ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 2

УДК 532.546

КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ В РЕЛАКСАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ. СЛУЧАЙ МНОГИХ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ

О. Ю. Динариев

Институт физики Земли РАН,
123810 Москва

Данная работа посвящена выводу асимптотического выражения для кривой восстановления давления (КВД) в релаксационной теории фильтрации, когда в системе порода — насыщающий флюид имеет место семейство чисто диссипативных внутренних релаксационных процессов. Если в [1] выведена асимптотика для начального участка КВД, то в настоящей работе описан участок КВД при больших временах, которые, однако, сравнимы по порядку величины с внутренними временами релаксации.

Напомним основные положения теории релаксационной изотермической фильтрации в однородном недеформируемом изотропном коллекторе [2–6].

В релаксационной теории фильтрации обычный закон Дарси

$$u^i(t,x^j) = -k\mu^{-1}\,\frac{\partial G}{\partial x^i}(t,x^j), \qquad G = p + \rho\varphi \tag{1}$$

заменяется релаксационным соотношением

$$u^i(t_0,x^j) = -k\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t_0-t)\,\frac{\partial G}{\partial x^i}(t,x^j)\,dt. \tag{2}$$

В формулах (1), (2) u^i — скорость фильтрации; k — проницаемость; μ— сдвиговая вязкость флюида; p — давление; ρ — плотность; φ — гравитационный потенциал.

Ядро $K = K(t)$ характеризует внутренние релаксационные процессы в системе пористая среда — насыщающий флюид. Оно подчинено ряду условий, вытекающих из физических и термодинамических соображений.

1. $K(t)$ — неотрицательная монотонно убывающая функция, имеющая размерность (время)$^{-1}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1$ — условие редукции (2) к (1) для медленных процессов.

3. $K(t) = 0$ при $t < 0$ (причинность); $K(0) < +\infty$ — условие конечности скорости сигнала [7].

Для произвольной функции времени $f = f(t)$ будем обозначать символом $f_F = f_F(\omega)$ ее преобразование Фурье:

$$f_F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} f(t)\,dt.$$

Вследствие условия 3 по теореме Пэли — Винера [8] функция $K_F = K_F(\omega)$ является голоморфной в нижней полуплоскости комплексной плоскости. Ранее показано [6, 7], что имеет место условие диссипативности

4. $\operatorname{Re} K_F(\omega) > 0$ при $\operatorname{Im}(\omega) \leq 0$.

Из условия 2 вытекает

$$K_F(0) = 1. \tag{3}$$

Из условия 3 следует, что в области голоморфности справедлива асимптотика

$$K_F(\omega) = k_1(i\omega)^{-1} + o(|\omega|^{-1}), \quad k_1 = K(0). \tag{4}$$

Из вещественности ядра K следует равенство

$$\overline{K_F(\omega)} = K_F(-\omega), \quad \operatorname{Im}\omega \leq 0. \tag{5}$$

Теперь рассмотрим более подробно конкретный функциональный вид релаксационного ядра. Поскольку в нижней комплексной полуплоскости K_F — голоморфная функция, то функциональный вид ядра определяется особенностями в верхней комплексной полуплоскости. Вклад от типичной особенности типа «полюс» имеет вид $A_0(\omega - \omega_0)^{-1}$.

Предположим, что в системе пористая среда — насыщающий флюид реализуется дискретный спектр внутренних релаксационных чисто диссипативных процессов. Тогда для релаксационного ядра имеет место представление

$$K(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \tau_n^{-1} \exp(-t/\tau_n), \tag{6}$$

где τ_n — соответствующие времена релаксации ($0 < \tau_{n+1} < \tau_n$); $A_n > 0$ — весовые коэффициенты. В фурье-представлении выражение (6) приобретает вид

$$K_F(\omega) = \sum_{n=1}^{N} A_n (1 + i\omega\tau_n)^{-1}. \tag{7}$$

Легко проверить выполнение условий 1, 3, 4. Из (3) следует равенство

$$1 = K_F(0) = \sum_{n=1}^{N} A_n. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу о КВД в цилиндрически-симметричной постановке. Ограничимся линейным приближением. Примем уравнение состояния

$$p = p_0 + E(\rho - \rho_0)\rho_0^{-1} \tag{9}$$

(E — объемный модуль упругости флюида).

При фильтрации флюида должен выполняться локальный закон сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho u^i) = 0 \tag{10}$$

(m — пористость). Подставляя в уравнение (10) выражения (2), (9) и проводя линеаризацию, с учетом цилиндрической симметрии получаем интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t_0, r) = æ \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\Delta p(t, r)\, dt. \tag{11}$$

Здесь $æ = kE/(m\mu)$; r — расстояние от оси скважины; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}$ — оператор Лапласа. Параметр r изменяется в пределах $r_1 \le r \le r_2$, где r_1, r_2 — радиус скважины и контура питания. При работе скважины с переменным дебитом $q = q(t)$ на единицу продуктивной толщи пласта имеет место граничное условие

$$q(t) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\frac{\partial}{\partial r}p(t, r_1)\,dt, \quad \lambda = 2\pi r_1 \rho_0 \mu^{-1}. \tag{12}$$

Кроме того, необходимо наложить граничное условие на контуре питания

$$p(t, r_2) = p_{\text{пл}}. \tag{13}$$

Задача (11)–(13) является линейной, поэтому ее можно решать методом преобразования Фурье — Лапласа. Для упрощения получающихся формул будем использовать далее такую систему единиц измерения, в которой

$$æ = r_1 = 1. \tag{14}$$

Поскольку величина $æ$ имеет размерность длина^2/время, то условие (14) в дальнейшем фиксирует единицу длины и единицу времени.

Введем новую неизвестную функцию

$$P = P(t, r) = p(t, r) - p_{\text{пл}}.$$

Осуществляя в (11)–(13) преобразование Фурье, получаем дифференциальное уравнение

$$(\Delta - \alpha^2)P_F = 0 \tag{15}$$

с граничными условиями

$$q_F = \lambda K_F \frac{\partial P_F}{\partial r}\bigg|_{r=1}, \quad P_F\bigg|_{r=r_2} = 0. \tag{16}$$

В уравнении (15) $\alpha = \alpha(\omega)$ — комплексная функция, определяемая соотношениями

$$\alpha^2 = i\omega/K_F(\omega), \quad \operatorname{Re}\alpha \ge 0. \tag{17}$$

Покажем, что соотношения (17) определяют голоморфную функцию $\alpha = \alpha(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega < 0$, непрерывную вплоть до действительной оси.

В самом деле, функция $\alpha = \alpha(\omega)$ может терять непрерывность только в точках ω, в которых $\operatorname{Re}\alpha = 0$, $\operatorname{Im}\omega \ne 0$, т. е. в которых

$$\operatorname{Re}\alpha^2 < 0, \quad \operatorname{Im}\alpha^2 = 0. \tag{18}$$

Заметим, что, во-первых,

$$\operatorname{Im}\alpha^2 = \frac{\operatorname{Re}\omega \operatorname{Re}K_F + \operatorname{Im}\omega \operatorname{Im}K_F}{|K_F|^2} \tag{19}$$

и, во-вторых,

$$\operatorname{Im}K_F(\omega) = -\int_0^{+\infty} e^{t\operatorname{Im}\omega}\sin(t\operatorname{Re}\omega)K(t)\,dt. \tag{20}$$

Из (20) с учетом монотонности ядра следует, что $\operatorname{Re}\omega \operatorname{Im}K_F \le 0$. Теперь из выражения (19) и условия 4 вытекает, что величина $\operatorname{Im}\alpha^2$ имеет тот же знак, что и $\mathrm{Re}\,\omega$. Если $\mathrm{Re}\,\omega = 0$, то $K_F = \mathrm{Re}\,K_F$ и $\alpha^2 > 0$. Поэтому ситуация (18) невозможна ни в одной точке нижней комплексной полуплоскости.

Итак, голоморфность $\alpha(\omega)$ в нижней комплексной полуплоскости доказана. Так как $K_F(\omega)$ может быть продолжена по голоморфности в верхнюю комплексную полуплоскость (см. 7)), то и функция $\alpha(\omega)$ также может быть продолжена в верхнюю комплексную полуплоскость. При этом она будет иметь особенности, связанные с полюсами и нулями функции $K_F(\omega)$, а также с процедурой извлечения корня в (17).

Более конкретно рассмотрим функцию $F(s) = K_F(is)$ при $s > 0$. Согласно (5), эта функция принимает действительные значения. Анализ выражения (7) показывает, что $F(s)$ монотонно возрастает на каждом из интервалов $0 < s < y_1, y_1 < s < y_2, \ldots, y_{N-1} < s < y_N$, где $y_i = r_i^{-1}$, стремясь к $\pm\infty$ при приближении s к y_i. Поэтому существуют точки $s_1, \ldots, s_{N-1}$, где эта функция обращается в нуль, причем $y_i < s_i < y_{i+1}$. Обозначим $s_0 = 0$. Функцию $\alpha(\omega)$ можно продолжить по голоморфности на всю комплексную плоскость, за исключением разрезов вдоль интервалов

$$D_i: \quad s_i \leq \mathrm{Im}\,\omega \leq y_{i+1}, \qquad \mathrm{Re}\,\omega = 0 \quad (i = 0, \ldots, N-1).$$

Уравнение (15) имеет общее решение в терминах функций Макдональда [9]

$$P_F = C_1 K_0(\alpha r) + C_2 I_0(\alpha r),$$

где постоянные C_1, C_2 определяются из граничных условий (16):

$$P_F = \frac{q_F(-I_0(\alpha r_2)K_0(\alpha r) + K_0(\alpha r_2)I_0(\alpha r))}{\lambda K_F \alpha (K_0(\alpha r_2)I_1(\alpha) + K_1(\alpha)I_0(\alpha r))}. \tag{21}$$

В случае работы скважины с постоянным дебитом $q(t) = Q$ легко вычислить $P = P(r) = \lambda^{-1}Q\ln(r/r_2)$. В задаче о кривой восстановления давления нужно положить $q(t) = Q\theta(-t)$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Обозначим

$$\Phi = P - \lambda^{-1}Q\ln(r/r_2).$$

Тогда Φ_F может быть вычислена по формуле (21), если подставить в нее $q_F = Qi/(\omega - i\varepsilon)$, что соответствует $q(t) = -Q\theta(t)$. Здесь ε — малая положительная величина, которую нужно положить равной нулю в конечном результате.

Будем вычислять промежуточную асимптотику КВД, когда можно пренебречь конечностью r_2. Поэтому устремим в (21) r_2 к бесконечности. Пользуясь известными асимптотиками функций Макдональда [9], находим

$$\Phi_F = \frac{-q_F K_0(\alpha r)}{\lambda K_F\,\alpha\,K_1(\alpha)}.$$

Задача определения КВД сводится к вычислению функции $\varphi(t) = \Phi|_{r=1}$. Выполняя обратное преобразование Фурье, для этой функции получаем представление

$$\varphi(t) = -(2\pi\lambda)^{-1}Q\,i\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega - i\varepsilon)^{-1}f_1(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{22}$$

$$f_1(\omega) = \frac{K_0(\alpha)}{K_F\,\alpha\,K_1(\alpha)}.$$

Напомним выражения для функций Макдональда [9]:

$$K_0(z) = -J(z^2)\ln(z/2)+W(z^2), \quad K_1(z) = z^{-1}(A(z^2)\ln z+B(z^2)). \tag{23}$$

Здесь $J(z)$, $A(z)$, $B(z)$ — целые функции; $J(0) = B(0) = 1$; $A(0) = 0$; $W(0) = -C$ (C — постоянная Эйлера). Функции $K_0(z)$, $K_1(z)$ имеют ветвление бесконечного порядка в точке $z = 0$. Мы будем использовать ветви этих функций с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z = 0$.

Для осуществления интегрирования в (22) удобно деформировать контур интегрирования в верхнюю комплексную полуплоскость. Контур интегрирования можно деформировать до тех пор, пока он не встретит особенностей подынтегрального выражения. Все особенности (разрезы и полюсы) оказываются на полуоси $\operatorname{Im}\omega > 0, \operatorname{Re}\omega = 0$, поэтому интеграл (22) преобразуется к интегралу по контуру C (рис. 1):

$$\varphi(t) = -(2\pi\lambda)^{-1}Q\, i \int_C \omega^{-1} f_1(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{24}$$

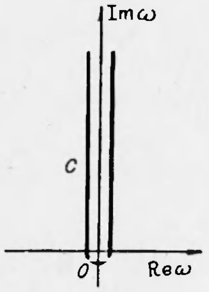

Рис. 1

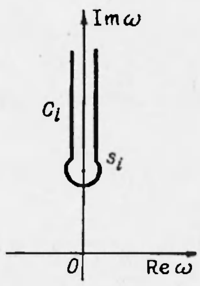

Рис. 2

Будем искать асимптотику КВД, когда время t велико, но сравнимо с временами релаксации τ_i. Формально этого можно достигнуть, если положить $t = \delta^{-1}t_*$, $K(t) = K_*(\delta t)$, где δ — малый параметр, а t_*, K_* фиксированы, и подставить эти выражения в формулу (24). Далее, устремляя δ к нулю, нужно опустить в (24) те члены, которые обращаются в нуль. Осуществляя эту процедуру с учетом выражений (23), приходим к формуле для $\varphi(t)$, которая получается из (24) заменой $f_1(\omega)$ на функцию

$$f_2(\omega) = \frac{-\ln\alpha + \beta}{K_F}, \quad \beta = \ln 2 - C. \tag{25}$$

Заметим теперь, что справедливы представления

$$(i\omega K_F(\omega))^{-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n(i\omega + s_n)^{-1} + b_0; \tag{26}$$

$$\frac{i\omega}{K_F(\omega)} = A\prod_{n=0}^{N-1}(i\omega + s_n)\prod_{n=1}^{N}(i\omega + y_n)^{-1}, \tag{27}$$

где $a_i, b_0 > 0$; $b_0 = k_*^{-1}$; $a_0 = 1$; $A = \prod\limits_{n=1}^{N-1} s_i^{-1} \prod\limits_{n=1}^{N} y_i$. Постановка выражений (26), (27) в (25) и (24) приводит к формуле

$$\varphi(t) = (2\pi\lambda)^{-1}Q \int_C f_3(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

$$f_3(\omega) = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} a_n(i\omega + s_n)^{-1} + b_0\Big)\Big(- \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \ln(i\omega + s_n) + \tag{28}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \ln(i\omega + y_n) + \gamma\Big), \quad \gamma = \beta - \frac{1}{2}\ln A.$$

Интеграл (28) вычисляется почленно с помощью теоремы о вычетах и вспомогательных формул из [10] для $a, b > 0$: формула № 3.352.4

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bz}dz}{a+z} = -e^{ab}\,\mathrm{Ei}\,(-a\,b); \tag{29}$$

формула № 3.352.6

$$\mathrm{V.p.}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bz}dz}{a-z} = e^{-ab}\,\mathrm{Ei}\,(a\,b)$$

(Ei(z) — интегральная показательная функция).

Некоторые сложности представляет взятие интеграла вида

$$J_i = \int_C e^{i\omega t}(i\omega + s_i)^{-1}\ln(i\omega + s_i)\,d\omega,$$

который нужно преобразовать к интегралу по контуру C_i (рис. 2) и вычислить с помощью формулы (29) и формулы для интегральной показательной функции из [10] № 8.214.1:

$$\mathrm{Ei}(z) = C + \ln(-z) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n(n\,n!)^{-1}, \quad z < 0.$$

Тогда получается выражение $J_i = -2\pi\exp(-s_i t)(\ln t + C)$.
Проводя все вычисления, приходим к формуле

$$\varphi(t) = Q\lambda^{-1}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)),$$

$$\varphi_1(t) = 2^{-1}b_0t^{-1}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}\exp(-s_nt) - \sum_{n=1}^{N}\exp(-y_nt)\Big) +$$

$$+ \sum_{n=o}^{N-1} a_n\exp(-s_nt)\Big(\gamma - \frac{1}{2}\sum_{i\neq n}\exp((s_i - s_n)t)\mathrm{Ei}((s_n - s_i)t) - \tag{30}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i>n}\ln(s_i - s_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\exp((y_i - s_n)t)\mathrm{Ei}((s_n - y_i)t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{N}\ln(y_i - s_n) + \frac{1}{2}C\Big),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} a_n\exp(-s_nt)\ln t.$$

В (30) член $\varphi_1(t)$ остается конечным с ростом t, а член $\varphi_2(t)$ логарифмически растет (напомним, что произведения вида $s_n t$ при $n > 0$ по предположению считаются конечными!).

Таким образом, именно функция $\varphi_2(t)$ определяет асимптотику КВД в релаксационной теории фильтрации. Формально влияние релаксационных процессов можно учесть, введя в классическую формулу для КВД с логарифмической асимптотикой множитель вида $(1 + \sum a_i \exp(-s_i t))$, где $a_i, s_i > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Динариев О. Ю.** О некоторых особенностях кривой восстановления давления при релаксационной фильтрации жидкости // ПМТФ. 1991. № 5. С. 106–111.
2. **Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штанин А. В.** Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
3. **Молокович Ю. М., Осипов П. П.** Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.
4. **Молокович Ю. М.** Основы теории релаксационной фильтрации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 142–153.
5. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Релаксационные явления в насыщенных пористых средах. Линейная теория // ПММ. 1989. № 3. С. 469–475.
6. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Об обобщении закона Дарси для нестационарных режимов фильтрации // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 1. С. 31–36.
7. **Динариев О. Ю.** О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 3. С. 1095–1097.
8. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
9. **Бейтман Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974.
10. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 10/V 1994 г.