

смыкания справа от щели (3.8). Его можно проверить асимптотически:

$$M(x) = -\sigma_{\infty} + O(1/x), \quad x \rightarrow \infty,$$

а для функций  $\sigma(x)$ , выпуклых кверху ( $\sigma''(x) \leq 0$ ,  $x \in L_0$ ), можно показать, что  $M'_x|_{x=l} < 0$ . Вместе с (3.12) это неравенство показывает, что сразу за вершиной щели на ее продолжении напряжения  $\sigma_{12}^0(x, 0)$  сжимающие. Для глобальной проверки этого условия необходимы конкретные вычисления, легко осуществимые при помощи ЭВМ. При его невыполнении следует, естественно, изменить схему отрыва.

Из рассмотренного видно, что волновые эффекты заметно сказываются при околорэлеевских скоростях движения нагрузки (как, впрочем, и в других подобных задачах). При переходе через скорость волны Рэлея изменился характер особенностей решения в вершинах щели, причем для гладких нагрузок в одной из них особенность сменилась на более сильную, а в другой — на более слабую.

Одновременно решена задача об отрыве упругой среды, прижатой к жесткому плоскому основанию.

Решение стационарной задачи оправдано, если оно является пределом соответствующей нестационарной задачи, а это будет так, если скорость нагрузок не совпадает ни с одной из скоростей собственных резонансных волн упругой системы (волн, у которых фазовая скорость равна групповой) [9]. Такие случаи заранее исключены в данном рассмотрении ( $c \neq c_R, c_1, c_2$ ).

Вопрос об отрыве упругой полосы от основания под действием силы, движущейся с постоянной дорэлеевской скоростью, рассмотрен в работе [10] (см. также библиографию к ней).

Поступила 13 V 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yoffe E. H. The moving Griffith crack. — Philos. Mag., 1951, ser. VII, vol. 42, N 330.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
3. Freund L. B., Clifton R. J. On the uniqueness of plane elasto-dynamic solutions for running cracks. — J. Elasticity, 1974, vol. 4, N 4.
4. Симонов И. В. Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953.
6. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
7. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. Новосибирск: Наука, 1980.
8. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. М.: Высшая школа, 1970, т. 1.
9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972.
10. Adams G. G. Steady solutions for a moving load on an elastic strip resting on an elastic half plane. — Int. J. Solids Struct., 1979, vol. 15, N 11.

УДК 539.375

### ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА РОСТ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. И. Астафьев

(Куйбышев)

Исследованиям закономерностей роста трещин в металлах в условиях высокотемпературной ползучести за последнее время уделяется все большее внимание. Это и экспериментальные работы по выявлению параметров, определяющих скорость роста трещин в образцах (см. [1—3] и др.), и теоретические работы, рассматривающие задачу о росте трещины при различных исходных предположениях о распределении напряжений вблизи вершины трещины и критериях распространения трещин (см. [4—10] и др.).

В абсолютном большинстве теоретических работ не учитывается процесс перераспределения напряжений от начального упругого состояния до состояния установившейся ползучести, происходящий в теле с трещиной после приложения нагрузки. В [11] представлено решение подобной задачи для степенного закона ползучести с учетом упрочнения и разупрочнения материала. Конечноэлементный анализ поля напряжений, проведенный в [12], подтвердил справедливость асимптотик, полученных в [11].

1. Основные соотношения работы [11] для случая плоской деформации таковы: а) в начальный момент времени ( $t = 0$ ) поле напряжений имеет вид

$$(1.1) \quad \sigma_{ij}(r, \theta, t = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{ij}^{(e)}(\theta);$$

б) при  $t > 0$  в непосредственной близости от вершины трещины возникает расширяющаяся с течением времени область, в которой преобладают деформации ползучести, а поле напряжений в ней имеет такой же вид, что и в [13, 14]:

$$(1.2) \quad \sigma_{ij}(r, \theta, t) = \left( \frac{C(t)}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}^{(e)}(n, \theta);$$

вне этой области сохраняется упругое распределение напряжений (1.1). Здесь  $r, \theta$  — полярные координаты;  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(e)}(\theta)$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(e)}(n, \theta)$  — известные функции углового изменения напряжений в упругом состоянии и в состоянии установившейся ползучести;  $B, n$  — константы в степенном законе ползучести  $\dot{\epsilon}^{(e)} = B\sigma^n$ ;  $I_n$  — известная константа [13];

$$C(t) = \begin{cases} C_* t_\tau / t, & 0 < t < t_\tau, \\ C_*, & t \geq t_\tau; \end{cases}$$

$C_*$  — не зависящий от контура интеграл установившейся ползучести, аналогичный  $J$  — интегралу Черепанова — Райса [2];  $t_\tau = (1 - \nu^2) \times \times K_I^2 / [(n+1)EC_*]$  — время установления вблизи вершины трещины стационарного состояния установившейся ползучести. Области преобладающих деформаций ползучести и упругих деформаций разделяются некоторой переходной зоной. Пренебрегая этой зоной, находим из условия непрерывности нормального напряжения на границе, разделяющей области преобладания деформаций ползучести (асимптотика (1.2)) и упругих деформаций (асимптотика (1.1)), уравнение линии, разделяющей эти области:

$$(1.3) \quad r_1(\theta, t) = \left( \frac{K_I^2}{2\pi} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \left( \frac{BI_n}{C(t)} \right)^{\frac{2}{n-1}} F(\theta),$$

где  $F(\theta)$  — известная функция полярного угла  $\theta$ , определяемая по  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(e)}(\theta)$  и  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(e)}(n, \theta)$  и такая, что  $F(0) = 1$ . Экспериментально правомерность такой аппроксимации поля напряжений (локализации переходной зоны в линию (1.3)) подтверждается результатами [15].

2. В работе [7] для описания роста трещины при ползучести использовался параметр поврежденности  $\omega(x, t)$  ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) с кинетическим уравнением для него [16]:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = A \left( \frac{\sigma_{\max}}{1 - \omega} \right)^m.$$

Из (2.1) для  $\omega(x, t)$  находится зависимость

$$(2.2) \quad 1 - (1 - \omega(x, t))^{m+1} = A(m+1) \int_0^t \sigma_{\max}^m(x, \tau) d\tau.$$

Выбрав в качестве критерия распространения трещины условие  $\omega(l(t), t) = 1$  (поврежденность в вершине трещины имеет свое предельное значение

$\omega = 1$ ), из (2.2) получим уравнение для нахождения закона подрастания трещины в процессе ползучести

$$(2.3) \quad 1 = A(m+1) \int_0^t \sigma_{\max}^m(l(t), \tau) d\tau.$$

Для  $\sigma_{\max} = \sigma_y$  в соответствии с результатами [11] выберем следующую аппроксимацию:

$$(2.4) \quad \sigma_{\max}(x, t) = \begin{cases} \left( \frac{C(t)}{BI_n} \frac{1}{x-l(t)} \right)^{\frac{1}{n+1}}, & 0 < x-l(t) < R(t), \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-l(t))}}, & x-l(t) \geq R(t), \end{cases}$$

где  $R(t) = r_1(0, t)$ . Подставив (2.4) в (2.3), преобразуем его к виду

$$(2.5) \quad \frac{1}{A(m+1)} = \int_0^{\tau(t)} \left( \frac{K_I^2}{2\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{d\tau}{(l(t)-l(\tau))^{\frac{m}{2}}} + \int_{\tau(t)}^t \left( \frac{C(\tau)}{BI_n} \right)^{\frac{m}{n+1}} \frac{d\tau}{(l(t)-l(\tau))^{\frac{m}{n+1}}},$$

где  $\tau(t)$  — решение уравнения  $l(\tau) + R(\tau) = l(t)$ . Обозначим  $m/(n+1) = \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $m/2 = \beta$ ,  $0 < \beta$ ,  $l(t) - l_0 = z$  и введем новую переменную  $\xi = l(\tau) - l_0$ . Тогда уравнение (2.5) запишется в виде

$$(2.6) \quad \frac{1}{A(m+1)} = \int_0^{\xi(z)} \left( \frac{K_I^2}{2\pi} \right)^{\beta} \frac{\tau'(\xi) d\xi}{(z-\xi)^{\beta}} + \int_{\xi(z)}^z \left( \frac{C(\xi)}{BI_n} \right)^{\alpha} \frac{\tau'(\xi) d\xi}{(z-\xi)^{\alpha}}.$$

Здесь  $\xi(z)$  — решение уравнения  $\xi + R(\xi) = z$ .

Для отыскания решения уравнения (2.6) — определения неизвестной зависимости  $\tau(\xi)$  — применим преобразование Лапласа по переменной  $z$ . После замены порядка интегрирования в правой части уравнения (2.6) его можно привести к виду

$$(2.7) \quad \frac{1}{A(m+1)p} = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \tau'(\xi) \left\{ \left( \frac{K_I^2}{2\pi} \right)^{\beta} \int_R^{\infty} t^{-\beta} e^{-pt} dt + \left( \frac{C(\xi)}{BI_n} \right)^{\alpha} \int_0^R t^{-\alpha} e^{-pt} dt \right\} d\xi.$$

Запишем асимптотики для интегралов, стоящих в (2.7), соответствующие случаю больших  $p$ :

$$(2.8) \quad \int_R^{\infty} t^{-\beta} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pR} R^{1-\beta}}{pR} \left( 1 - \frac{\beta}{pR} + O\left( \left( \frac{1}{pR} \right)^2 \right) \right),$$

$$\int_0^R t^{-\alpha} e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}} - \frac{e^{-pR} R^{1-\alpha}}{pR} \left( 1 - \frac{\alpha}{pR} + O\left( \left( \frac{1}{pR} \right)^2 \right) \right).$$

Уравнение (2.7) с учетом асимптотик (2.8) имеет вид

$$(2.9) \quad \frac{1}{A(m+1)p} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \tau'(\xi) \left( \frac{C(\xi)}{BI_n} \right)^{\alpha} \left\{ 1 + \frac{(\alpha-\beta) e^{-pR}}{\Gamma(1-\alpha)(pR)^{1+\alpha}} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + O\left( \frac{1}{pR} \right) \right) \right\} d\xi.$$

Обозначим  $\varphi_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\xi} \tau'(\xi) \left( \frac{C(\xi)}{BI_n} \right)^{\alpha} d\xi$  и  $\varphi_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pz} \tau'(z) \left( \frac{C(z)}{BI_n} \right)^{\alpha} \frac{dz}{R(z)^{1+\alpha}}$  (во втором интеграле сделана замена переменной  $z = \xi + R(\xi)$ ). Тогда для (2.9) можно записать

$$(2.10) \quad \frac{1}{A(m+1)p} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}} \varphi_1(p) + (\alpha-\beta) \frac{e^{-pR}}{p^2} \left( 1 + O\left( \frac{1}{p} \right) \right).$$

Решение уравнения (2.10) при больших  $p$  имеет вид

$$(2.11) \quad \Phi_1(p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha) A(m+1) p^\alpha} \left( 1 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right).$$

Переходя в (2.11) от образов к оригиналам, получим

$$(2.12) \quad \tau'(z) \left( \frac{C(z)}{BI_n} \right)^\alpha = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(\alpha) A(m+1)} (1 + o(z)).$$

Из уравнения (2.12) при малых  $z$  можно найти скорость роста трещины

$$(2.13) \quad \dot{l} = \frac{dz}{dt} = A(m+1) \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \left( \frac{C(z)}{BI_n} \right)^\alpha z^{1-\alpha}.$$

При  $t < t_r$  соотношение (2.13) примет вид

$$(2.14) \quad \dot{l} = A(m+1) \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \left( \frac{(1-v^2) K_I^2}{(n+1) I_n EB t} \right)^\alpha (l-l_0)^{1-\alpha}.$$

Проинтегрировав (2.14) и избавившись от  $t$ , соотношение для скорости роста трещины  $\dot{l}$  при  $t < t_r$  можно записать в виде

$$\dot{l} = \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left( A(m+1) \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \left( \frac{1-v^2}{(n+1) I_n EB} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \times \\ \times K_I^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} (l-l_0)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}.$$

Таким образом, на нестационарной стадии перераспределения напряжений от начального упругого состояния до состояния установившейся ползучести скорость роста трещины определяется коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$ . Экспериментальная зависимость скорости роста трещины от  $K_I$  наблюдалась в ряде экспериментов [1, 3, 8-10].

При  $t > t_r$  соотношение (2.13) примет вид

$$\dot{l} = A(m+1) \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \left( \frac{C_*}{BI_n} \right)^\alpha (l-l_0)^{1-\alpha},$$

т. е. скорость роста трещины определяется уже  $C_*$ -интегралом. Экспериментальная зависимость  $\dot{l}(C_*)$  наблюдалась в [2, 3, 8-10]. Такой переход в определяющих скорость роста трещины параметрах также наблюдался в ряде экспериментов, когда на одном и том же материале одни авторы получали зависимость  $\dot{l}(K_I)$ , а другие —  $\dot{l}(C_*)$  [3, 8-10]. По-видимому, это может быть связано с образцами, на которых проводились эксперименты (вид образца влияет на величину  $K_I$  и  $C_*$ , а они в свою очередь на величину  $t_r$ ), или с интервалом времени, при котором проводился эксперимент (время проведения эксперимента  $t$  меньше либо больше  $t_r$ ).

Из приведенного выше решения о подрастании трещины можно сделать вывод, что перераспределение напряжений при ползучести может существенно влиять на параметр, определяющий скорость роста трещины.

Поступила 13 XI 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Siverns M. J., Price A. T. Crack propagation under creep conditions in a quenched  $2\frac{1}{4}$  chromium 1 molybdenum steel.— Int. J. Fract., 1973, vol. 9, N 2.
2. Landes J. D., Begley J. A. A fracture mechanics approach to creep crack growth. ASTM STP 590, 1976.
3. Onjii K., Ogura K. et al. A study on correlating parameters of creep crack growth rate of 1Cr—1 $\frac{1}{4}$ Mo—1V steel.— Дзайрё, J. Soc. Mater. Sci., Jap., 1978, vol. 27, N 303.
4. Barnby J. T. Crack propagation during steady state creep.— Eng. Fract. Mech., 1975, vol. 7, N 2.

5. То К. С. A phenomenological theory of subcritical creep crack growth under constant loading in an inert environment.— Int. J. Fract., 1975, vol. 11, N 4.
6. Vitek V. A theory of diffusion controlled intergranular creep crack growth.— Acta Met., 1978, vol. 26, N 9.
7. Астафьев В. И. О росте трещин при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины.— ПМТФ, 1979, № 6.
8. Leeuwen H. P. The application of fracture mechanics to creep crack growth.— Eng. Fract. Mech., 1977, vol. 9, N 4.
9. Ellison E. G., Harper M. P. Creep behaviour of components containing cracks. A critical review.— J. Strain Anal., 1978, vol. 13, N 1.
10. Fu L. S. Creep crack growth in technical alloys at elevated temperature. A review.— Eng. Fract. Mech., 1980, vol. 13, N 2.
11. Riedel H. Creep deformation at crack tip in elastic — viscoplastic solids.— J. Mech. Phys. Solids, 1981, vol. 29, N 1.
12. Bassani J. L., McClintock F. A. Creep relaxation of stress around a crack tip.— Int. J. Solids Struct., 1981, vol. 17, N 5.
13. Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material.— J. Mech. Phys. Solids, 1968, vol. 16, N 1.
14. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power — law hardening material.— J. Mech. Phys. Solids, 1968, vol. 16, N 1.
15. Barnby J. T., Nicholson R. D. Local stress and strain during crack growth by steady state creep.— J. Mater. Sci., 1977, vol. 12, N 10.
16. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.

УДК 539.374

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ

В. П. Зебриков

(Куйбышев)

Упругопластическое состояние эксцентрической трубы под действием внутреннего давления рассматривалось в [1]. Решение проводилось методом возмущений при условии, что пластическая зона полностью охватывает внутренний контур. В данной работе предлагается модифицированный метод возмущений, который позволяет исследовать напряженное состояние и развитие пластической зоны с охватом только части контура. Указанным методом решена задача об упругопластическом кручении эксцентрических труб [2].

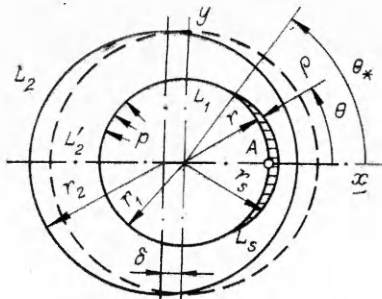
Рассмотрим поперечное сечение эксцентрической трубы (фиг. 1) из идеального упругопластического материала, нагруженной внутренним давлением. Уравнения внутреннего и наружного контуров поперечного сечения эксцентрической трубы имеют вид

$$(1) \quad L_1 : r = r_1,$$

$$L_2 : r = -\delta \cos \theta + \sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \theta} = 1 - \delta \cos \theta + (\delta^2/2) \sin^2 \theta + \dots,$$

где все линейные размеры отнесены к  $r_2$ .

При отсутствии пластической зоны внутреннее давление вызывает напряжения, которые определены методом возмущений [3] с учетом членов с  $\delta$  не выше  $\delta^2$ :



Ф и г. 1

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_0} = & a_0 r^{-2} + 2c_0 + \delta(2b_1 r - 2a_1' r^{-3}) \times \\ & \times \cos \theta + \delta^2(a_0' r^{-2} + 2c_0' - (2a_2 + 6a_2' r^{-4} + \\ & + 4b_2' r^{-2}) \cos 2\theta), \\ \sigma_{\theta_0} = & -a_0 r^{-2} + 2c_0 + \delta(6b_1 r + 2a_1' r^{-3}) \times \\ & \times \cos \theta + \delta^2(-a_0' r^{-2} + 2c_0' + \\ & + (2a_2 + 12b_2 r^2 + 6a_2' r^{-4}) \cos 2\theta). \end{aligned}$$