. Если праздник попадает в зону пролонгации, он обрабатывается в соответствии с одной из семи ситуаций с возможным перемещением рабочих

дней или введением компенсационных. Прогноз праздничных суток основывается на минимальных данных из субботних и воскресных показаний [1].

Точность прогноза  $Z_t$  оценивается процессом СС с использованием представления теперь уже нестационарного процесса

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i a_{t-i}, \quad \psi_0 = 1.$$

Коэффициенты вычисляются по формулам [2]

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{для } i=0, \\ \sum_{j=1}^i \phi_j^{**} \psi_{i-j} - \theta_i^* & \text{для } i \geq 1. \end{cases}$$

Дисперсия прогноза для  $l$ -го момента ( $l=1, \dots, L$ )

$$V(l) = S_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2. \quad (15)$$

Квантили для доверительных интервалов зависят от закона распределения белого шума  $a_t$ . Если он оказывается нормальным, то 95 %-ный квантиль  $q$  будет 1,96, а 99 %-ный квантиль  $q$  соответственно 2,58. И доверительные интервалы для прогноза в  $l$ -й точке имеют вид

$$Z_{\text{up}}(l) = \hat{Z}_{n+1} + q \sqrt{V(l)}, \quad Z_{\text{down}}(l) = \hat{Z}_{n+1} - q \sqrt{V(l)}.$$

Если распределение  $a_t$  неизвестно и нет возможности его оценить, в крайнем случае можно использовать неравенство Чебышева

$$P\left(|\hat{Z}_{n+1}| > \lambda \sqrt{V(l)}\right) \geq \frac{1}{\lambda^2}$$

(для 95 %-ной вероятности пребывания в доверительном интервале потребуется квантиль  $q = 4,47$ , более чем в 2 раза превышающий соответствующий квантиль для нормального распределения). При  $\lambda = 5$  получим вероятность выхода за доверительные границы 4 %.

В последующем мы рассчитываем оценивать закон распределения  $a_t$  и по нему выбирать квантили из [4, 5].

В предположении несмещенности вектора оценок параметров модели  $\hat{\beta}$  его точность можно охарактеризовать ковариационной матрицей. Обозначим вектор белого шума  $\mathbf{a} = \{a_t\}$ ,  $t \in (1, n)$ , и матрицу частных производных от этого вектора по вектору параметров  $\beta$  через  $\mathbf{A}(m, n)$ :

$$\mathbf{A} = (\partial \mathbf{a} / \partial \beta)_{\beta = \hat{\beta}}.$$

Частные производные берутся численно. Тогда ковариационная матрица вектора оценок параметров модели  $\text{cov}(\hat{\beta}) = S^2 (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ .

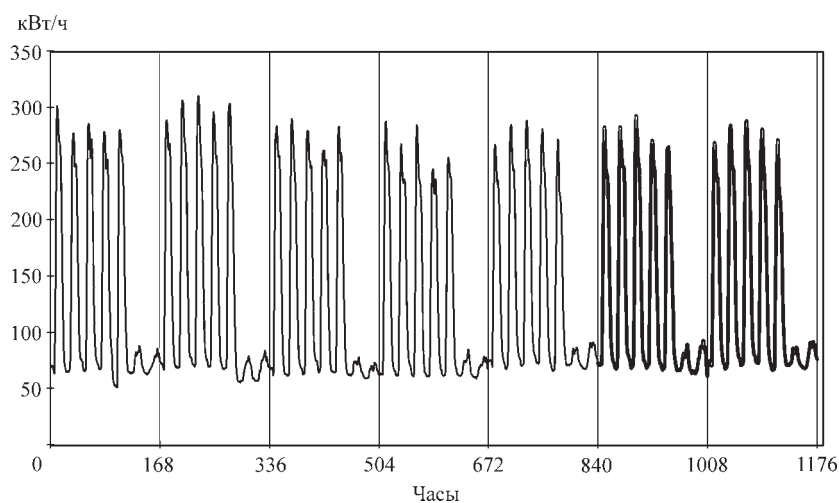


Рис. 4. Прогнозная база (тонкая кривая) и нескорректированный двухнедельный прогноз (жирная кривая)

Если наблюдаемый процесс для перевода его в однородный нестационарный подвергался функциональному преобразованию, то после построения прогноза с доверительными интервалами он должен быть подвергнут обратному функциональному преобразованию. Если из сигнала извлекались детерминированные компоненты, их прогноз должен быть объединен с прогнозом стохастического процесса.

**Примеры использования мультипликативной модели при прогнозировании данных энергопотребления.** На рис. 1–3 были представлены примеры, относящиеся к проверке соответствия модели последовательности

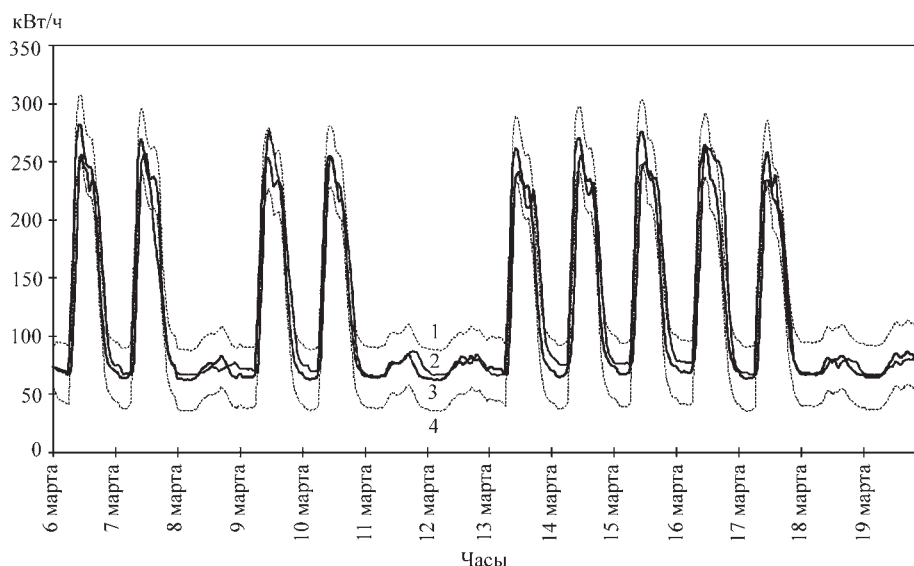


Рис. 5. Двухнедельный прогноз с коррекцией праздничного дня и доверительным интервалом на фоне фактических данных: фактические данные (кривая 2), скорректированный прогноз (3), верхняя (1) и нижняя (4) границы 95 %-ного доверительного интервала

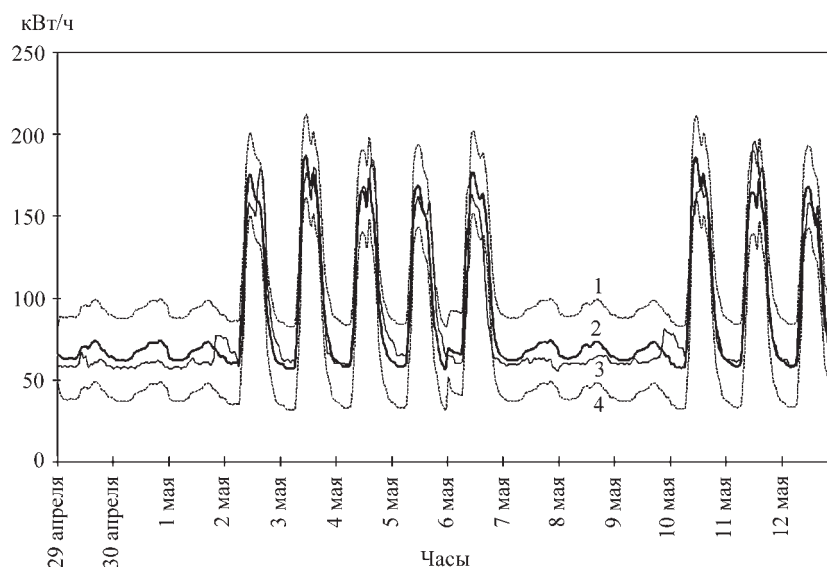


Рис. 6. Двухнедельный прогноз с коррекцией двух праздничных дней и доверительным интервалом на фоне фактических данных: фактические данные (кривая 3), скорректированный прогноз (2), верхняя (1) и нижняя (4) границы 95 %-ного доверительного интервала

исходного процесса на интервале прогнозной базы. Результаты прогнозирования с ее помощью приведены на рис. 4–6.

Результат двухнедельного прогноза исходного процесса без обработки праздничного дня, попадающего в интервал пролонгации, показан на рис. 4. Используемая модель обладала следующей структурой:

$$S_i = \{1, 24, 168\}, \quad p_i = \{2, 1, 1\}, \quad q_i = \{1, 1, 1\}, \quad d_i = \{0, 0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

с вектором параметров модели

$$\beta = (0,505, 0,096, 0,127, -0,747, -0,537, -0,100, -0,065)$$

и СКО белого шума  $S = 5,865$ . Количество интервалов сезонности  $k = 3$ .

Результат преобразования прогноза, приведенного на рис. 4, с учетом праздничного дня представлен на рис. 5.

Двухнедельный прогноз с двумя праздничными днями (1 и 9 мая), попадающими в интервал пролонгации, иллюстрирует рис. 6. Используемая в этом случае модель соответствовала структуре

$$S_i = \{1, 24, 168\}, \quad p_i = \{1, 1, 1\}, \quad q_i = \{1, 1, 1\}, \quad d_i = \{0, 0, 0\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

с вектором параметров

$$\beta = (0,478, 0,053, 0,991, -0,379, -0,081, 0,478)$$

и СКО белого шума  $S = 6,213$ .

**Заключение.** В представленной работе, как и в [1], основное внимание уделено вопросам практического использования мультипликативной моде-

ли. Исходным при ее построении являлся стационарный процесс, полученный на этапе предварительной обработки.

Мультипликативная модель характеризуется расширенным количеством избыточных параметров, что делает практически нереальным традиционный путь оценки начального приближения для ее базовых параметров с использованием автокорреляционной и частной автокорреляционной функций.

В данной работе предложен иной подход, основанный на выборочном дихотомическом зондировании пространства параметров модели с постепенным сужением области поиска и отбором на каждом шаге наиболее перспективных претендентов на построение адекватной процессу модели.

Для получения уточненных непрерывных оценок параметров модели предложено использовать двухтактный алгоритм скорейшего спуска.

После завершения процедуры скорейшего спуска формируются кластеры полученных оценок, находятся центры их сгущения, проверяются для них условия стационарности и обратимости и степень адекватности отобранных моделей исходному процессу.

Успешно прошедшие все испытания претенденты используются для прогноза исходного процесса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахметьянов Р. Р., Делегодина Л. А., Копылова Н. П. и др.** Мультипликативная модель сезонного энергопотребления предприятий // *Автометрия*. 2008. **44**, № 3. С. 106.
2. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов (Прогноз и управление). М.: Мир, 1974. Вып. 1.
3. **Бэкон Д. У., Броэксховен Л. Х.** Предсказание временных рядов // *Статистические методы для ЭВМ* /Под ред. К. Энслейна, Э. Релстона, Г. С. Уилфа. Пер. с англ. М.: Наука, 1986. С. 434.
4. **Орлов А. И.** Современная прикладная статистика // *Заводская лаборатория*. 1998. **64**, № 3. С. 52.
5. **Орлов А. И.** Прикладная статистика XXI в. // *Экономика XXI века*. 2000. № 9. С. 3.
6. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
7. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.
8. **Рао С. Р.** Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
9. **Кендэл М.** Временные ряды. М.: Финансы и статистика, 1981.

*Поступила в редакцию 20 июня 2007 г.*