

**К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ
ТРАНСФОРМАНТЫ ОДНОКРАТНОГО ОТРАЖЕНИЯ**

В. Л. Ложкин, Ю. А. Рыжов

(Москва)

Дается анализ общей формулы для трансформанты однократного отражения, полученной в работе [1]. Рассматривается одна из наиболее удобных с точки зрения программирования на ЭВМ аппроксимаций общей формулы. Исследуется вопрос о погрешности этой аппроксимации, в частности о том, какие условия необходимо выполнить, чтобы эта погрешность была меньше любой заранее заданной величины.

Трансформанта однократного отражения является одним из важнейших параметров, характеризующих взаимодействие разреженного газа с поверхностью твердого тела [2]. Общая формула для указанной трансформанты при отражении от однородной анизотропной дифференцируемой случайной поверхности была получена в работе [1]. Однако непосредственное использование этой формулы затруднено входящим в нее довольно сложным выражением для вероятности пересечения поверхности с траекторией газовой частицы, которое имеет вид

$$I(T) = \int_{\dot{f}(t_0)}^{\infty} \rho [f(t_0), \dot{\xi}(t_0) | S(T)] [\dot{\xi}(t_0) - \dot{f}(t_0)] d \dot{\xi}(t_0) \quad (1)$$

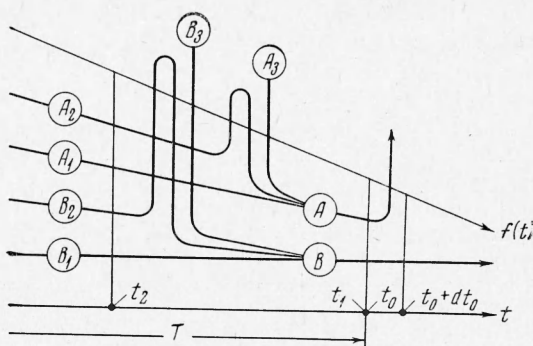
Здесь $\xi(t)$ — случайная функция, характеризующая поверхность в направлении t ; $f(t)$ — функция, описывающая траекторию газовой частицы; t_0 — фиксированная точка (или момент) на оси t ; $\dot{\xi}(t_0)$ и $\dot{f}(t_0)$ — производные функций $\xi(t)$ и $f(t)$, взятые в момент t_0 ; T — некоторый известный интервал, предшествующий моменту t_0 ; $S(T)$ — условие того, что на интервале T $\xi(t) < f(t)$; $\rho [f(t_0), \dot{\xi}(t_0) | S(T)]$ — условная плотность совместного распределения $\xi(t_0)$ и $\dot{\xi}(t_0)$ при значении $\xi(t_0) = f(t_0)$ и условии $S(T)$.

Чтобы привести формулу (1) к виду, удобному для численных расчетов, легче всего воспользоваться аппроксимацией [1], при которой величина T ограничивается интервалом корреляции T_k , а $S(T)$ заменяется условием того, что $\xi(t) < f(t)$ в конечном числе точек $t_i \in T$, $i = 1 \div n$. Если точки взять на одинаковых расстояниях друг от друга и первую из них совместить с началом интервала T , а последнюю — с его концом, то выражение (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} I(T) \approx I(t_i, i = 1 \div n) &= \int_{\dot{f}(t_0)}^{\infty} \rho [f(t_0), \dot{\xi}(t_0) | S(t_i, i = 1 \div n)] \times \\ &\times [\dot{\xi}(t_0) - \dot{f}(t_0)] d \dot{\xi}(t_0) = \int_{\dot{f}(t_0)}^{\infty} \int_{-\infty}^{f(t_1)} \cdots \int_{-\infty}^{f(t_n)} \rho [f(t_0), \dot{\xi}(t_0), \xi(t_1), \dots \\ &\dots, \xi(t_n) | \dot{\xi}(t_0) - \dot{f}(t_0)] d \xi(t_n) \dots d \xi(t_1) d \dot{\xi}(t_0) \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{f(t_1)} \cdots \int_{-\infty}^{f(t_n)} \rho [\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)] d \xi(t_n) \dots d \xi(t_1) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Такой вид уже допускает несложное программирование на ЭВМ путем разложения многомерных интегралов в сходящиеся ряды по тетраэдрическим функциям [3] или с помощью метода Монте-Карло [4].

Беря число n достаточно большим, можно было бы свести погрешность от замены (1) на (2) практически до нуля, если бы с ростом n в значительной степени не возрастала длительность вычислений. Поэтому одной



Фиг. 1

из главных задач, возникающих при такой аппроксимации является оценка минимального числа точек, достаточного для того, чтобы погрешность аппроксимации

$$\Delta = \frac{I(t_i, i = 1 \div n) - I(T)}{I(t_i, i = 1 \div n)} \quad (3)$$

не превышала допустимой величины. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа. При выводе формул в отдельных случаях использовались данные, полученные в результате анализа профилограмм стандартных образцов поверхностей 6 ÷ 14 классов чистоты (ГОСТ 9378-60).

Итак, рассмотрим задачу о минимальном числе точек, считая поверхность однородным нормальным дифференцируемым случайным полем и используя при этом следующую терминологию [5]. Будем называть выбросом любое пересечение случайной функцией $\xi(t)$ траектории частицы $f(t)$. Если пересечение идет снизу вверх, то выброс будем называть положительным, если сверху вниз — то отрицательным. Расстояние между соседними выбросами разных знаков будем называть длительностью выброса. Если же на данном интервале происходят 2, 3 и более пересечений, то будем говорить о двукратном, трехкратном и т. д. выбросе на этом интервале. Пусть далее A — среднее число реализаций, имеющих на бесконечно малом интервале $(t_0, t_0 + dt_0)$ положительный выброс, и B — среднее число реализаций, проходящих на этом интервале ниже траектории частицы. Разделим указанные реализации на три типа в зависимости от условий $S(t_i, i = 1 \div n)$ и $S(T)$ (фиг. 1):

- 1) реализации, удовлетворяющие обоим условиям (A_1, B_1) ;
- 2) реализации, удовлетворяющие только первому условию (A_2, B_2) ;
- 3) реализации, не удовлетворяющие ни одному из условий (A_3, B_3) .

Используя эти обозначения, а также учитывая то, что момент t_1 непосредственно предшествует моменту t_0 , и на бесконечно малом интервале $(t_0, t_0 + dt_0)$ величины A, A_1, A_2 и A_3 являются бесконечно малыми по сравнению с B, B_1, B_2 и B_3 , получим

$$I(t_i, i = 1 \div n) dt_0 = (A_1 + A_2) / (B_1 + B_2), \quad I(T) dt_0 = A_1 / B_1$$

откуда

$$|\Delta| = \left| \left(\frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2} - \frac{A_1}{B_1} \right) / \left(\frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2} \right) \right| = \left| \frac{A_2}{A_1 + A_2} - \frac{A_1}{A_1 + A_2} \frac{B_2}{B_1} \right| < \max(\Delta_1, \Delta_2) \quad (4)$$

где

$$\Delta_1 = A_2 / (A_1 + A_2), \quad \Delta_2 = B_2 / B_1 \quad (5)$$

Оценим сначала величину Δ_2 . Легко заметить, что она равна

$$\Delta_2 = pr / (1 - pr) \quad (6)$$

где pr — вероятность появления четных выбросов на малых интервалах $\Delta t_i = (t_{i-1}, t_i)$, $i = 2 \div n$ при условии $S(t_i, i = 1 \div n)$. Имея в виду, что на таких интервалах вероятность появления многократных выбросов быстро уменьшается с увеличением их кратности, можно ограничиться в данном случае рассмотрением только двукратных выбросов.

Оценим сначала вероятность появления такого выброса на интервале Δt_i при условии $[S(t_{i-1}), S(t_i)]$.

Пусть выброс начинается в момент τ_1 и заканчивается в момент τ_2 . Обозначая искомую вероятность через $p_{\Delta t_i}$, а соответствующую ей плотность через $W(\tau_1, \tau_2)$, будем иметь

$$p_{\Delta t_i} = \int_0^{\Delta t_i} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\Delta t_i} W(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \quad (7)$$

Пусть далее

$$\xi(\tau_1) = \xi_1, \quad \xi(\tau_2) = \xi_2, \quad f(\tau_1) = f_1, \quad f(\tau_2) = f_2, \quad \dot{f}_1 = \dot{f}_2 = \dot{f}$$

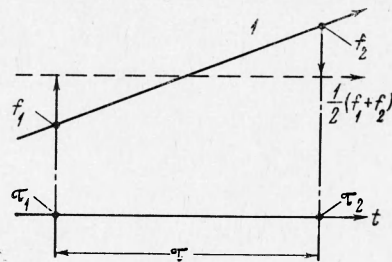
Тогда [5]

$$W(\tau_1, \tau_2) = \int_{\dot{f} - \infty}^{\infty} \int_{\dot{f} - \infty}^{\dot{f}} (\xi_1 - \dot{f})(\dot{f} - \xi_2) \rho(f_1, f_2, \xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \quad (8)$$

где $\rho(f_1, f_2, \xi_1, \xi_2)$ — плотность совместного распределения величин $\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1$, и $\dot{\xi}_2$ при значениях $\xi_1 = f_1, \xi_2 = f_2$.

Покажем, что величина $W(\tau_1, \tau_2)$ становится максимальной, если траекторию частицы повернуть вокруг собственной точки, лежащей на высоте $(f_1 + f_2) / 2$ до совмещения с горизонтальным уровнем (фиг. 2). Нумеруя случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1$ и $\dot{\xi}_2$ в порядке их написания и учитывая нормальность $\xi(\dot{t})$, получим

$$W(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4\pi^2 M^{1/2}} \int_{\dot{f} - \infty}^{\infty} \int_{\dot{f} - \infty}^{\dot{f}} (\xi_1 - \dot{f})(\dot{f} - \xi_2) \exp \left[-\frac{1}{2M} (M_{11} \dot{f}_1^2 + M_{22} \dot{f}_2^2 + M_{33} \dot{\xi}_1^2 + M_{44} \dot{\xi}_2^2 + 2M_{12} \dot{f}_1 \dot{f}_2 + 2M_{13} \dot{f}_1 \dot{\xi}_1 + 2M_{14} \dot{f}_1 \dot{\xi}_2 + 2M_{23} \dot{f}_2 \dot{\xi}_1 + 2M_{24} \dot{f}_2 \dot{\xi}_2 + 2M_{34} \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2) \right] d\dot{\xi}_2 d\dot{\xi}_1 \quad (9)$$



Фиг. 2

где

$$M = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix}$$

d_{ij} — вторые центральные моменты распределения случайных величин с номерами i и j ; M_{ij} — алгебраические дополнения элементов d_{ij} в определителе M . Обозначим горизонтальный уровень $(f_1 + f_2) / 2$ через c , интервал $\tau_2 - \tau_1$ — через τ и перейдем к новым переменным $u = \xi_1 - f$, $v = \xi_2 - f$. Тогда, имея в виду, что

$$M_{22} = M_{11}, \quad M_{44} = M_{33}, \quad M_{23} = -M_{14}, \quad M_{24} = -M_{13}$$

получим

$$W(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4\pi^2 M^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{j^2}{M} [M_{33} + M_{34} - \tau(M_{13} + M_{14}) + \frac{\tau^2}{4}(M_{11} - M_{12})] \right\} \exp \left[-\frac{c^2(M_{11} + M_{12})}{M} \right] F(\tau, j) \quad (10)$$

где

$$F(\tau, j) = \int_0^{\infty} \int_0^{-\infty} \exp \left\{ -\frac{j}{2M} [2(M_{33} + M_{34}) - \tau(M_{13} + M_{14})] (u + v) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2M} [M_{33}(u^2 + v^2) + 2M_{34}uv + 2c(M_{13} - M_{14})(u - v)] \right\} uv du dv \quad (11)$$

Выражение

$$\left\{ -\frac{j^2}{M} [M_{33} + M_{34} - \tau(M_{13} + M_{14}) + \frac{\tau^2}{4}(M_{11} - M_{12})] \right\},$$

стоящее под знаком экспоненты в (10), не может быть положительным (иначе для вертикальных траекторий ($j = \pm \infty$) величина $W(\tau_1, \tau_2)$ была бы равна бесконечности). Поэтому

$$W(\tau_1, \tau_2) \leq \frac{1}{4\pi^2 M^{1/2}} \exp \left[-\frac{c^2(M_{11} + M_{12})}{M} \right] F(\tau, j) \quad (12)$$

Найдем максимальное значение интеграла $F(\tau, j)$. Дифференцируя его по j , получим

$$\frac{\partial F(\tau, j)}{\partial j} = \int_0^{\infty} \int_0^{-\infty} \frac{1}{2M} [2(M_{33} + M_{34}) - \tau(M_{13} + M_{14})] (u + v) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{j}{2M} [2(M_{33} + M_{34}) - \tau(M_{13} + M_{14})] (u + v) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2M} \times \right. \quad (13) \\ \left. \times [M_{33}(u^2 + v^2) + 2M_{34}uv + 2c(M_{13} - M_{14})(u - v)] \right\} uv du dv$$

В декартовых координатах область интегрирования правой части (13) занимает четвертый квадрант (фиг. 3). Разделим ее пополам биссектрисой OO_1 и сравним значения подынтегральной функции в точках $A_1(a, -b)$ и $A_2(b, -a)$, лежащих симметрично относительно биссектрисы. Нетрудно заметить, что сумма значений в указанных точках обращается в нуль,

если $f = 0$, и имеет постоянный знак, если $f \neq 0$. Учитывая далее, что область интегрирования в (13) можно представить как множество симметричных относительно биссектрисы OO_1 точек вида A_1 и A_2 , а само интегрирование заменить суммированием по этим точкам, окончательно получим

$$\frac{\partial F(\tau, f)}{\partial f} = \begin{cases} 0, & \text{если } f = 0 \\ \neq 0, & \text{если } f \neq 0 \end{cases}$$

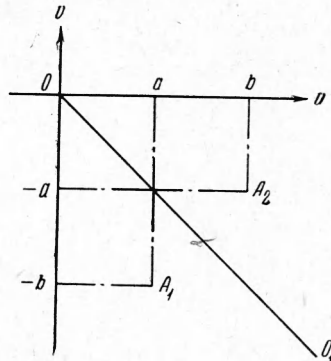
Таким образом, функция $F(\tau, f)$ имеет в нуле единственный экстремум по переменной f . Ясно, что это — максимум, иначе выполнялось хотя бы одно из условий

$$F(\tau, 0) < F(\tau, \infty), \quad F(\tau, 0) < F(\tau, -\infty),$$

Но оба они невыполнимы, так как $F(\tau, \infty) = F(\tau, -\infty) = 0$ и при любом конечном значении f величина $F(\tau, f) > 0$.

Сказанное выше позволяет записать неравенство (13) в виде

$$\begin{aligned} W(\tau_1 \tau_2) &\leq \frac{1}{4\pi^2 M^{1/2}} \exp \left[- \frac{c^2 (M_{11} + M_{12})}{M} \right] F(\tau, 0) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_1 \xi_2 \rho(c, c, \xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \quad (14) \end{aligned}$$



Фиг. 3

что и требовалось доказать.

Стоящий в конце неравенства (14) интеграл можно найти, используя работу [5]. После некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \xi_1 \xi_2 \rho(c, c, \xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 = \\ &= \frac{M_{33}}{2\pi\sigma^6 (1-R^2)^{3/2}} \exp \left[- \frac{1}{1+R} \left(\frac{c}{\sigma} \right)^2 \right] \Psi(r, h) \quad (15) \\ &\sigma = k(0), \quad R = R(\tau) = k(\tau) / k(0) \end{aligned}$$

где $k(\tau)$ — корреляционная функция $\xi(t)$

$$\begin{aligned} r &= \frac{M_{34}}{M_{33}}, \quad h = \frac{c\sigma^2 (M_{13} - M_{14})}{M_{33} - M_{34}} \left(\frac{1-R^2}{M_{33}} \right)^{1/2}, \\ \Psi(r, h) &= (r + h^2) E(r, h) + \frac{(1-r^2)^{1/2}}{2\pi} \exp \left(- \frac{h^2}{1+r} \right) - \\ &\quad - \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{h^2}{2} \right) [1 - \Phi(a)], \\ E(r, h) &= \frac{1}{2\pi (1-r^2)^{1/2}} \int_h^\infty \int_h^\infty \exp \left[- \frac{x^2 + y^2 - 2rxy}{2(1-r^2)} \right] dx dy, \\ a &= h \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{1/2}, \quad \Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \exp \left(- \frac{x^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

Заметим, что погрешность Δ_2 будет невелика (а именно этот случай практически интересен), лишь при соответствующей малости интервалов

Δt_i . На любом таком интервале величину $R(\tau)$ можно разложить в ряд Маклорена

$$R(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_0^{(2n)}}{(2n)!} \tau^{2n}, \quad R_0^{(2n)} = \left. \frac{d^{2n} R(\tau)}{d\tau^{2n}} \right|_{\tau=0} \quad (16)$$

и ограничиться несколькими первыми членами. Имея при этом в виду, что $(\tau_1, \tau_2) \in \Delta_i$, а также учитывая (14), (15) и обобщенную формулу Райса для среднего числа нулей производной $d^n \xi(t) / dt^n$ на единице длины [6]

$$N_n = \frac{1}{\pi} \left| \frac{R_0^{(2n+2)}}{R_0^{(2n)}} \right|^{1/2} \quad (17)$$

легко получить

$$W(\tau_1, \tau_2) \lesssim \frac{\pi N_0^3}{8} \left[\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 - 1 \right] \tau \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{c}{\sigma} \right)^2 \tau^2 \right] \Psi(1, h) \quad (18)$$

где

$$\Psi(1, h) = \frac{1}{2} (1 + h^2) [1 - \Phi(h)] - \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{h^2}{2} \right), \quad h = \frac{c}{\sigma} \left[\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2}$$

Последующая подстановка (18) в (7) приводит к неравенству

$$p_{\Delta t_i} \lesssim \frac{\pi^2 N_0^3}{48} \left[\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 - 1 \right] \Delta t_i^3 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{c}{\sigma} \right)^2 \right] \Psi(1, h) \quad (19)$$

Можно показать, что это неравенство остается в силе не только при малых значениях Δt_i , но и вообще при любых значениях. Кроме того, из анализа профилограмм следует, что для реальных поверхностей $N_1 / N_0 \geq 1.5$. При этом, как легко убедиться, правая часть неравенства (19) достигает своего максимального значения на среднем уровне поверхности ($c = 0$), откуда окончательно получаем

$$p_{\Delta t_i} \lesssim \frac{\pi^2 N_0^3}{96} \left[\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 - 1 \right] \Delta t_i^3 \quad (20)$$

Напомним, что $p_{\Delta t_i}$ есть вероятность появления двукратного выброса на единичном интервале Δt_i при условии $[S(t_{i-1}), S(t_i)]$. Если заменить это условие на $S(t_i, i = 1 \div n > 2)$, то, как показывает обработка профилограмм, величина $p_{\Delta t_i}$ становится несколько меньше. Учитывая эту особенность, а также все сказанное относительно четных выбросов на стр. 104, и обозначая через $p_{\Delta t_i} r$ вероятность появления таких выбросов на единичном интервале Δt_i при условии $S(t_i, i = 1 \div n)$, будем иметь

$$p_{\Delta t_i} r \lesssim \frac{\pi^2 N_0^3}{96} \left[\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 - 1 \right] \Delta t_i^3 \quad (21)$$

Рассмотрим случай, при котором вероятность $p_{\Delta t_i} r$ настолько мала, что среднее число соответствующих выбросов на интервале корреляции — Nr заведомо меньше единицы, Тогда эти выбросы можно считать независимыми, а их появление описывать законом Пуассона [7]. При этом для вероятности pr получим

$$pr = 1 - \exp(-Nr) \lesssim Nr \lesssim p_{\Delta t_i} r T_k / \Delta t_i \quad (22)$$

Если поверхность нормальная, то согласно [8] $T_k \approx 2 / N_0$ и формулы (21), (22) и (6) приводят к следующему результату:

$$\Delta_2 \approx \frac{Nr}{48 - Nr} \approx \frac{(\pi N_0 \Delta t_i)^2 [(N_1 / N_0)^2 - 1]}{48 - (\pi N_0 \Delta t_i)^2 [(N_1 / N_0)^2 - 1]} \quad (23)$$

Заметим, что найденное выражение будет давать сравнительно верную оценку Δ_2 лишь при условии $Nr < 1$ (или $\Delta_2 < 0.02$). В противном случае оно приводит к сильному завышению указанной погрешности, и тогда его можно рассматривать просто как верхнюю границу, за которую погрешность Δ_2 заведомо не переходит.

Теперь обратимся к погрешности Δ_1 . Она равна вероятности pr при условии положительного выброса в момент t_0 . Аналитически трудно оценить влияние этого условия. Однако непосредственный анализ профилотграмм показывает, что оно приводит к некоторому уменьшению указанной вероятности и соответственно к неравенствам

$$\Delta_1 < p_4, \quad \Delta < \Delta_2 \quad (24)$$

Таким образом на основании (4), (23) и (24) получаем следующую оценку числа точек $t_i \in T$, достаточного для того, чтобы погрешность аппроксимации (2) не превышала величины Δ

$$n \geq 1 + 2\pi \sqrt{\frac{1 + \Delta}{48\Delta} \left[\left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2 - 1 \right]} \quad (25)$$

$\frac{N_1}{N_0}$	n			
	$\Delta = 0.01$	$\Delta = 0.02$	$\Delta = 0.05$	$\Delta = 0.10$
1	1	1	1	1
2	17	12	8	6
3	27	19	13	10
4	36	26	17	13
5	46	33	21	16
6	55	39	26	19
7	64	46	30	22
8	73	52	34	25
9	83	59	38	28
10	92	66	42	31

Значения n , вычисленные по формуле (25), приведены в таблице. Следует, однако, подчеркнуть, что эти значения рассчитаны на самые неблагоприятные (в смысле величины n) траектории молекул и в конкретных случаях могут быть значительно уменьшены [1].

Поступила 7 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Л о ж к и н В. Л., Р ы ж о в Ю. А. О влиянии шероховатости на процесс взаимодействия разреженного газа с поверхностью твердого тела. ПМТФ, 1972, № 4.
2. Б а р а н ц е в Р. Г. Отражение молекул газа от шероховатых поверхностей. Аэродинамика разреженных газов., сб. 1, Изд-во ЛГУ, 1963.
3. K e n d a l l M. G. Proof of relation connected with the tetrachoric series and its generalization. Biometrika, 1941, vol. 32, p. 2.
4. Д ы м а р с к и й Я. С., Л о з и н с к и й Н. Н., М а к у ш к и н А. Т., Р о з е н б е р г В. Я., Э р г л и с В. Р. Справочник программиста, т. 1, Л., Судпромгиз, 1963.
5. Т и х о н о в В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970.
6. Л о н г е - Х и г г и н с М. С. Статистический анализ случайной движущейся поверхности. Сб. «Ветровые волны», М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. С в е ш н и к о в А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., «Наука», 1968.
8. Р о м а н е н к о А. Ф., С е р г е е в Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М., «Советское радио», 1968.