УДК 621.391

ОБ АЛГОРИТМЕ ПОИСКА ПО ЧАСТОТЕ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В. Г. Гетманов

115409, Москва, Каширское шоссе, 31
Московский инженерно-физический институт (технический университет)
E-mail: vgetm@starnet.ru

Рассматривается алгоритм поиска по частоте в задаче оценивания параметров моделей полигармонических сигналов. Для формирования алгоритма используется свойство симметрии функционалов частичных остаточных сумм. Предлагается алгоритм поиска по частоте, обеспечивающий снижение объемов вычислений. Определяется эффективность решения задачи оценивания.

Ключевые слова: полигармонические модели, оценивание, параметры, нестационарные многочастотные сигналы.

Введение. Алгоритмы поиска по частоте являются составной частью системы алгоритмов решения задачи оценивания параметров моделей полигармонических сигналов (далее — полигармонических моделей).

Вычисление оценок параметров для данных моделей, как правило, сводится к нахождению экстремума соответствующих функций правдоподобия. Благодаря нелинейности полигармонических моделей, обусловливающей многоэкстремальность функционалов частичных остаточных сумм, определение параметров производится на основе прямой минимизации. Выбор вида алгоритма поиска по частоте влияет на объемы вычислений функционалов частичных остаточных сумм и эффективность решения задачи оценивания.

Предлагаемая работа представляет собой развитие работы [1] на случай полигармонических моделей. Пример решения задачи с поиском по частоте для двухчастотной полигармонической модели реализован в [2]. В отличие от [3], где предлагается оптимизационный метод типа градиентного спуска для минимизации многоэкстремальных функционалов, в данной работе описывается применение оптимизационного метода нулевого порядка, обеспечивающего гарантированное нахождение минимума для рассматриваемых функционалов. Предлагаемая работа, как и [4], подтверждает возможность эффективного использования «неавторегрессионного подхода» для оценивания параметров полигармонических моделей.

Здесь будут рассмотрены: постановка задачи оценивания параметров полигармонических моделей и анализ вида зависимости функционалов частичных остаточных сумм от частотных параметров; формирование алгоритма поиска по частоте, который обеспечивает снижение объемов вычислений функционалов частичных остаточных сумм; определение эффективности решения задачи оценивания.

Постановка задачи. Обратимся к задаче оценивания параметров полигармонических моделей на локальном (малом) интервале времени и к соответствующей задаче частотного поиска. Пусть амплитуды и частоты гармонических составляющих исходного полигармонического сигнала, который наблюдается на этом интервале, меняются незначительно. В этом случае полигармоническая модельная функция $x_M(a, b, \omega, Ti)$ может быть принята в виде

$$x_M(a, b, \omega, Ti) = \sum_{l=1}^{L} (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti). \tag{1}$$

Положим, что произведенные наблюдения $y(Ti)$, модель $x_M(a, b, \omega, Ti)$ и погрешности наблюдений $w(i)$ для дискретных моментов времени Ti, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, определенные на локальном интервале длительностью TN, связаны модельной зависимостью

$$y(Ti) = \sum_{l=1}^{L} (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti) + w(i). \tag{2}$$

В полигармонической модели $x_M(a, b, \omega, Ti)$ (1) будем считать известным L — число гармонических составляющих. Положим, что погрешности $w(i)$ — независимые нормально распределенные случайные числа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, не зависящей от номера i. Для модели (1) $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_L)$ и $b^T = (b_1, b_2, \ldots, b_L)$ являются амплитудными параметрами, которые обычно принимают произвольные значения $-\infty \leqslant a_l \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant b_l \leqslant \infty$, $l = 1, 2, \ldots, L$. Будем полагать, что частотные параметры модели $\omega^T = (\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_L)$ подвержены ограничениям $\bar{\omega}_1 \leqslant \omega_l \leqslant \bar{\omega}_2$, $l = 1, 2, \ldots, L$; граничные значения частот $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, одинаковые для всех $l = 1, 2, \ldots, L$, считаются заданными. Вектор частотных параметров принадлежит L-мерному кубу $\Omega_0^L = \{\omega : \bar{\omega}_1 \leqslant \omega_l \leqslant \bar{\omega}_2,$ $l = 1, 2, \ldots, L\}$, который является допустимым множеством $\omega \in \Omega_0^L$. Векторы амплитудных параметров $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_L)$ и $b^T = (b_1, b_2, \ldots, b_L)$ входят линейно в уравнение модели (1); вектор частотных параметров $\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_L)$ входит в (1) нелинейно.

Погрешности $w(i)$ в наблюдениях аддитивны и представляют собой последовательность независимых нормально распределенных случайных чисел. Ввиду этого функционал, определяющий меру близости наблюдений и полигармонической модели и связанный с соответствующей функцией правдоподобия, может быть представлен выражением

$$S(y, a, b, \omega) = \sum_{i=0}^{N-1} \Big(y(Ti) - \sum_{l=1}^{L} (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti) \Big)^2. \tag{3}$$

Оценивание параметров полигармонических моделей реализуется на основе задачи минимизации функционала (3)

$$(a^\circ, b^\circ, \omega^\circ) = \arg\{ \min_{a,\, b,\, \omega \,\in\, \Omega_0^L} S(a, b, \omega, y)\}.$$

Полигармоническая модельная функция (1), являющаяся линейной по части параметров, представляется в виде скалярного произведения

$$\sum_{l=1}^{L} (a_l \cos \omega_l Ti + b_l \sin \omega_l Ti) = \beta^T \varphi(\omega, Ti), \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

где $\beta^T = (a_1, \ldots, a_L,\ b_1, \ldots, b_L)$ — вектор линейных параметров размерности $(2L, 1)$; $\varphi(\omega, Ti)$ — векторная базисная функция, зависящая от нелинейных параметров $\omega^T =$ $= (\omega_1, \ldots, \omega_L)$. Для базисной функции размерности $(2L,\ 1)$ справедлива запись

$$\varphi^T(\omega, Ti) = (\cos \omega_1 Ti,\ \cos \omega_2 Ti,\ \ldots,\ \cos \omega_L Ti,\ \sin \omega_1 Ti,\ \sin \omega_2 Ti,\ \ldots,\ \sin \omega_L Ti).$$

Сформируем матрицу плана сигнала $X(\omega)$ в виде прямоугольной матрицы размерности $(N,\, 2L)$ и вектор наблюдений Y размерности $(N, 1)$:

$$X(\omega) = \left| \begin{array}{cccccc} \varphi_1(\omega T \cdot 0) & \cdots & \varphi_L(\omega T \cdot 0) & \varphi_{L+1}(\omega T \cdot 0) & \cdots & \varphi_{2L}(\omega T \cdot 0) \\ \varphi_1(\omega T \cdot 1) & \cdots & \varphi_L(\omega T \cdot 1) & \varphi_{L+1}(\omega T \cdot 1) & \cdots & \varphi_{2L}(\omega T \cdot 1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(\omega T(N-1)) & \cdots & \varphi_L(\omega T(N-1)) & \varphi_{L+1}(\omega T(N-1)) & \cdots & \varphi_{2L}(\omega T(N-1)) \end{array} \right|,$$

$$Y^T = (y(T \cdot 0),\, y(T \cdot 1),\, \ldots,\, y(T(N-1)).$$

Функционал (3) с помощью введенных $X(\omega)$, Y и β может быть переписан в матрично-векторном виде

$$S(Y,\, \beta,\, \omega) = (Y - X(\omega)\beta)^T (Y - X(\omega)\beta). \tag{4}$$

Нахождение оптимальных параметров модели сводится к минимизации по β и ω функционала $S(Y,\, \beta,\, \omega)$. С этой целью фиксируются нелинейные частотные параметры $\omega = \mathrm{const}$ $(\omega \in \Omega_0^L)$ и решается оптимизационная задача нахождения линейных параметров

$$\beta^\circ(\omega) = \arg\{ \min_{\beta,\, \omega = \mathrm{const}} S(Y,\, \beta,\, \omega)\}.$$

Частично оптимальный вектор $\beta^\circ(\omega)$ находится с помощью решения линейной системы

$$A(\omega)\beta^\circ(\omega) = b(\omega), \tag{5}$$

где $A(\omega) = X^T(\omega)X(\omega)$, $b(\omega) = X^T(\omega)Y$. Функционал частичной остаточной суммы $S_0(\omega) = S(Y,\, \beta^\circ(\omega),\, \omega)$ вычисляется подстановкой решения $\beta^\circ(\omega)$ из (5) в исходный функционал (4). После проведения необходимых выкладок получим компактное выражение

$$S_0(\omega) = S(Y,\, \beta^\circ(\omega),\, \omega) = Y^T Y - {\beta^\circ}^T(\omega) b(\omega). \tag{6}$$

Минимизация $S_0(\omega)$ реализуется с помощью поиска по частоте в Ω_0^L, $\omega \in \Omega_0^L$. На ее основе находятся оценки частотных ω° и амплитудных β° параметров полигармонической модели

$$\omega^\circ = \arg\{ \min_{\omega \in \Omega_0^L} S_0(\omega)\}, \qquad \beta^\circ = \beta^\circ(\omega^\circ).$$

Эффективность решения задачи оценивания в части объемов вычислений, очевидно, существенным образом зависит от используемого алгоритма поиска по частоте, подходящий выбор которого может обеспечить снижение объемов вычислений функционалов $S_0(\omega)$.

Анализ функционалов частичных остаточных сумм. Проанализируем вид и особенности функционалов частичных остаточных сумм $S_0(\omega)$. Вследствие того что частотные параметры входят в уравнение модели (1) нелинейным образом (располагаются под знаком функции sin или cos), функционалы $S_0(\omega)$ имеют достаточно сложный вид. В общем случае они являются многоэкстремальными: с оврагами, глобальными минимумами и системой локальных максимумов и минимумов.

Многоэкстремальный характер $S_0(\omega)$ для одночастотной модели был установлен в [1]. Для случая двухчастотной модели и функции наблюдений, выбранной в виде суммы двух косинусоидальных функций без шумов, вычислим для квадратной области $\bar{\omega}_1 \leqslant \omega_1 \leqslant \bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \bar{\omega}_2$ значения $S_0(\omega_1, \omega_2)$:

$$y(Ti) = A_1 \cos(\omega_{01}Ti + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_{02}Ti + \varphi_2), \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{7}$$

при параметрах: $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $f_{01} = 5{,}87$ Гц, $f_{02} = 6{,}37$ Гц, $\bar{f}_1 = 5{,}0$ Гц, $\bar{f}_2 = 8{,}9$ Гц ($\omega_{01} = 2\pi f_{01}$, $\omega_{02} = 2\pi f_{02}$, $\bar{\omega}_2 = 2\pi \bar{f}_2$, $\bar{\omega}_1 = 2\pi \bar{f}_1$), $\varphi_1 = 1{,}1$, $\varphi_2 = 2{,}1$, $N = 600$, $T = 0{,}005$. На рис. 1 для переменных $f_1 = \omega_1/2\pi$, $f_2 = \omega_2/2\pi$ представлена поверхность двухчастотной частичной остаточной суммы $S_0(f)$, $f^T = (f_1, f_2)$, из (6) с двумя глобальными минимумами с координатами $(f_1^\circ, f_2^\circ) = (5{,}87$ Гц, $6{,}37$ Гц$)$ и $(f_1^\circ, f_2^\circ) = (6{,}37$ Гц, $5{,}87$ Гц$)$, оврагами и системой локальных минимумов и максимумов.

Наличие двух глобальных минимумов обусловлено свойством симметрии частичной остаточной суммы $S_0(\omega_1, \omega_2) = S_0(\omega_2, \omega_1)$. Симметрия $S_0(\omega)$ сохраняется и в L-частотном случае. Действительно, исходя из рассматриваемого способа формирования базисных функций $\varphi(\omega, Ti)$, матрицы плана сигнала $X(\omega)$ и функционалов $S(\omega)$, $S_0(\omega)$ для частот ω_{l_1}, ω_{l_2}, вытекает справедливость равенства

$$S_0(\omega_1, \ldots, \omega_{l_1}, \ldots, \omega_{l_2}, \ldots, \omega_L) = S_0(\omega_1, \ldots, \omega_{l_2}, \ldots, \omega_{l_1}, \ldots, \omega_L). \tag{8}$$

Минимизация функционалов, подобных $S_0(\omega)$, может быть успешно осуществлена, скорее всего, только прямыми методами. В том случае, если начальный частотный вектор ω^1 достаточно близок к глобальному минимуму ω°, то минимизацию $S_0(\omega)$ следует реализовывать градиентным методом, как это предложено в [3]. Однако, когда относительно положения ω° нет точной информации, минимизацию $S_0(\omega)$ целесообразно реализовывать методом нулевого порядка. Так как функционал $S_0(\omega)$ является многоэкстремальным, то метод оптимизации $S_0(\omega)$ по $\omega \in \Omega_0^L$ на основе прямого перебора по заданным частотам может гарантировать нахождение глобального минимума.

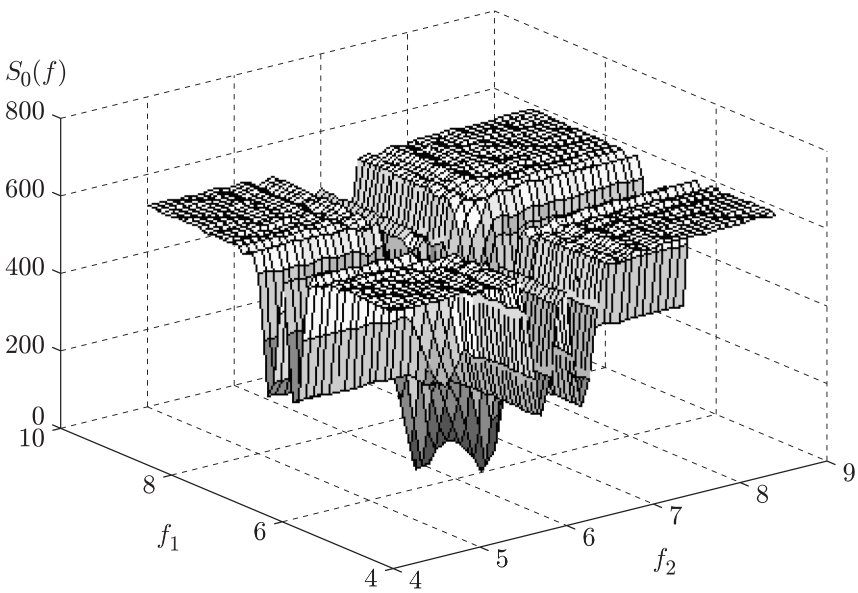

Рис. 1

Алгоритм поиска по частоте. Рассмотрим возможность уменьшения размеров исходного допустимого множества Ω_0^L. В силу отмеченного свойства симметрии (8) количество вычислений $S_0(\omega)$ может быть уменьшено. Для исключения лишних вычислений $S_0(\omega)$ поиск по частоте будем осуществлять по векторам $\omega^T = (\omega_1, \ldots, \omega_L)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\bar{\omega}_1 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_L \leqslant \bar{\omega}_2$ и принадлежат новому допустимому множеству

$$\bar{\Omega}_0^L = \{(\omega_1, \ldots, \omega_L) : \bar{\omega}_1 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_L \leqslant \bar{\omega}_2\}.$$

Легко представить, что размер нового допустимого множества $\bar{\Omega}_0^L$ будет существенно меньше, чем размер множества Ω_0^L.

Сформируем алгоритм поиска по частоте для $S_0(\omega)$ по векторам $\omega \in \bar{\Omega}_0^L$. Положим, что каждая из координат ω_l, $l = 1, \ldots, L$, принимает дискретные значения. Зададимся равномерной сеткой дискретных частот в диапазоне $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ из k_f частот, расположенных равномерно с шагом

$$\Delta\omega = (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)/(k_f - 1), \qquad \omega_k = \bar{\omega}_1 + \Delta\omega(k-1), \quad k = 1, \ldots, k_f. \tag{9}$$

Назначение шага $\Delta\omega$, как и k_f, определяет временные затраты и точность вычисления частотных и амплитудных параметров полигармонической модели. Видно, что при увеличении k_f величина шага по частоте $\Delta\omega$ уменьшается. Существует, однако, естественный предел уменьшения шага $\Delta\omega$: очень мелкий шаг приведет к тому, что в матрице плана сигнала $X(\omega)$ соседние столбцы будут мало отличаться друг от друга и вследствие этого матрица $A(\omega)$ линейной системы (5) будет плохо обусловленной.

Выберем L значений модельных частот $\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots, \omega_{k_L}$ из сетки дискретных частот ω_k. Заметим, что выбранные модельные частоты должны быть все различными, так как при одинаковых частотах определитель матрицы $A(\omega)$ (5) будет равен нулю. Чтобы обеспечить различие модельных частот, сформируем векторы индексов $k^T = (k_1, k_2, \ldots, k_L)$ таким образом, чтобы удовлетворялась система из L неравенств:

$$1 \leqslant k_1 \leqslant k_f - L + 1,$$

$$k_1 + 1 \leqslant k_2 \leqslant k_f - L + 2, \ldots, k_{L-2} + 1 \leqslant k_{L-1} \leqslant k_f - 1, \quad k_{L-1} + 1 \leqslant k_L \leqslant k_f. \tag{10}$$

Для $L = 2, 3$ приведем пример систем неравенств (10):

$$1 \leqslant k_1 \leqslant k_f - 1, \quad k_1 + 1 \leqslant k_2 \leqslant k_f;$$

$$1 \leqslant k_1 \leqslant k_f - 2, \quad k_1 + 1 \leqslant k_2 \leqslant k_f - 1, \quad k_2 + 1 \leqslant k_3 \leqslant k_f.$$

Чтобы пронумеровать последовательность векторов индексов $(k_{1s}, k_{2s}, \ldots, k_{Ls})$, $s = 1, \ldots, s_f$, в (10), воспользуемся методом формирования индексов для вложенных циклов. Для $L = 2$, $k_f = 5$ в качестве примера приведена пронумерованная аналогично последовательность векторов индексов (s, k_1, k_2):

$$(1,1,2),\ (2,1,3),\ (3,1,4),\ (4,1,5),\ (5,2,3),\ (6,2,4),\ (7,2,5),\ (8,3,4),\ (9,3,5),\ (10,4,5). \tag{11}$$

В данной последовательности троек целых чисел первые позиции отведены номеру s, вторые и третьи позиции — номерам k_1, k_2. Для предлагаемых значений L, k_f имеет место $s_f = 10$.

Пронумерованная подобным образом последовательность векторов индексов определяет алгоритм поиска по частоте, сводящийся к вычислениям векторов частот $\omega^s = (\omega_{k_{1s}}, \omega_{k_{2s}}, \ldots, \omega_{k_{Ls}})$ с использованием (9), (10) и вычислениям функционала $S_0(\omega^s)$ из (6), позволяющий решить задачу минимизации и нахождения параметров полигармонической модели

$$s^\circ = \arg\{\min_{1\leqslant s\leqslant s_f} S_0(\omega^s)\}, \qquad \omega^\circ = \omega^{s^\circ}, \quad \beta^\circ = \beta^\circ(\omega^\circ).$$

Определение эффективности решения задачи оценивания. С помощью статистической процедуры Монте-Карло найдем величины многомерных интегралов $V(\Omega_0^L)$, $V(\bar{\Omega}_0^L)$, которые будем принимать в качестве размеров допустимых множеств:

$$V(\Omega_0^L) = \int\limits_{\omega\in\Omega_0^L} d\omega_1, \ldots, d\omega_L; \qquad V(\bar{\Omega}_0^L) = \int\limits_{\omega\in\bar{\Omega}_0^L} d\omega_1, \ldots, \omega_L. \tag{12}$$

Введем коэффициент $\varepsilon(L)$ уменьшения размера $V(\bar{\Omega}_0^L)$ относительно размера $V(\Omega_0^L)$ на основе вполне естественного отношения

$$\varepsilon(L) = V(\bar{\Omega}_0^L)/V(\Omega_0^L).$$

Коэффициент $\varepsilon(L)$ пропорционален s_f — числу вычислений функционала $S_0(\omega)$ и позволяет оценить эффективность решения задачи оценивания.

На рис. 2 представлен график коэффициента относительного уменьшения размера области поиска по частоте $\varepsilon(L)$ в зависимости от L. Значения коэффициентов $\varepsilon(1) = 1{,}0$, $\varepsilon(2) = 0{,}5$, $\varepsilon(3) = 0{,}166$, $\varepsilon(4) = 0{,}002$ иллюстрируют относительное уменьшение размеров допустимого множества $\bar{\Omega}_0^L$, приводящее к снижению объемов вычислений $S_0(\omega)$ при реализации поиска по частоте. Очевидно, что количество вычислений $S_0(\omega)$ при простом переборе в Ω_0^L составляет величину $s_{f_1} = k_f^L$, а по предлагаемому алгоритму поиска по частоте в $\bar{\Omega}_0^L$ принимает значение $s_{f_2} = \varepsilon(L)k_f^2$. Для $k_f = 100$, $L = 4$ имеем в первом случае $s_{f_1} = 10^8$, во втором случае $s_{f_2} = 0{,}002 \cdot 10^8 = 2\cdot 10^5$, что свидетельствует о существенном повышении эффективности решения задачи оценивания.

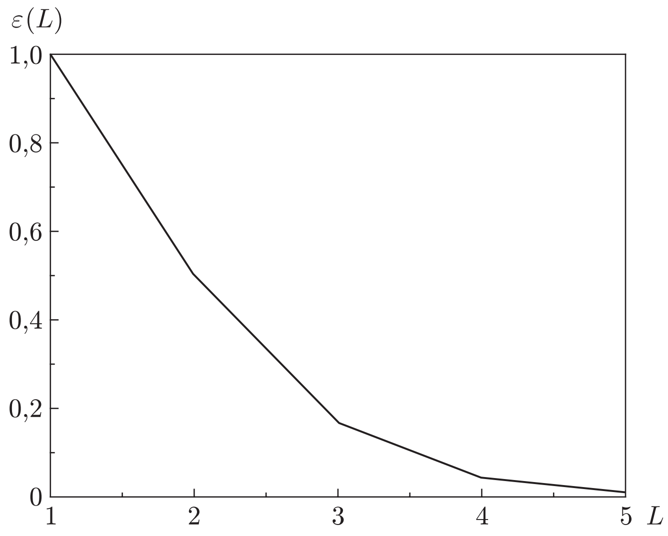

Рис. 2

Заключение. Алгоритм поиска по частоте для $L = 2, 3, 4$ и $k_f = 50, 100$ был успешно апробирован с помощью математического моделирования. Предложенный в данной работе алгоритм, позволивший значительно повысить эффективность решения задачи оценивания параметров полигармонических моделей, может быть широко использован для многочисленных задач спектрально-временного анализа нестационарных многочастотных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гетманов В. Г.** О частотном подпоиске в задаче оценивания параметров кусочно-синусоидальных функций // Автометрия. 1992. № 6. С. 93–98.
2. **Гетманов В. Г.** Алгоритм разделения близких по частоте источников вибрации // Колебания и вибрационная активность машин и конструкций. М.: Наука, 1988. С. 157–160.
3. **Баранов И. В., Езерский В. В.** Цифровой спектральный анализ полигармонического сигнала // Тр. 10-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применения». М.: РНТОРЭС им. А. С. Попова, 2008. Т. 1. С. 173–175.
4. **Свентковский Р. А.** Сверхразрешение сигналов: возможности, ограничения, неавторегрессионный подход // Радиотехника и электроника. 1998. № 3. С. 288–292.

Поступила в редакцию 12 марта 2009 г.