

линии. При этом они выходят за границу волновой зоны, определяемой значением θ ($\theta \rightarrow 0$).

Авторы выражают благодарность А. Т. Онуфриеву за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray E. P., Hart R. W., Farrell R. A. The structure of the internal wave Mach front generated by a point source moving in a stratified fluid // Phys. Fluids.— 1983.— V. 26, N 10.
2. Sharman R. D., Wurtele M. G. Ship waves and lee waves // Atmosph. Sci.— 1983.— V. 40, N 2.
3. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.— М.: Мир, 1981.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
5. Стурова И. В. Внутренние волны, возникающие при нестационарном движении источника в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 4.
6. Аксенов А. В., Можаяев В. В. и др. Структура внутренних волн в трехслойной жидкости со стратифицированным средним слоем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 3.

Поступила 22/X 1987 г.

УДК 532.5 + 517.958

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ПЛОСКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Капцов

(Красноярск)

Точных стационарных решений двумерных уравнений Эйлера известно относительно немного [1—3]. Это отчасти объясняется тем, что группа, допускаемая [4] этими уравнениями, бедна. В то же время прогресс, достигнутый в изучении нелинейных волновых уравнений [5, 6], позволяет частично перенести методы исследования и на эллиптические задачи. Цель работы — получение решений уравнения для функции тока и их анализ. Найденные решения описывают движение типа источника в завихренной жидкости, периодическое течение между двумя стенками, движение в прямоугольном цилиндре и ряд других.

1. В случае двумерного стационарного течения идеальной жидкости функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad \Delta\psi(x, y) = \omega,$$

причем завихренность ω есть функция от ψ . Для решения уравнения (1.1) можно при определенных видах правых частей использовать модифицированный метод разделения переменных и преобразование Беклунда [6].

Предполагается, что завихренность $\omega(\psi) = \varepsilon \sin \psi$ ($\varepsilon = \pm 1$). Решения (1.1) ищутся в виде [5] $\psi(x, y) = 4 \arctg(f(x)g(y))$, функции f, g удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(1.2) \quad f'^2 = nf^4 + mf^2 + k, \quad g'^2 = kg^4 + (\varepsilon - m)g^2 + n$$

(n, m, k — произвольные константы). Следовательно, завихренность и компоненты вектора скорости вычисляются по формулам

$$(1.3) \quad \omega = 4\varepsilon \frac{fg(1-f^2g^2)}{(1+f^2g^2)^2};$$

$$(1.4) \quad u = 4 \frac{fg'}{1+f^2g^2}, \quad v = -4 \frac{f'g}{1+f^2g^2}.$$

Выбор константы в (1.2) определяет тип течения. Пусть выполнены неравенства $n > 0, k, m < 0$ и $\varepsilon = -1$. Рассматриваются три случая: а) $4kn < m^2 < 1/4$; б) $4kn = m^2 < 1/4$; в) $4kn = m^2 = 1/4$. Сначала обсуждается наиболее вырожденная ситуация «в». При этом уравнениям (1.2) удовлетворяют функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right), \quad g(y) = 2\sqrt{n} \operatorname{th}\left(\frac{y}{2}\right)$. Тогда

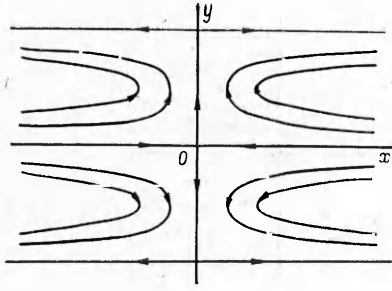
да на плоскости течения $R^2(x, y)$ прямые $x = 0$, $y = 0$ являются линиями тока и завихренность на этих прямых нулевая. Как следует из (1.3), в первом и третьем квадрантах плоскости $R^2(x, y)$ $\omega < 0$, а во втором и четвертом $\omega > 0$. Поскольку траектории определяются соотношением $\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{th}\left(\frac{y}{2}\right) = c$, где $|c| < 1$, то каждая связанная компонента линии тока обладает своей парой асимптот: $x = c$, $y = c$. Ввиду нечетности функций f , g достаточно знать картину линий тока в первом квадранте плоскости $R^2(x, y)$. Уравнение траектории, разрешенное относительно y , имеет вид $y(x) = 2\operatorname{arth}\left(c\operatorname{cth}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ ($0 < c < 1$). Следовательно, функция $y(x)$, найденная при $x > 2\operatorname{arth} c$, монотонно убывает. Компоненты вектора скорости

$$u = \frac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{y}{2}\right)\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{th}^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)}, \quad v = \frac{-2\operatorname{th}\left(\frac{y}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{th}^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)},$$

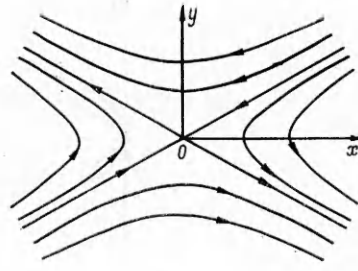
значит, $u \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Кроме того, завихренность стремится к нулю, когда x и y одновременно стремятся к бесконечности. Данное решение можно интерпретировать как течение внутри прямого угла, ограниченного координатными осями, либо как симметричное соударение двух размытых «струй». «Струи» размыты, так как давление непостоянно ни на одной из линий тока.

Пусть выполнены условия «б». Тогда уравнение (1.2) для g преобразованиями растяжения приводится к стандартному виду $g'^2 = (1 - g^2) \times (1 - p^2g^2)$, где константа p выражается через n, m, k . Значит, функция g может быть выражена через эллиптический синус амплитуды $\operatorname{sn} y$ [7, 8], имеет некоторый период T и дважды обращается в нуль на периоде. Ввиду инвариантности (1.2) относительно сдвига допустимо считать, что $g(0) = 0$. Функция $f = \sqrt{\frac{-m}{2n}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{-m}{2}} x\right)$. Следовательно, прямые $x = 0$, $y = TL/2$ — линии тока (L — любое целое число). В силу периодичности функции g и нечетности функций f, g достаточно знать картину линий тока в полуполосе $\{0 \leq y \leq T/2, x \geq 0\}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{-m}{2}} x\right) = 1$, то любая траектория $\operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{-m}{2}} x\right)g(y) = c$, где $c \neq 0$, обладает парой асимптот, параллельных оси Ox . Уравнение траектории определяет неявную функцию $x(y)$, производная которой $\frac{dx}{dy} = -c \sqrt{\frac{2}{-m}} \frac{g'}{g^2} \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\frac{-m}{2}} x\right)$, откуда несложно получить качественную картину линий тока (рис. 1). Отметим, что скорость при $x \rightarrow \infty$ ограничена, но не стремится к нулю.

Наконец, в случае «а» каждое из уравнений (1.2) в отдельности преобразованиями растяжения приводится к виду $h'^2 = (1 - h^2)(1 - p^2h^2)$ ($p \in R$). Сразу можно утверждать, что функции f, g выражаются через эллиптический синус амплитуды [7, 8], имеют периоды t_1, t_2 и по два нуля на периоде. Не ограничивая общности, допустимо считать, что $f(0) = g(0) = 0$. Следовательно, прямые $x = t_1L/2$, $y = t_2L/2$ (L — любое целое число) — линии тока. Для того чтобы представить картину линий тока на всей плоскости течения, в силу периодичности и нечетности функций f и g достаточно знать поведение траекторий в прямоугольной ячейке $P = \{0 \leq x \leq t_1/2, 0 \leq y \leq t_2/2\}$. Все линии тока, принадлежащие P , замкнуты и ограничены. Действительно, производные от f и g обращаются в нуль только в центре P , а сами функции не имеют нулей внутри P и достигают экстремума в центре ячейки. Линии тока являются линиями уровня функции $F(x, y) = f(x)g(y)$. Функция F достигает в центре P экстремума, а ее градиент не равен нулю внутри P . Значит, по теореме о регулярном интервале [9] линии уровня, принадлежащие P , замкнуты и ограниче-



Р и с. 1



Р и с. 2

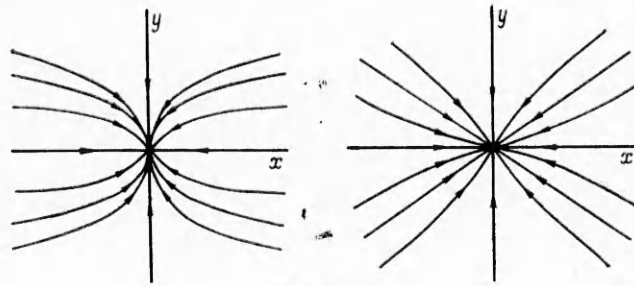
ны. Таким образом, вся плоскость течения разбивается на прямоугольные ячейки типа P . Внутри каждой ячейки есть вихрь. Приравнивая левые части уравнений (1.2) нулю, легко найти экстремумы функций f , g и показать, что $|fg| < 1$. Итак, согласно (1.3), можно утверждать, что завихренность обращается в нуль на границе ячейки и меняет знак при переходе через стороны прямоугольника P . Направления вращения вихрей, расположенных в соседних ячейках, также различны. Поскольку завихренность как функция от fg есть $\omega(c) = -4c(1 - c^2)/(1 + c^2)^2$, то в зависимости от того, достигает модуль произведения fg величины $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ (при этом значении ω имеет экстремум) или нет, у завихренности будет экстремум либо на линии $|fg| = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$, либо в центре ячейки. Если принять границу P за твердые стенки, то образуется течение в прямоугольном цилиндре.

Иное решение уравнений (1.2) получается, если выбрать параметры $\varepsilon = 1$, $n = 0$, $k < 0$, $0 < m < 1$. В этом случае произведение $fg = \sqrt{\frac{1-m}{m}} \frac{\text{ch}(\sqrt{m}x)}{\text{ch}(\sqrt{1-m}y)}$. Значит, прямые $y = \pm \sqrt{\frac{m}{1-m}}x$ — линии тока.

Любая другая траектория обладает парой асимптот, которые параллельны этим прямым. Завихренность меняет знак при переходе через прямые линии тока. Скорость и завихренность стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$ вдоль любой прямой $y = ax$ ($a \neq \pm \sqrt{\frac{m}{1-m}}$). Данное решение интерпретируется либо как течение внутри двухгранного угла, по уже необязательно прямого, как в случае «в», либо как соударение двух размытых «струй». Подробные рассуждения опускаются, так как они близки к приведенным ранее. Качественная картина линий тока изображена на рис. 2.

Представляет интерес решение типа стока или источника в завихренной жидкости. Одними из простейших решений уравнений (1.2) являются функции $f(x) = \sqrt{k}x$, $g(y) = \frac{1}{\sqrt{k} \text{sh } y}$, отвечающие параметрам $\varepsilon = 1$, $m = n = 0$, $k > 0$. Компоненты вектора скорости, согласно (1.4), $u = \frac{-4x \text{ch } y}{x^2 + \text{sh}^2 y}$, $v = \frac{-4 \text{sh } y}{x^2 + \text{sh}^2 y}$, а завихренность $\omega = 4 \frac{x \text{sh } y (\text{sh}^2 y - x^2)}{(\text{sh}^2 y + x^2)^2}$.

Линии тока задаются уравнениями $x = c \text{sh } y$ ($c \in R$). Начало координат является точкой разрыва скорости и завихренности. Однако расход $Q = \oint v dx + u dy$ в данном случае конечен и равен -8π , интеграл удобно брать по контуру $x^2 + \text{sh}^2 y = 1$. Следовательно, в начале координат находится сток. На линиях $x = \pm \text{sh } y$, $x = 0$, $y = 0$, за исключением точки разрыва, завихренность нулевая и меняет знак при переходе через эти линии. Скорость стремится к нулю при фиксированном y , когда $x \rightarrow \infty$. Если же взять какую-нибудь линию тока $x = c \text{sh } y$ и следить за изменением скорости вдоль нее, то $u \rightarrow -4c/(1 + c^2)$, $v \rightarrow 0$, когда x и y стремятся к бесконечности вдоль траектории, причем скорость будет достигать максимального значения при $|c| = 1$. В отличие от потенциального реше-



Р и с. 3

ния типа стока, являющегося центрально-симметричным, данное течение напоминает скорее четырехструйное движение.

Приведенное выше решение — предельный случай при $m \rightarrow 0$ решения $f = \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sh}(V\bar{m}x)$, $g = \sqrt{\frac{1-m}{k}} \frac{1}{\sin(\sqrt{1-m}y)}$ ($k > 0$, $0 < m < 1$), которое также описывает течение типа стока в завихренной жидкости. Здесь каждая траектория обладает парой асимптот, параллельных одной из прямых $y = \pm \sqrt{\frac{m}{1-m}}x$. Эти прямые — линии тока, на которых завихренность обращается в нуль и меняет знак при переходе через них. Данное течение также можно условно называть четырехструйным стоком. Качественные картины линий тока, соответствующие двум последним решениям, приведены на рис. 3. Интерес к подобного типа решениям был инициирован работой Н. Е. Жуковского [10].

2. Используя комплексное представление, уравнение для функции тока (1.1) с правой частью $\omega = 4 \sin \psi$ можно записать в виде

$$(2.1) \quad \psi_{z\bar{z}} = \sin \psi, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

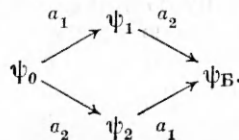
Очевидная аналогия с уравнением $\chi_{t\bar{t}} = \sin \chi$ [5] позволяет сразу записать преобразование Беклунда [6]

$$(2.2) \quad \frac{4}{2} (\psi_z + \varphi_z) = \frac{1}{a} \sin \left(\frac{\psi + \varphi}{2} \right), \quad \frac{4}{2} (\psi_{\bar{z}} - \varphi_{\bar{z}}) = a \sin \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right),$$

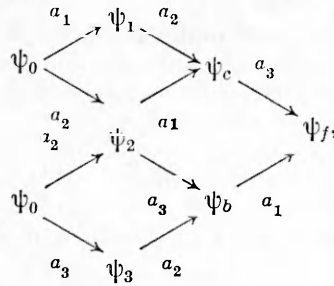
где параметр a считается комплексным числом по модулю, равным единице. Легко видеть, что если функции ψ , φ — решения системы (2.2), то каждая из них удовлетворяет (2.1). Поэтому, зная одно решение φ уравнения (2.1), можно с помощью интегрирования системы (2.2) найти другое решение (2.1). Замечательно, что при этом приходится решать обыкновенные уравнения первого порядка. Повторение процедуры приводит к новому решению (2.1) и т. д. Теорема перестановочности Бианки позволяет избегать повторного интегрирования [6]. Пусть $\varphi \equiv \psi_0$ — известное решение уравнения (2.1), ψ_i ($i = 1, 2$) — решения, полученные при интегрировании системы (2.2) с $a = a_i$ ($i = 1, 2$), тогда теорема Бианки дает возможность находить новое решение ψ_B прямо из равенства

$$(2.3) \quad \operatorname{tg} \frac{\psi_B - \psi_0}{4} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \operatorname{tg} \frac{\psi_1 - \psi_2}{4}.$$

которое выражает нелинейный принцип суперпозиции решений для (2.1). Наглядно описанный процесс удобно изображать в виде диаграммы



Тождество (2.3) позволяет строить « N -солитонные» решения. Так, «3-солитонному» решению соответствует диаграмма



где $\psi_0 = 0$, а функции ψ_l ($l = 1, 2, 3$), согласно (2.2), имеют вид

$$(2.4) \quad \psi_l = 4 \operatorname{arctg} \exp(\bar{a}_l z + a_l \bar{z}), \quad a_l = \exp(i\alpha_l), \quad \alpha_l \in R.$$

Функции ψ_c, ψ_b находятся с помощью нелинейного принципа суперпозиции (2.3):

$$\psi_c = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)} \right], \quad \psi_b = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{a_2 + a_3}{a_2 - a_3} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)} \right]$$

($\sigma_l = \bar{a}_l z + a_l \bar{z}$). Решение ψ_f определяется из равенства $\operatorname{tg} [0,25 (\psi_f - \psi_2)] = \frac{a_1 + a_3}{a_1 - a_3} \operatorname{tg} [0,25 (\psi_c - \psi_b)]$. Окончательная формула для ψ_f следующая:

$$\psi_f = 4 \operatorname{arctg} \left[\kappa_{31} \frac{S(\sigma_2, \sigma_3) - S(\sigma_1, \sigma_2)}{1 - S(\sigma_2, \sigma_3) S(\sigma_1, \sigma_2)} \right] + 4 \operatorname{arctg} [\exp(\sigma_2)].$$

Здесь $S(\sigma_i, \sigma_j) = \kappa_{ij} \frac{\operatorname{sh} [0,5(\sigma_i - \sigma_j)]}{\operatorname{ch} [0,5(\sigma_i + \sigma_j)]}$; $\kappa_{ij} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right)$; σ_i, α_i определены ранее.

Функции ψ_i ($i = 1, 2, 3$) вещественные, а ψ_c, ψ_b чисто мнимые. Чисто мнимые решения уравнения (2.1) являются вещественными решениями уравнения $\psi_{z\bar{z}} = \operatorname{sh} \psi$, последнее допускает преобразование Беклунда типа (2.2) с заменой в правых частях тригонометрических синусов на гиперболические. Соответственно в формуле (2.3) тригонометрические тангенсы заменяются на гиперболические.

Формула произведения решений (2.3) при $a_1 \rightarrow a_2$ переходит в

$$(2.5) \quad \operatorname{tg} \frac{\psi_B - \psi_0}{4} = \frac{a}{2} \frac{d}{da} \psi_1.$$

Если взять $\psi_0 = 0$, то ψ_1 определяется выражением (2.4), а $\psi_B = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{a}z - a\bar{z}}{\operatorname{ch} \sigma} \right)$ ($\sigma = \bar{a}z + a\bar{z}$). Повторное применение принципа суперпозиции (2.5) позволяет получать новое решение уравнения (2.1)

$$\psi = 4 \operatorname{arctg} (\exp \sigma) + 4 \operatorname{arctg} \left[2 \frac{(\bar{a}z + a\bar{z}) \operatorname{ch} \sigma - (\bar{a}z - a\bar{z})^2 \operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{ch}^2 \sigma + (\bar{a}z - a\bar{z})^2} \right].$$

При $a = 1$ данное решение принимает вид

$$\psi = 4 \operatorname{arctg} (\exp 2x) + 4 \operatorname{arctg} \left(4 \frac{x \operatorname{ch} 2x - 2y^2 \operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch}^2 2x - 4y^2} \right).$$

Тогда несложно найти явное выражение для линий тока

$$y^2 = \frac{\operatorname{ch} 2x \operatorname{ch} 2x (c - \exp 2x) - 4x (1 + \exp 2x)}{c \exp(4x) - \exp(-2x)}.$$

где константа c своя для каждой траектории. Не приводя подробных доказательств, можно утверждать следующее: скорость ограничена на всей плоскости течения, кроме двух точек $(0, 1/2)$, $(0, -1/2)$, в которых она имеет особенности; все траектории входят или выходят из этих точек; картина линий тока симметрична относительно оси $x = 0$. Это течение — движение с источником и стоком в завихренной жидкости. В отличие от потенциального течения типа диполя в данном случае кроме траекторий, соединяющих источник и сток, есть линии тока, выходящие из источника и уходящие на бесконечность (аналогичная ситуация со стоком). Отметим, что описанные выше « N -солитонные» решения также не являются гладкими на всей плоскости течения, а имеют особенности типа источников или стоков.

3. Предполагается, что $\omega(\psi) = \text{sh } \psi$. Это позволяет искать решение уравнения (1.1) в виде $\psi = 4 \operatorname{arth}(f(x)g(y))$, где функции f, g удовлетворяют уравнениям

$$(3.1) \quad f'^2 = nf^4 + mf^2 + k, \quad g'^2 = -kg^4 + (1-m)g^2 - n, \\ n, m, k \in R.$$

Тогда

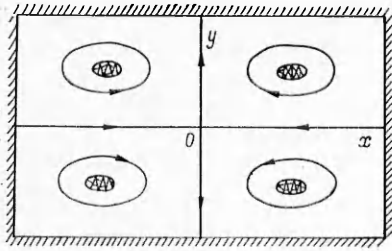
$$(3.2) \quad u = \frac{4fg'}{1-f^2g^2}, \quad v = -\frac{4f'g}{1-f^2g^2}, \quad \omega = 4fg \frac{1+f^2g^2}{(1-f^2g^2)^2}.$$

Если положить в уравнениях (3.1) n равным нулю, то получится решение типа бризера [6]: $g = \sqrt{\frac{1-m}{k}} \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-m}y)}$, $f = \sqrt{\frac{k}{-m}} \times \sin(\sqrt{-m}x)$ ($k > 0, m < 0$). Прямые $x = \pi L / \sqrt{-m}$ (L — любое целое число) — линии тока. В силу периодичности и нечетности функции f достаточно знать картину линий тока в полосе $M = \{0 \leq x \leq \pi / \sqrt{-m}\}$. Если разрешить уравнение траекторий $\operatorname{ch}(\sqrt{1-m}y) = c \sin(\sqrt{m}x)$ ($c > 1$) относительно y , то несложно понять, что все линии тока, лежащие внутри M , должны быть замкнуты и ограничены. Следует отметить, что траектории в M симметричны относительно прямых $y = 0, x = \pi/2 \sqrt{-m}$. Из формул (3.2) сразу видно, что скорость и завихренность стремятся к нулю при $|y| \rightarrow \infty$ и к бесконечности при приближении к линии $\sqrt{\frac{1-m}{-m}} \times \frac{\sin(\sqrt{-m}x)}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-m}y)} = 1$. Если принять любые две линии тока, принадлежащие множеству $\{(x, y) \in M : 0 < f(x)g(y) < 1\}$, за твердые границы, то получится течение между двумя цилиндрами. Согласно теореме Арнольда [11], данное течение будет устойчивым по отношению к двумерным возмущениям, так как существуют два числа A_1, A_2 , удовлетворяющих неравенствам $A_1 \geq \omega'(\psi) \equiv \operatorname{ch} \psi \geq A_2 > 0$.

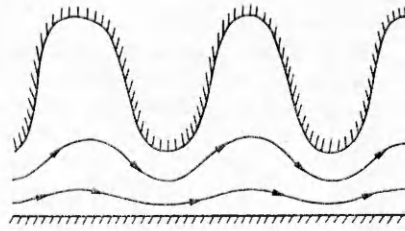
Пусть параметры k, n, m подчиняются неравенствам $k > 0, n < 0, 0 < m < 1$. Тогда каждое из уравнений (3.1) преобразованиями растяжения приводится к виду

$$h'^2 = (1-h^2)(p_1^2 + p_2^2 h^2), \quad p_i \in R, \quad p_1^2 + p_2^2 = 1.$$

Последнему уравнению удовлетворяет эллиптическая функция Якоби — косинус амплитуды [7, 8]. Таким образом, функции f, g выражаются через эллиптический косинус амплитуды, имеют периоды t_1, t_2 и по два нуля на периоде. В силу инвариантности (3.1) относительно сдвига допустимо считать, что $f(0) = g(0) = 0$. Следовательно, прямые $x = t_1 L/2, y = t_2 L/2$ (L — целое число) являются линиями тока. Для того чтобы представлять картину линий тока на всей плоскости течения, достаточно знать поведение траекторий в прямоугольнике $P = \{0 \leq x \leq t_1/2, 0 \leq y \leq t_2/2\}$. Повторение рассуждений, приводимых в п. 1 (случай «а»), позволяет заключить, что все траектории, лежащие в P , должны быть замкнуты и ограничены. Однако найдется линия, заданная уравнением $fg = 1$, при



Р и с. 4



Р и с. 5

приближении к которой функция тока, скорость и завихренность стремятся к бесконечности. Существование такой линии следует из того, что

функция f изменяется в пределах от $-\sqrt{\frac{-m - \sqrt{m^2 - 4kn}}{2n}}$ до $\sqrt{\frac{-m - \sqrt{m^2 - 4kn}}{2n}}$, а функция g от $-\sqrt{\frac{1 - m + \sqrt{(1 - m)^2 - 4kn}}{2k}}$ до $\sqrt{\frac{1 - m + \sqrt{(1 - m)^2 - 4kn}}{2k}}$. Действительно, согласно (3.1), для на-

хождения экстремальных значений функций нужно решить биквадратные уравнения $nf^4 + mf^2 + k = 0$, $kg^4 + (-1 + m)g^2 + n = 0$. В связи с вышеизложенным на плоскости течения приходится рассматривать множества типа $\Pi_c = \{(x, y) \in R^2: 0 \leq x \leq t_1, 0 \leq y \leq t_2, f^2g^2 \leq c < 1\}$. Если принять границу Π_c за твердые стенки, то получится устойчивое [11] завихренное течение в прямоугольном цилиндре, внутри которого расположены четыре симметричных цилиндра. Картина линий тока представлена на рис. 4, завихренность меняет знак перехода через оси симметрии прямоугольника.

Периодическое движение над ровным дном под крышкой получается при условиях на параметры (3.1): $m < 0$, $n > 0$, $m^2 = 4kn$. Уравнение (3.1) для функции g преобразованиями растяжения приводится к виду $g'^2 = (1 - g^2)(g^2 - p^2)$ ($p \in R$). Следовательно, g выражается через функцию дельта амплитуды dny [7, 8], является периодической и нигде не обращается в нуль. Функция $f = \sqrt{\frac{-m}{2n}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{-m}{2}} x\right)$. Уравнение ли-

ний тока $\sqrt{\frac{-m}{2n}} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{-m}{2}} x\right) g(y) = c$ представляется в разрешенном от-

носительно x виде $x(y) = \sqrt{\frac{2}{-m}} \operatorname{arth}\left(\frac{c \sqrt{\frac{2n}{m}}}{g(y)}\right)$. Уравнение (3.1) позволяет

найти область допустимых значений функции g : $\sqrt{\frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m}}{2k}} \leq$

$\leq g(y) \leq \sqrt{\frac{1 - m + \sqrt{1 - 2m}}{2k}}$. Пусть выполнены неравенство $\frac{c}{\min g} \sqrt{\frac{2n}{-m}} <$

< 1 или ему эквивалентное $c < \sqrt{\frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m}}{-m}}$, тогда $x(y)$

будет гладкой периодической функцией. Если же положить $c =$
 $= \sqrt{\frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m}}{-m}}$, то функция $x(y)$ будет определена всюду,

кроме тех точек, в которых $g(y)$ достигает минимальных значений. При-

нимая за твердые границы прямую $x = 0$ и любую линию тока, принадле-

жащую множеству $\{(x, y) \in R^2: f(x)g(y) < \sqrt{\frac{1 - m - \sqrt{1 - 2m}}{-m}}\}$, по-

лучаем периодическое по y течение под крышкой. Картина линий тока

показана на рис. 5.

Круг проблем, в которых возникают уравнения вида (1.1), достаточно

широк: задачи физики плазмы [12], статистической механики [13, 14],

стационарной теплопроводности. Так, два из описанных выше решений исследовались в работе [13], посвященной солитонам в гидродинамической модели холодной плазмы.

4. Считается, что завихренность в (1.1) $\omega = \beta \exp(-2\psi) - \exp \psi$. Тогда решение уравнения (1.1) можно искать в виде $\psi = \ln(f(x) + g(y))$, где функции f, g удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(4.1) \quad f'^2 = -2f^3 + a_2 f^2 + a_1 f + a_0, \quad g'^2 = -2g^3 - a_2 g^2 + a_1 g - a_0 - \beta.$$

В дальнейшем предполагается, что коэффициент $a_1 = 0$, а $\beta > 0$, $a_2 < 0$, $a_0 > 0$. Компоненты скорости и завихренности определяются формулами

$$(4.2) \quad u = g'/(f + g), \quad v = -f'/(f + g), \quad \omega = \beta/(f + g)^2 - f - g.$$

Для того чтобы f, g были периодическими функциями, нужно, чтобы каждое из кубических уравнений $-2f^3 + a_2 f^2 + a_0 = 0$, $-2g^3 - a_2 g^2 - a_0 - \beta = 0$ имело по три различных вещественных корня. Если $f_1 < f_2 < f_3$ — корни первого уравнения, то $-f_1, -f_2, -f_3$ — корни уравнения $-2g^3 - a_2 g^2 - a_0 - \beta = 0$. Причем в силу принятых предположений $f_1 < 0, f_2 < 0, f_3 > 0$. Значит, при малых β уравнение $-2g^3 - a_2 g^2 - a_0 - \beta = 0$ также будет иметь три корня $g_1 > g_2 > g_3$ ($g_2 > 0, g_3 < 0$). Таким образом, существуют числа a_0, a_2, β такие, что функции f, g , удовлетворяющие (4.1), можно выбрать периодическими. Поскольку $\beta > 0$, сумма $f_2 + g_2$ положительна. Подобно тому, как это делалось в предыдущих пунктах, находятся области значений функций f, g : $f_2 \leq f(x) \leq f_3, g_2 \leq g(y) \leq g_1$. Значит, отображение $\ln(f(x) + g(y))$ определено корректно.

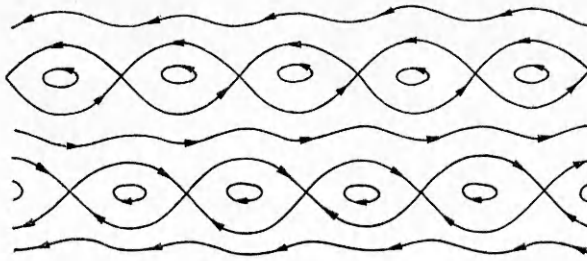
Пусть t_1, t_2 — периоды функций f и g соответственно. Ввиду инвариантности уравнений (4.1) относительно сдвига, можно считать, что у f и g максимум в нуле. Тогда функция f будет достигать в точках $t_1 L$ максимума, а в точках $t_1(2L + 1)/2$ — минимума (L — любое целое число). Аналогично функция g достигает в точках $t_2 L$ максимума, в точках $t_2(2L + 1)/2$ — минимума. Точки плоскости $R^2(x, y)$, где функции f, g одновременно имеют максимум или минимум, являются особыми точками дифференциальных уравнений линий тока $dx/u = dy/v$, которые в силу (4.2) эквивалентны

$$(4.3) \quad dx/g' = dy/-f'.$$

Точки плоскости, где f достигает максимума, а g — минимума (или наоборот), седловые для (4.3).

Траектории течения есть линии уровня функции $F(x, y) = f(x) + g(y)$. Если градиент F обращается в нуль в некоторой точке, то эта точка называется критической, а ее образ критическим значением. Только те точки плоскости критические для данной функции F , в которых одновременно обращаются в нуль производные функций f и g . Значит, имеется, вообще говоря, четыре критических значения: $c_1 = \max_{x \in R} f(x) + \max_{y \in R} g(y)$, $c_2 = \max_{y \in R} g(y) + \min_{x \in R} f(x)$, $c_3 = \min_{y \in R} g(y) + \max_{x \in R} f(x)$, $c_4 = \min_{y \in R} g(y) + \min_{x \in R} f(x)$.

По теореме о регулярном интервале [9], связанные компоненты линий уровня $F(x, y) = s_1, F(x, y) = s_3$, где $c_1 < s_1 < c_2, c_3 < s_3 < c_4$, диффеоморфны окружности, так как критические точки F , отвечающие критическим значениям c_1 и c_4 , — особые точки типа центра для (4.3). Линии уровня, отвечающие критическим значениям c_2, c_3 , проходят



Р и с. 6

через седловые точки (4.3). Они представляют собой сепаратрисы уравнений (4.3), идущие из седла в седло. Пусть $c_2 > c_3$, тогда сепаратрисы соединяют седловые точки, лежащие на прямых $y = t_2 L/2$ (L — целое число). Соответствующая качественная картина линий тока представлена на рис. 6, где изображены вихревые цепочки, расположенные в шахматном порядке. Так как $c_2 \neq c_3$, то на плоскости течения есть линии тока, идущие между цепочками. Если же $c_2 = c_3$, то границы соседних цепочек становятся общими. Для получения качественной картины траекторий при $c_3 > c_2$ достаточно повернуть рис. 6 на 90° . Можно отметить сходство между приводимыми в этом пункте решениями и периодическими вторичными течениями, описанными в [15].

Автор признателен В. А. Владимирову за подробное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Simple rotational flows // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 82, pt 4.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
3. Stuart J. T. On finite-amplitude oscillations in laminar mixing layers // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 29, pt 3.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
5. Булаф Р. К., Кодри П. Дж. Солитоны.— М.: Мир, 1983.
6. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов.— М.: Мир, 1983.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа.— М.: ГИФМЛ, 1963.
8. Маркушевич А. И. Замечательные синусы.— М.: Наука, 1974.
9. Хирш М. Дифференциальная топология.— М.: Мир, 1979.
10. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта.— М.: Гостехиздат, 1950.
11. Арнольд В. И. Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Математика.— 1966.— № 5.
12. Бейтман Г. МГД-неустойчивости.— М.: Энергоиздат, 1982.
13. Мовсесянц Ю. Б. Солитоны в двумерной гидродинамической модели холодной плазмы // ЖЭТФ.— 1986.— Т. 91, вып. 2(8).
14. Яворский Н. И. Точные решения уравнения $\Delta u = \text{sh } u$ // Гидромеханика и теплообмен в одно- и двухфазных средах.— Новосибирск, 1979.
15. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение.— М.: Наука, 1981.

Поступила 6/Х 1987 г.

УДК 532.51

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ЖЕСТКОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. И. Колодежнов

(Воронеж)

В различных приложениях часто возникают задачи по расчету характеристик течений вязкой несжимаемой жидкости в тонких слоях, ограниченных жесткими поверхностями, одна из которых закреплена, а другая свободна и находится под действием заданной системы сил. Такого рода задачи возникают в гидродинамической теории смазки [1—3], контактной гидродинамике [4] и некоторых других приложениях. При этом, как правило, предполагают [1—3], что кинематика жесткой свободной поверхности известна заранее (задается закон движения свободной поверхности, либо рассматривается состояние ее равновесия). Такой подход не всегда позволяет учесть взаимовлияние друг на друга течения жидкости и динамики жесткой свободной поверхности, ограничивающей эту область течения.

В настоящей работе рассматривается подход к построению приближенного решения трехмерных нестационарных задач указанного типа. При этом проводится совместное рассмотрение задачи о течении жидкости в тонком слое с задачей о динамике жесткой свободной поверхности, ограничивающей этот слой. Возможности подхода иллюстрируются на примере двух задач.

1. Рассмотрим ламинарное неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в области, ограниченной двумя жесткими поверхностями, характерное расстояние между которыми мало по сравнению с