

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Изучению поведения стержней при динамическом нагружении в упругой постановке посвящено в настоящее время достаточное количество работ, обзор их приведен в [1, 2]. Однако задачи о динамической устойчивости стержней в вязкоупругой постановке сравнительно мало изучены.

В данной работе показано, что исследование задачи динамической устойчивости вязкоупругого стержня при возрастающей сжимающей нагрузке сводится к изучению систем нелинейных интегродифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решения которых находятся численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Рассмотрено влияние принципиальных факторов на поведение вязкоупругого стержня.

1. Известно [3—7], что многие задачи о колебаниях и динамической устойчивости стержней и балок из композитных материалов, обладающих вязкоупругими свойствами, в нелинейной постановке сводятся к решению системы нелинейных интегродифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$(1.1) \quad \ddot{T}_k + \omega_k^2 [1 - \mu_k P(t)] T_k = X_k \left\{ t, T_1, \dots, T_N, \int_0^t \varphi_k(t, \tau, T_1(\tau), \dots, T_N(\tau)) d\tau \right\},$$

$$T_k(0) = T_{0k}, \quad \dot{T}_k(0) = \dot{T}_{0k}, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $T_k = T_k(t)$ — искомые функции времени; P , X_k и φ_k — заданные непрерывные функции в области изменения аргументов; $\omega_k =$, $\mu_k =$ const.

В [8, 9] для системы интегродифференциальных уравнений предложен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул. Здесь этот метод распространяется и для уравнений (1.1). Для этого систему (1.1) запишем в интегральной форме. Полагая $t = t_m$, $t_m = mh$ ($h =$ const, $m = 1, 2, \dots$) и заменяя интегралы некоторыми квадратурными формулами, для вычислений значений $T_{mk} = T_k(t_m)$ находим рекуррентную формулу

$$(1.2) \quad T_{mk} = T_{0k} \cos \omega_k t_m + \frac{\dot{T}_{0k}}{\omega_k} \sin \omega_k t_m + \frac{1}{\omega_k} \sum_{r=0}^{m-1} A_r^{(k)} \left\{ \mu_k \omega_k^2 P_r T_{rk} + \right.$$

$$\left. + X_k \left(t_r, T_{r1}, \dots, T_{rN}, \sum_{s=0}^r B_s^{(k)} \varphi_k(t_r, t_s, T_{s1}, \dots, T_{sN}) \right) \right\} \sin \omega_k (t_m - t_r),$$

$$m = 1, 2, \dots, k = 1, \dots, N$$

($A_r^{(k)}$, $B_s^{(k)}$ — числовые коэффициенты, не зависящие от вида подынтегральных функций и принимающие различные значения в зависимости от использованных квадратурных формул [10]).

В [11] дано обоснование предложенного численного метода. Показано, что погрешность метода совпадает с погрешностью, получаемой при использовании квадратурных формул, и имеет тот же порядок малости относительно шага интерполяции.

2. Рассмотрим задачу о вязкоупругом стержне, шарнирно закрепленном по концам и подвергающемся действию сжатой силы P , изменяющейся во времени t : $P = \bar{P}(t)$. Предположим, что у стержня есть начальный прогиб $u_0 = u_0(x)$ и его сечение является постоянным по длине.

Связь между напряжением σ и деформацией ε примем в виде

$$\sigma = E(1 - R^*)(\varepsilon + \gamma\varepsilon^3), \quad R^*\varphi = \int_0^t R(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau,$$

где E — мгновенный модуль упругости; $R(t)$ — ядро релаксации; γ — коэффициент нелинейности, зависящий от физических свойств материала стержня.

Примем деформацию в предположении Бернулли — Эйлера $\varepsilon = -z\partial^2(u - u_0)/\partial x^2$ ($u = u(x, t)$ — полный поперечный прогиб стержня, z — расстояние от точки поперечного сечения стержня до нейтральной оси).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси вязкоупругого стержня при сделанных предположениях аналогично [1, 4] имеет вид

$$(2.1) \quad EJ(1 - R^*) \frac{\partial^4(u - u_0)}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f - 3\gamma EJ_1(1 - R^*) \times \\ \times \left[2 \frac{\partial^2(u - u_0)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2(u - u_0)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2(u - u_0)}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4(u - u_0)}{\partial x^4} \right],$$

где EJ — жесткость стержня при изгибе; m — масса стержня, отнесенная к единице длины; $J_1 = \int_F z^4 dF$; F — площадь поперечного сечения стержня; f — дополнительная статическая нагрузка.

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничным условиям задачи, запишем в форме

$$(2.2) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad u_0(x) = \sum_{k=1}^N T_{0k} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

(l — длина стержня). Подставляя (2.2) в (2.1) и выполняя процедуру Бубнова — Галеркина, для определения $T_k = T_k(t)$ получим систему нелинейных интегродифференциальных уравнений

$$(2.3) \quad \ddot{T}_k + k^2\omega^2 \left[k^2(1 - R^*) - \frac{P(t)}{P_0} \right] T_k = k^4\omega^2(1 - R^*) T_{0k} + \frac{4\alpha_k f}{m k \pi} - \\ - \frac{3\gamma\omega^2 J_1}{4J} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \sum_{n,i,j=1}^N a_{knij} (1 - R^*) (T_n - T_{0n}) (T_i - T_{0i}) (T_j - T_{0j}), \quad k = 1, \dots, N.$$

Здесь P_0 — эйлера критическая нагрузка; $\omega = \sqrt{\frac{EJ}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4}$ — частота основного тона колебаний стержня; α_k равно 1, если k нечетное, и 0, если k четное; $a_{knij} = n^2 i^2 j^2 [-2ij(\delta_{n-k+i+j} + \delta_{n-k-i-j} + \delta_{n-k+i-j} + \delta_{n-k-i+j} - \delta_{n+k-i-j} - \delta_{n+k-i+j} + j^2(\delta_{n-k+j-k} + \delta_{n-i+j-k} - \delta_{n-i+j-k} - \delta_{n-i-j-k} - \delta_{n+i+j-k} - \delta_{n+i-j+k} + \delta_{n+i-j-k})]$; $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 0; \\ 0 & \text{при } i \neq 0. \end{cases}$

Рассмотрим случай, когда сила $P(t)$ возрастает пропорционально времени. Пусть $P(t) = cFt$, где c характеризует скорость изменения сжимающего напряжения. Введя в (2.3) безразмерные величины

$$\frac{T_k}{i}, \frac{T_{0k}}{i}, t^* = \frac{\omega t}{\sqrt{S^*}} = \frac{P}{P_0}, \frac{\sqrt{S^*}}{\omega} R(t), \frac{f}{i c^2 m}, \frac{3\gamma J_1 i^2}{4J} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4$$

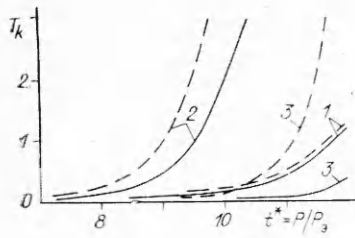


Рис. 1

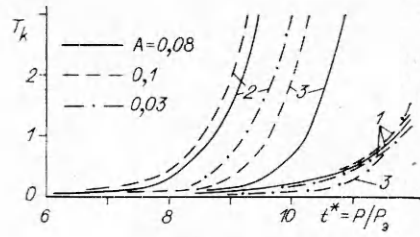


Рис. 2

и сохраняя при этом прежние обозначения, находим

$$(2.4) \quad \frac{1}{S^*} \ddot{T}_k - k^2 [t^* - k^2 (1 - R^*)] T_k = k^4 (1 - R^*) T_{0k} + \frac{4\alpha_k}{k\pi} f - \\ - \gamma \sum_{n,i,j=1}^N a_{knij} (1 - R^*) (T_n - T_{0n}) (T_i - T_{0i}) (T_j - T_{0j}), \\ T_k(0) = T_{0k}, \quad \dot{T}_k(0) = \dot{T}_{0k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Здесь $i = \sqrt{J/F}$ — радиус инерции сечения; $S^* = P_0^{*3} (\pi v E / cl)^2$ — безразмерный параметр скорости нагружения; $P_0^* = P_0 / EF$ — безразмерный параметр эйлеровой нагрузки; $v = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале стержня; ρ — плотность материала стержня.

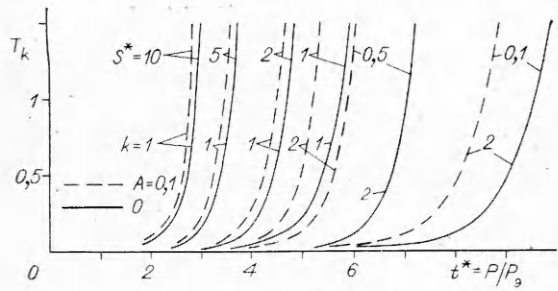
Таким образом, в результате имеем задачу Коши относительно безразмерных неизвестных T_k , $k = 1, \dots, N$. Заметим, что (2.4) является частным случаем системы (1.1). Интегрирование системы (2.4) в широких пределах изменения механических параметров стержня выполнялось численным методом, предложенным в п. 1. Формула (1.2) при ядре Колтунова — Ржаницына $R(t) = A t^{\alpha-1} \exp(-\beta t)$, $\alpha = 0,25$, $\beta = 0,05$ примет вид

$$(2.5) \quad T_{mk} = T_{0k} \cos \lambda_k t_m + \frac{\dot{T}_{0k}}{\lambda_k} \sin \lambda_k t_m + \frac{S^*}{\lambda_k} \sum_{r=0}^{m-1} A_r \left\{ \frac{4\alpha_k f}{h\pi} + k^2 t_r T_{rk} - \right. \\ \left. - \gamma \sum_{n,i,j=1}^N a_{knij} (T_{rn} - T_{0n}) (T_{ri} - T_{0i}) (T_{rj} - T_{0j}) + \frac{h^3 A}{\alpha} \sum_{s=0}^r B_s (T_{r-s,k} - T_{0k}) \times \right. \\ \left. \times \exp(-\beta t_s) + \frac{\gamma A}{\alpha} \sum_{n,i,j=1}^N a_{knij} \sum_{s=0}^r B_s (T_{r-s,n} - T_{0n}) (T_{r-s,i} - T_{0i}) (T_{r-s,j} - T_{0j}) \times \right. \\ \left. \times \exp(-\beta t_s) \right\} \sin \lambda_k (t_m - t_r), \quad k = 1, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots,$$

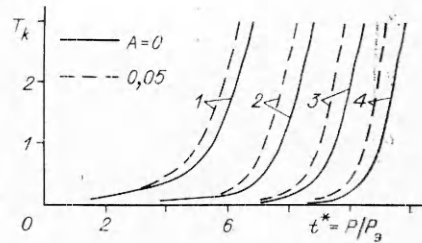
где $\lambda_k = \sqrt{S^* k^2}$; $A_0 = h/2$, $A_r = h$, $r = 1, \dots, m-1$; $B_0 = h^\alpha/2$, $B_r = h^\alpha [r^\alpha - (r-1)^\alpha]/2$, $B_s = h^\alpha [(s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha]/2$, $s = 1, \dots, r-1$.

Вычисление значения $T_{mk} = T_k(t_m)$ по формуле (2.5) проводилось на ЭВМ ЕС-1061. Результаты вычислений в виде графиков приведены на рис. 1—6. Здесь аналогично [2, 12] в качестве критерия, определяющего критическое время, а вместе с тем и критическую нагрузку, принято условие, что стрела прогиба не должна превысить радиус инерции сечения стержня.

На рис. 1, 2 представлены результаты вычислений для $S^* = 0,1$, $T_{0k} = 10^{-3}$, $f = 0$, $\gamma = 0$. По оси абсцисс отложен параметр t^* , равный отношению переменной величины сжимающей силы к эйлеровой нагрузке, а по оси ординат — безразмерная стрела прогиба T_k . Кривые 1—3 отвечают $k = 1, 2, 3$, сплошные и штриховые на рис. 1 — упругому ($A = 0$) и вязкоупругому случаям ($A = 0,05$). Видно, что аналогично упругому случаю [2] резкое увеличение прогибов имеет место прежде всего при изгибе стержня по двум полуволнам ($k = 2$). Судя по кривой 2, прогиб,



Р и с. 3



Р и с. 4

равный радиусу инерции сечения, достигается при нагрузке $P_{кр} = 9,06 P_0$, а в упругом случае $P_{кр} = 9,6 P_0$. Полученные результаты показывают, что учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению критической нагрузки.

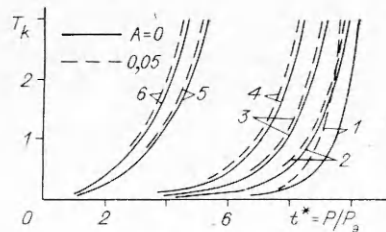
Далее расчеты были получены и для значений коэффициента вязкости $A = 0,03; 0,08; 0,1$ (рис. 2). В этих случаях коэффициент динамичности K_d , равный отношению динамической критической нагрузки к статической (эйлеровой), составляет соответственно 9,3; 8,76; 8,58. Как видим, с увеличением значения коэффициента вязкости критическая нагрузка уменьшается.

Графики на рис. 3 (при $T_{0k} = 10^{-3}$, $f = 0$, $\gamma = 0$) были построены для различных значений S^* . Здесь приведены кривые для тех k , при которых возрастание прогибов является интенсивным. Видно, что коэффициент K_d растет по мере уменьшения S^* . Заметим, что при $S^* = 1$ критическое число полуволн k оказалось равным 2 в отличие от упругого случая, где $k = 1$.

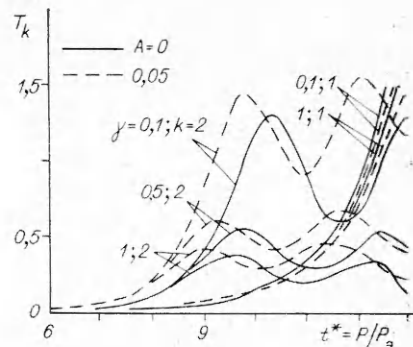
По рис. 4 можно проследить эффект стрелы начального прогиба на поведение сжатого вязкоупругого стержня при динамическом нагружении. Здесь даны «критические» кривые T_k при $S^* = 0, 1$, $f = 0$, $\gamma = 0$, $k = 2$ для последовательно уменьшающихся T_{0k} в пределах от 10^{-1} до 10^{-4} . Для начальной стрелы прогиба $T_{0k} = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ (линии 1—4) отвечает $K_d = 5,1; 7,2; 9,1; 10,5$.

Исследовалось влияние на поведение стержня дополнительной статической поперечной нагрузки (рис. 5). Для $T_{0k} = 10^{-3}$, $\gamma = 0$, $S^* = 0,1$ и $f \neq 0$ $k = 1$, в то время как при $f = 0$ $k = 2$. Таким образом, при наличии поперечной нагрузки эффект появления высших форм устойчивости ослабевает. Полученные значения K_d при $f = 0; 0,025; 0,05; 0,1; 1; 1,5$ (линии 1—6) равны соответственно 9,06; 8,7; 7,86; 6,96; 3,66; 3,12.

Изучалось влияние физической нелинейности на поведение вязкоупругого стержня. На рис. 6 ($T_{0k} = 10^{-3}$, $S^* = 0,1$, $f = 0$) приведены графики кривых T_k для $\gamma = 0,1; 0,5; 1$, соответственно $K_d = 9,2; 12,2; 12,4$. Анализ результатов показывает, что при $\gamma \leq 0,1$ решения линейной



Р и с. 5



Р и с. 6

и нелинейной задач близки, а при $\gamma > 0,4$ существенно отличаются друг от друга, это отличие, например, при $\gamma = 0,5$ составляет около 30%. Отметим, что учет нелинейных свойств материала приводит к увеличению критических нагрузок и времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.— М.: Гостехиздат, 1956.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем.— М.: Наука, 1967.
3. Бадалов Ф. Б. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости.— Ташкент: Фан, 1980.
4. Эшматов Х., Курбанов П. Параметрические колебания упруговязкого стержня // Механика полимеров.— 1975.— № 3.
5. Эшматов Х., Курбанов П. Параметрические колебания вязкоупругого стержня с нелинейной наследственной характеристикой // ПММ.— 1975.— Т. 39, № 4.
6. Филатов А. И., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
7. Матяш В. И. О динамической устойчивости шарнирно опертого упруговязкого стержня // Механика полимеров.— 1971.— № 2.
8. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М. Исследование колебаний вязкоупругих систем с многими степенями свободы методом, основанным на использовании квадратурных формул // Электронное моделирование.— 1988.— № 4.
9. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ.— 1987.— Т. 51, № 5.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.— М.: Физматгиз, 1959.
11. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х. Об обосновании численного метода, основанного на использовании квадратурных формул интегродифференциальных уравнений вязкоупругости // ДАН УзССР.— 1986.— № 11.
12. Лаврентьев М. А., Ишлинский Ю. А. Динамические формы потерь устойчивости упругих систем // ДАН СССР.— 1949.— Т. 64, № 6.

г. Ташкент

Поступила 17/II 1989 г.,
в окончательном варианте — 14/VI 1991 г.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

В № 6, 1991 г. допущены следующие авторские опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
25	18-я снизу	$\dots \frac{\rho_0 (R^3 - a_3^3)}{R^3 k}$	$\dots \frac{\rho_0 (R^3 - a_3^3)}{3k}$
29	рис. 6	ρ_2 , МПа	ρ_2 , ГПа