

3. Крапивский П. Л., Нейланд В. Я. Отрыв пограничного слоя от подвижной поверхности тела в сверхзвуковом потоке газа // Уч. зап. ЦАГИ.— 1982.— Т. XIII, № 3.
4. Жук В. И., Рыжов О. С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 1.
5. Сычев Вик. В. Асимптотическая теория нестационарного отрыва // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 6.
6. Жук В. И. О локально-рециркуляционных зонах в сверхзвуковом пограничном слое на движущейся поверхности // ЖВММФ.— 1982.— Т. 22, № 5.
7. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure // J. de Méc.— 1980.— V. 19, N 3.

г. Жуковский

Поступила 22/VII 1988 г.,
в окончательном варианте — 18/IV 1989 г.

УДК 533.6.011.72+534.2.532

С. Н. Макаров

УТОЧНЕНИЕ ПРАВИЛА РАВНЫХ ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН УМЕРЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

1. В теории слабых ударных волн (УВ) часто используется правило равных площадей, или правило Уизема, по которому интеграл от скорости течения (избыточной плотности или давления) стационарен во времени (см. [1—3])

$$(1.1) \quad \int_L v dX = \text{const},$$

где L — длина волны; $X = x - c_0 t$ — сопутствующая координата. Выражение (1.1) можно рассматривать как закон сохранения для уравнения простой волны

$$v_t + \epsilon v v_x = 0,$$

верный при наличии разрывов [1]. Здесь и ниже $\epsilon = (1/2)(\gamma + 1)$. Правило равных площадей описывает процесс возникновения и развития изознтропического скачка в простой волне, а также законы затухания плоских УВ.

Формула (1.1) следует из анализа соответствующей вязкой задачи. Для этого необходимо применять уравнение простой волны с учетом реальной диссипации (уравнение Бюргерса в нелинейной акустике) [2]

$$(1.2) \quad v_t + \epsilon v v_x - (b/2\rho_0)v_{xx} = 0$$

($b = \zeta + (4/3)\eta + (\gamma - 1)\kappa/c_p$ — диссипативный коэффициент, η , ζ , κ — коэффициенты сдвиговой, объемной вязкости и теплопроводности). Существует теорема [4], согласно которой (1.2) обладает единственным законом сохранения, совпадающим с (1.1).

Заметим, что уравнение Бюргерса в данном случае носит не формальный характер, а выводится из полной системы уравнений движения при выполнении естественных асимптотических условий [2,5]

$$(1.3) \quad \partial/\partial X = O(1), \quad \partial/\partial t = O(\mu); \quad v, \rho' = O(\mu); \quad \eta, \zeta, \kappa = O(\mu),$$

где μ — малый параметр (амплитуда волны); ρ' — избыточная плотность. Физический смысл условий (1.3) заключается в медленном изменении профиля бегущей волны вследствие слабой нелинейности и диссипации.

Правило (1.1) справедливо в малых главном порядке относительно амплитуды волны и имеет погрешность $O(\mu^2)$. Решение уравнения Бюргерса также имеет равномерную погрешность $O(\mu^2)$ [5], хотя само уравнение учитывает малые второго порядка.

2. Рассмотрим возможность уточнения формулы (1.1) в малых второго порядка. Для корректной постановки проблемы нужно знать решение вязкой задачи с той же точностью. Решение уравнения Бюргерса непригодно для данной цели. Поэтому необходимо использовать более точное эволюционное уравнение теории волн конечной амплитуды в вязком теплопроводном политропном газе [6]

$$(2.1) \quad v_t + \epsilon v v_x - \frac{b}{2\rho_0} v_{xx} = \frac{3}{4} \epsilon \frac{b}{\rho_0 c_0} v_x^2.$$

© 1990 Макаров С. Н.

Уравнение (2.1) выводится точно так же, как уравнение Бюргерса, но учитывает малые третьего порядка в уравнениях движения, его погрешность $O(\mu^4)$. Само решение v имеет равномерную погрешность $O(\mu^3)$. Важно, что все кубические нелинейные члены сокращаются. Член правой части того же вида, что и плотность необратимого источника энтропии в неравновесной термодинамике [7], и характеризует неизоэнтропический процесс.

Уравнение (2.1) справедливо при больших числах Рейнольдса в пренебрежении дивергентными диссипативными членами третьего порядка малости вида $b(v^2)_{XX}$, b^2v_{XXX} и т. д. Эти члены исчезающе малы при $b \rightarrow 0$ и не дают вклад в условие на УВ или закон сохранения. Член правой части, напротив, дает конечный вклад третьего порядка малости в условие на скачке при $b \rightarrow 0$ [1, 6].

Уравнение (2.1) обладает законом сохранения, форма которого несколько необычна [6]:

$$(2.2) \quad \int_L \left(\exp\left(\frac{3}{2} \frac{ev}{c_0}\right) - 1 \right) dX = \text{const},$$

но физический смысл имеют только линейный и квадратичный члены ряда. Выражение (2.2) проверяется прямой подстановкой. Предварительно уравнение (2.1) необходимо умножить на $\exp\left(\frac{3}{2} \frac{ev}{c_0}\right)$. Разложение в ряд и исключение членов высших порядков малости дают требуемый результат

$$(2.3) \quad \int_L v dX + \frac{3}{2} \frac{e}{c_0} \int_L v^2 dX = \text{const}.$$

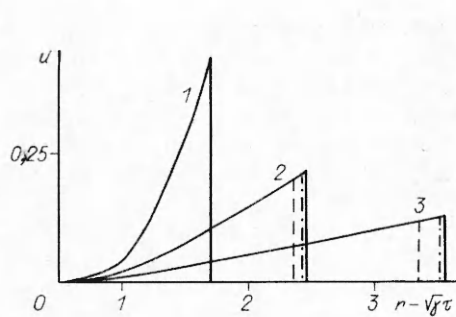
Формула (2.3) не зависит от величины диссипативного коэффициента b и уточняет правило равных площадей (1.1) в малых следующего порядка. Если амплитуда волны мала, нелинейный член можно исключить. Однако для волн умеренной интенсивности он дает конечный вклад.

В данном случае неизоэнтропичность течения проявляется в малых второго порядка относительно амплитуды волны. Если исключить член правой части уравнения (2.1), нелинейное слагаемое в (2.3) будет равно нулю. Такая зависимость подобна выражению для скорости фронта УВ, где неадиабатическая поправка также обнаруживается в малых второго, а не третьего порядка [8].

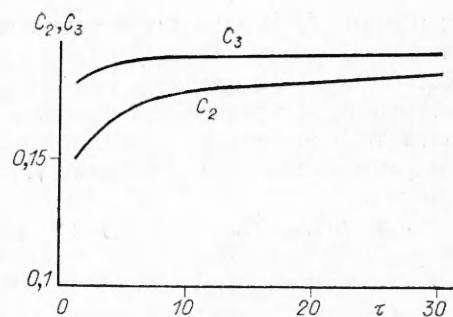
Причина возрастания порядка состоит в кумулятивном характере процессов, описываемых уравнением (2.1). Хотя неизоэнтропическая поправка имеет третий порядок малости, она накапливается на больших расстояниях (временах) и в конце концов влечет за собой изменение решения v в малых второго порядка. Именно этот момент отражает уравнение (2.1). Здесь имеет место аналогия с нелинейным членом в уравнении Бюргерса, или в уравнении простой волны. Нелинейная добавка второго порядка малости также накапливается с течением времени и влечет за собой изменение решения в малых главного порядка.

3. Покажем, что для нестационарных УВ умеренной интенсивности правило (2.3) действительно точнее, чем (1.1). Решение в гладкой области в том и другом случае — вида простой волны и строится методом характеристик.

В качестве исходной была выбрана нестационарная УВ скорости в воздухе ($\gamma = 1,4$), формирующаяся на некотором удалении от центра плоского взрыва [9]. На рис. 1 приведены результаты численного расчета [9] для трех различных моментов времени (сплошные линии). Здесь и ниже использованы безразмерные переменные [9]; значение $r - \sqrt{\gamma} \tau$ (τ — безразмерное время) отвечает системе координат, движущейся со скоростью c_0 ; u — безразмерная скорость течения. Первый момент вре-



Р и с. 1



Р и с. 2

мени соответствует скачку давления на фронте $\Delta p = 0,66$ атм, второй — $0,29$, третий — $0,16$ атм.

Выберем первый профиль в качестве начального условия и построим приближенное решение в гладкой области методом характеристик. Для определения координаты фронта следует применять правило (1.1) или (2.3). В безразмерных переменных

$$(3.1) \quad \int_L u dy = C_2;$$

$$(3.2) \quad \int_L u dy + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{\sqrt{v}} \int_L u^2 dy = C_3$$

($y = r - \sqrt{v}\tau$, C_2, C_3 — некоторые постоянные). При нахождении координаты фронта определенные интегралы от u , u^2 , вычислялись методом трапеций с шагом, не превышающим $0,01L'$ (L' — длина промежутка интегрирования). Недостающие значения подынтегральных функций находились путем графического интерполирования. Результаты вычислений по формулам (3.1), (3.2) представлены на рис. 1. Штриховой линией обозначен ударный фронт по (3.1), штрихпунктирной — по (3.2). Видно, что правило (2.3), или (3.2), уточняет положение фронта УВ и амплитуду скачка скорости. В таблице сведены значения относительной погрешности в нахождении координаты фронта Δf (по отношению к характерной динамической длине r_0 [9]) и амплитуды скачка скорости Δv по сравнению с численным решением. Индекс 2 означает результат, соответствующий правилу равных площадей, индекс 3 — более точной формуле (3.2); $\tau = 0,989; 4,997; 15,93$ отвечают профилям, изображенным на рис. 1 (кривые 1—3). Из приведенных данных следует, что в указанном диапазоне интенсивностей поправка в правило равных площадей весьма существенна и уменьшает погрешность в среднем не менее чем в 4 раза.

	τ					
	0,989	1,993	4,997	7,967	15,93	29,90
$z = \frac{P_2 - P_0}{P_0}$	0,656	0,459	0,289	0,229	0,163	0,119
$\Delta f_2, \%$	—	3,1	9,0	14	21	34
$\Delta f_3, \%$	—	0,8	2,4	4,0	4,0	8,0
$\Delta v_2, \%$	—	2,9	6,2	7,6	9,1	10,4
$\Delta v_3, \%$	—	0,7	1,8	2,0	2,2	2,5
C_2	0,149	0,159	0,168	0,175	0,179	0,185
C_3	0,180	0,183	0,186	0,190	0,189	0,192
$\Delta C_2, \%$	—	6,7	13,4	17,5	20,1	23,7
$\Delta C_3, \%$	—	1,7	3,3	5,6	5,0	6,7

Интересно проследить за поведением «постоянных» C_2 , C_3 для численного решения [9] в разные моменты времени (см. таблицу, здесь же приведена погрешность по отношению к начальным данным). Приблизительный ход кривых $C_2(\tau)$ и $C_3(\tau)$ проиллюстрирован рис. 2. Ввиду некоторого разброса табличных значений было проведено графическое интерполирование. Различие между C_2 и C_3 особенно велико при небольших τ , когда амплитуда волны еще не слишком мала. С течением времени оно становится не столь значительным, и в пределе $\tau \rightarrow \infty$ кривые C_2 , C_3 сливаются в одну.

На гладких участках профиля приближение простой волны практически всюду совпадает с численным решением. Исключение составляет небольшая зона в хвосте волны при $\tau \geq 15,93$, где результат будет несколько занижен. Этот вывод согласуется с [10], где показано, что приближение простой волны в гладкой области можно использовать вплоть до чисел Маха порядка 1,5.

4. Проанализируем формулу (2.3) с газодинамической точки зрения. В газовой динамике (см., например, [1, 3]) правило равных площадей следует из решения типа простой волны с характеристической скоростью

$$(4.1) \quad dx/dt = c_0 + \varepsilon v,$$

дополненного выражением для скорости слабого скачка

$$(4.2) \quad dx_s/dt = c_0 + (1/2)\varepsilon(v_1 + v_2).$$

Уравнение (2.1) в пределе $b \rightarrow 0$ дает более точный результат [6]

$$(4.3) \quad dx_s/dt = c_0 + (1/2)\varepsilon(v_1 + v_2) + (1/8)\varepsilon^2[v]^2/c_0$$

(c_0 — равновесная скорость звука в покоящейся среде). Поэтому естественно предположить, что правило (2.3) можно обосновать с помощью решения для простой волны и формулы (4.3) для скорости скачка умеренной интенсивности.

Из геометрической картины искажения профиля скорости течения (см. [3, с. 537]) следует, что закон сохранения (2.3) можно переписать как

$$(4.4) \quad \int_{v_1}^{v_2} (x - x_s) dv + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon}{c_0} \int_{v_1}^{v_2} (x - x_s) dv^2 = \text{const.}$$

Первый интеграл — разность площадей, отсекаемых УВ, второй — та же разность на графике функции v^2 .

Продифференцируем выражение (4.4) по времени, используя (4.1), (4.3). Отбросив члены четвертого порядка малости, получим

$$(4.5) \quad \varepsilon \int_{v_1}^{v_2} \left(v - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \right) dv - \frac{1}{8} \frac{\varepsilon^2}{c_0} (v_2 - v_1)^2, \\ \int_{v_1}^{v_2} dv + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2}{c_0} \int_{v_1}^{v_2} \left(v - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \right) dv^2 = 0.$$

Необходимо иметь в виду, что хотя пределы интегрирования переменны, разность $x - x_s$ на них всюду обращается в нуль. Поэтому достаточно дифференцировать только под знаком интеграла [3]. Первый интеграл (4.5) обращается в нуль в силу правила равных площадей. Нетрудно проверить, что второй интеграл сокращается с третьим, так что равенство (4.5) выполняется тождественно.

Таким образом, правило (2.3) вытекает из адиабатического решения для простой волны и выражения для скорости ударного фронта (4.3).

Последнее носит неизоэнтропический характер: если применять только два механических условия на разрыве для адиабатического течения, третий член в (4.3) будет иметь другой вид. Названное свойство составляет специфику модели (см. п. 2) и означает, что исследуется только накапливающаяся неизоэнтропическая поправка, проявляющаяся в малых второго порядка. На гладких участках профиля накапливания не происходит и приближение простой волны остается без изменений. Более тонкие неизоэнтропические эффекты — отраженная волна и энтропийный след — третьего порядка малости и должны быть изучены особо [2, 6, 11].

5. Использование приближения простой волны совместно с формулой (4.3) неоднократно обсуждалось в литературе и составляет содержание известного метода К. Фридрихса (см. [8]). Правило (2.3), вероятно, более удобно, особенно по отношению к сложным возмущениям. В частности, оно приводит к новой закономерности эволюции N -волн с уравновешенными фазами. Последняя состоит в несимметричном искажении профиля волны и обнаружена в [12] путем численного анализа решений уравнения (2.1) в слабвязкой среде.

Рассмотрим N -волну с прямым порядком следования фаз в сопутствующей системе координат. Асимптотическое решение в гладкой области при $t \rightarrow \infty$ $v = X/et$. Подставляя это выражение в (2.3), определим координату скачка в положительной и отрицательной фазе:

$$s^{\pm} = \pm \sqrt{2\epsilon C^{\pm} t} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{c_0} C^{\pm}.$$

Постоянные имеют вид

$$C^{\pm} = V \pm \frac{3}{4} \frac{\epsilon}{c_0} W,$$

где V — площадь положительной или отрицательной фазы волны в начальный момент времени; W — площадь под графиком функции v^2 в положительной или отрицательной фазе.

Так как $C^+ > C^-$, длина положительной фазы волны возрастает быстрее, чем длина отрицательной, поэтому $s^+ > |s^-|$. Точно так же амплитуда скачка в положительной фазе волны превышает амплитуду скачка в отрицательной. Для N -волны с обратным порядком следования фаз фаза сжатия идет за фазой разрежения, а разрыв находится в центральной точке $X = 0$. Асимптотическое решение записывается [1] как

$$(5.1) \quad v = (X - a)/et, \quad s_0 < X < a; \quad v = (X + a)/et, \quad -a < X < s_0$$

($2a$ — длина волны; координата скачка s_0 , согласно правилу равных площадей, равна нулю во все моменты времени). Подстановка (5.1) в (2.3) дает более точное значение

$$s = \frac{3}{8} \frac{\epsilon^2}{c_0} \frac{W}{a} t - \frac{1}{4} \frac{a^2}{c_0 t},$$

которое показывает, что N -волна с обратным порядком следования фаз также искажается несимметрично. Скачок смещается в область отрицательной фазы и движется по профилю волны. Если t очень велико, отрицательная фаза полностью исчезает, а сама волна превращается в однополярный импульс.

Для задачи о распространении гармонического на входе сигнала правило (2.3) приводит к появлению и росту сдвига фаз и постоянной составляющей скорости течения второго порядка малости на стадии пилообразной волны [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.

4. Виноградов А. М., Красильщик И. С. Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии // ДАН СССР.— 1980.— Т. 253, № 6.
5. Лейбович С., Сибасс Р. Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргера и Кортевега-де Вриза // Нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
6. Макаров С. Н., Хамзина Б. С. Эволюция гармонического сигнала в газодинамическом приближении теории плоских волн конечной амплитуды // Акуст. журн.— 1988.— Т. 34, № 1.
7. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1974.
8. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
9. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы.— М.: Наука, 1974.
10. Nakamura Y., Nakashima Y. Analysis of unsteady shock propagation generated by interaction with simple expansion waves // Techn. Repts Kumamoto Univ.— 1987.— V. 36, N 1.
11. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. К расчету волн конечной амплитуды в газодинамическом приближении // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 2.
12. Макаров С. Н., Хамзина Б. С. Численный расчет эволюции интенсивных импульсов в газодинамическом приближении // Вестн. ЛГУ. Сер. 1.— 1987.— № 3.

г. Ленинград

Поступила 3/IV 1989 г.

УДК 517.9:536.46

Вит. А. Вольперт, Вл. А. Вольперт

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СКОРОСТИ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод последовательных приближений может быть использован не только при изучении качественных вопросов, таких как существование решений, но и при определении количественных характеристик этих решений. Известны отдельные работы (см. [1]), в которых данный подход применялся к задачам горения, но существенного развития в теории горения он не получил. По-видимому, это объясняется тем, что не всегда удается подобрать удачную реализацию метода (их может быть несколько) и начальное приближение.

В настоящей работе метод последовательных приближений использован для определения скорости волны горения в конденсированной среде. Построены сходящиеся приближения, монотонно убывающие к искомому решению, и приближения, монотонно возрастающие. Таким образом получены оценки скорости сверху и снизу, причем удачный выбор начального приближения дает совпадение асимптотик этих оценок уже для первых приближений, что позволяет найти асимптотику скорости в старших членах.

1. Постановка задачи. Система дифференциальных уравнений, описывающая распространение фронта реакции n -го порядка в конденсированной среде, имеет вид

$$(1.1) \quad \theta'' - u\theta' + (1/\gamma)a^n\Phi(\theta) = 0, \quad ua' + (1/\gamma)a^n\Phi(\theta) = 0.$$

Здесь θ — безразмерная температура; a — концентрация исходного вещества; u — скорость волны; штрих обозначает дифференцирование по пространственной переменной x ;

$$(1.2) \quad \Phi(\theta) = \begin{cases} 0, & (-1 \leq \theta < -1 + h), \\ \exp \frac{\theta}{\gamma + \beta\theta}, & (-1 + h \leq \theta \leq 0); \end{cases}$$

β и γ — традиционные для задач горения малые параметры; $\beta = RT_*/E$; $\gamma = RT_*^2/qE$; T_* — температура горения; $T_* = T_n + q$; T_n — начальная температура смеси; q — адиабатический разогрев реакции; E — энергия активации реакции; R — газовая постоянная; h — величина обрезки источника. Граничные условия при $x \rightarrow \pm\infty$: $\theta(-\infty) = -1$, $a(-\infty) = 1$; $\theta(+\infty) = a(+\infty) = 0$.

Асимптотика скорости волны горения для указанной модели рассматривалась в [2—5]. В настоящее время можно считать, что вопрос об