

В области существенного диссипативного тепловыделения механизм самозамедления несколько меняется. Тепло, выделяемое в жидкости за счет внутреннего трения, поглощается реакцией и отводится через поперечное сечение трубки конвекцией. Так как скорость тепловыделения примерно такая же, как и скорость конвекционной теплопередачи (оба процесса определяются скоростью движения жидкости), то механизм образования тепловой неустойчивости в принципе остается прежним: начиная с некоторого критического перепада давления источник тепла перестает уравновешивать сток. Если вязкость жидкости слабее зависит от температуры, чем скорость теплопоглощения, то критических явлений не наблюдается; в этом случае понижение температуры жидкости приводит к эквивалентному понижению мощности стока тепла, тем самым стабилизируя процессы теплообмена и движения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольтер Б. В., Сальников И. Б. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М.: Химия, 1972.
2. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом взрыве.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
3. Ваганов Д. А. Критические явления, вызванные изменением вязкости с глубиной превращения.— ПМТФ, 1975, № 2.
4. Найденов В. И. Об интегральных уравнениях, описывающих распределение температуры в плоском течении неньютоновских сред.— ПМТФ, 1983, № 5.
5. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4.
6. Мартинсон Л. К. О конечной скорости распространения тепловых возмущений в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности.— ЖВММФ, 1976, т. 16, № 5.
7. Мартинсон Л. К. Тепловой пограничный слой в нелинейной среде с объемным поглощением тепла.— ЖВММФ, 1981, т. 21, № 4.
8. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
9. Николс Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

Поступила 29/VIII 1984 г.

УДК 532.526

### МОДЕЛЬ ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

*М. Д. Камчибеков*

(Москва)

1. Тейлоровская (или рэлей-тейлоровская) неустойчивость (ТН) возникает на границе раздела тяжелой и легкой жидкостей в поле тяжести, когда тяжелая жидкость располагается сверху. ТН активно изучалась как экспериментально [1], так и теоретически с привлечением аналитических методов [2—5], а также путем численного моделирования развития неустойчивости [6—8]. Интерес к этому явлению в последнее время усилился в связи с проблемами управляемого термоядерного синтеза с инерциальным удержанием плазмы. Показано [9, 10], что развитие неустойчивости на поверхностях оболочек мишени происходит адекватно ТН и может приводить к ухудшению симметрии сжатия и выходных характеристик мишени. Для проведения оценок развития ТН в такого рода задачах полезной представляется простая модель, которая бы описывала рост возмущений с приемлемой для практических целей точностью. В данной работе в рамках физически оправданных допущений относительно профиля возмущений, позволяющих упростить постановку задачи о развитии ТН, получены уравнения, правильно описывающие как линейную, так и асимптотическую стадию ТН.

2. Обычная постановка задачи о развитии ТН заключается в следующем [4]. В однородном поле тяжести с ускорением  $g$ , направленным вниз, при  $z > \theta(x, t)$  располагается тяжелая жидкость с плотностью  $\rho$ , а при  $z < \theta(x, t)$  — легкая жидкость с плотностью  $\rho_*$  ( $\rho_* < \rho$ );  $\theta(x, t)$  — вертикальная координата поверхности раздела тяжелой и легкой жидкостей;  $z, x$  — вертикальная и горизонтальная декартовы координаты.

В момент времени  $t = 0$  задается начальное возмущение поверхности раздела

$$(2.1) \quad \theta(x, t = 0) = \theta_0 \cos kx$$

с длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Требуется определить последующую эволюцию поверхности  $\theta(x, t)$ .

Периодичность и четность по  $x$  начального возмущения (2.1) позволяют ограничиться рассмотрением течения на интервале  $0 \leq x \leq \lambda/2$ . Как известно [4], на нелинейной стадии развития ТН начальная косинусоидальная форма границы искажается: тяжелая жидкость проникает в легкую в виде тонкой «струи», а легкая жидкость всплывает в тяжелую в виде «пузыря». При этом в области  $z = 0$ ,  $0 \leq x \leq \lambda/2$  «пузырь» занимает сечение  $S_+ = [0, x_0]$ , а «струя»  $S_- = [x_0, \lambda/2]$ ;  $x_0$  — граница «пузыря» — «струи». Для возмущения (2.1) горизонтальная координата центра «пузыря»  $x = 0$ ; соответствующая координата центра «струи»  $x = \lambda/2$  и  $x_0 = \lambda/4$ . Будем называть максимальную глубину проникновения тяжелой жидкости в легкую, отсчитываемую от положения равновесия  $z = 0$ , амплитудой «струи», а соответствующую величину для легкой жидкости — амплитудой «пузыря». Естественно попытаться построить модель ТН, которая бы описывала рост возмущений в терминах амплитуд «струи» и «пузыря» как на линейной, так и на нелинейной стадии развития ТН.

Рассмотрим случай  $\rho_* = 0$ . Для потенциальных течений несжимаемой невязкой жидкости, в классе которых рассматривается ТН, в поле тяжести  $g$  запишем интеграл Коши — Лагранжа (К — Л) тяжелой жидкости в виде

$$(2.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}, \quad z > \theta(x, t),$$

где  $\Phi$  — потенциал скоростей, связанный с полем скоростей  $\mathbf{v}$  соотношением  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ ;  $p(x, z, t)$  — поле давлений;  $p_0 \equiv p(z \leq \theta)$ ;  $v_0^2 \equiv v^2(z = 0, x = x_0)$ ;  $\rho$  — плотность тяжелой жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\theta(x, t)$  — вертикальная координата возмущенной поверхности;  $x_0$  — граница «пузыря» — «струи».

Предполагая, что сечения «пузыря»  $S_+$  и «струи»  $S_-$  медленно изменяются со временем, усредним (2.2) по сечениям «пузыря» и «струи» при  $z > \theta_{\max}$ :

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi \rangle_{\pm} + \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle_{\pm} + gz + \frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{\pm} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Здесь  $\langle v^2 \rangle_{\pm} = \frac{1}{S_{\pm}} \int_{S_{\pm}} ds v^2, \dots$ ;  $\theta_{\max}$  — максимальное значение  $\theta(x, t)$  в момент времени  $t$ ; знаком плюс отмечены величины, усредненные по сечению «пузыря»  $S_+$ , а знаком минус — величины, усредненные по сечению «струи»  $S_-$ .

В частности,

$$\langle v^2 \rangle_+ = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} dx v^2(x, z, t), \quad \langle v^2 \rangle_- = \frac{1}{(\lambda/2 - x_0)} \int_{x_0}^{\lambda/2} dx v^2(x, z, t).$$

Введем параметры

$$\gamma_{\pm} = \frac{\langle v^2 \rangle_+}{\langle v_z^2 \rangle_{\pm}}$$

и запишем вместо (2.3)

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi \rangle_{\pm} + \frac{1}{2} \gamma_{\pm} \langle v_z^2 \rangle_{\pm} + gz + \frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{\pm} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Для получения основных уравнений модели тейлоровской неустойчивости (МТН) примем следующие допущения.

1. Возмущение имеет «прямоугольный» профиль, характеризуемый параметрами:  $b$  — амплитуда «пузыря»;  $a$  — амплитуда «струи»;  $x_0$  — полуширина «пузыря», связанная с  $a$  и  $b$  уравнением непрерывности

$$(2.5) \quad bx_0 = a(\lambda/2 - x_0).$$

2. Уравнение (2.4) можно продолжить на значения  $z < \theta_{\max}$ , используя функциональные зависимости, полученные при  $z > \theta_{\max}$ .

3. Для получения функциональных зависимостей в (2.4) можно ограничиться асимптотическим представлением для потенциала скоростей  $\Phi_*$ , которое с учетом периодичности по  $x$  и условия затухания возмущений при  $z \rightarrow +\infty$  имеет вид

$$(2.6) \quad \Phi_* = -q(t)e^{-hz} \cos kx, \quad z > \theta_{\max}.$$

Из (2.6) получаем соотношения для поля скоростей:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} v_z &= qke^{-hz} \cos kx = -k\Phi_*, \\ v_x &= qke^{-hz} \sin kx, \quad v^2 = (qk)^2 e^{-2hz}. \end{aligned}$$

Как следует из (2.7) и определения параметров  $\gamma_{\pm}$ , величины  $\gamma_{\pm}$  не зависят от  $z$ , а являются функциями только  $x_0$ :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \gamma_+ &= 1 + \frac{\int_0^{x_0} dx \sin^2 kx}{\int_0^{x_0} dx \cos^2 kx} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2\pi\delta} \sin 2\pi\delta}{1 + \frac{1}{2\pi\delta} \sin 2\pi\delta}, \\ \gamma_- &= 1 + \frac{\int_{\lambda/2}^{x_0} dx \sin^2 kx}{\int_{x_0}^{\lambda/2} dx \cos^2 kx} = 1 + \frac{1 + \frac{1}{2\pi(1-\delta)} \sin 2\pi\delta}{1 - \frac{1}{2\pi(1-\delta)} \sin 2\pi\delta}, \\ \delta &= \frac{x_0}{\lambda/2}, \quad 1/2 \leq \delta < 1; \end{aligned}$$

причем при  $\delta \rightarrow 1$   $\gamma_+ \rightarrow 2$ ,  $\gamma_- \rightarrow 1$ .

Используя соотношение  $\langle \Phi_* \rangle_{\pm} = -(1/k) \langle v_z \rangle_{\pm}$ , вытекающее из (2.7), вместо (2.4) запишем

$$(2.9) \quad -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \langle v_z \rangle_{\pm} + \frac{1}{2} \gamma_{\pm} \langle v_z^2 \rangle_{\pm} + gz + \frac{1}{\rho} \langle p \rangle_{\pm} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Тогда уравнение для амплитуды «пузыря»  $b$  получим из (2.9), полагая  $z = b$ ,  $\langle v_z \rangle_+ = \dot{b}$ ,  $\langle v_z^2 \rangle_+ = \dot{b}^2$ ,  $\langle p \rangle_+ = p_0$ :

$$(2.10) \quad \ddot{b} = gkb - \frac{k^*}{2} [v_0^2 - \gamma_+ \dot{b}^2].$$

Аналогично для амплитуды «струи»  $a$  имеем уравнение, полагая в

$$(2.9) \quad z = -a, \quad \langle v_z \rangle_- = -\dot{a}, \quad \langle v_z^2 \rangle_- = \dot{a}^2, \quad \langle p \rangle_- = p_0:$$

$$(2.11) \quad \ddot{a} = gka + \frac{k^*}{2} [v_0^2 - \gamma_- \dot{a}^2].$$

Чтобы замкнуть уравнения (2.10), (2.11), необходимо определить величину  $v_0^2$ . В общем случае сделать это не удастся. Однако можно заметить, что если опустить выражения в квадратных скобках в (2.10), (2.11), то получим обычные уравнения линейной теории для роста возмущений. Это позволяет интерпретировать члены в квадратных скобках в (2.10),

(2.11) как поправочные к линейной теории. Учитывая, что при малых амплитудах возмущений представление потенциала скоростей в виде (2.6) справедливо и при  $z < \theta_{\max}$  и соответственно величина  $v^2$  зависит только от  $z$ :

$$v^2 \sim e^{-2kz},$$

используем линейную экстраполяцию  $v^2(z)$  из  $z = b$  в  $z = 0$ :

$$v_0^2 = \langle v^2(z = b) \rangle_+ (1 + 2kb) = \gamma_+ \dot{b}^2 (1 + 2kb).$$

Тогда вместо (2.10) запишем

$$(2.12) \quad \ddot{b} = \gamma_+ k \dot{b} - \gamma_+ k^2 b \dot{b}^2.$$

Для аналогичной оценки выражения в квадратных скобках в (2.11) представим  $v_0^2$  в виде

$$v_0^2 = \langle \dot{v}^2(z = 0) \rangle_- = \langle v_x^2(z = 0) \rangle_- + \langle v_z^2(z = 0) \rangle_-.$$

Полагая приближенно

$$\begin{aligned} \langle v_x^2(z = 0) \rangle_- &= \langle v_x^2(z = b) \rangle_+ = (\gamma_+ - 1) \dot{b}^2, \\ \langle v_z^2(z = -a) \rangle_- &= \dot{a}^2 = \langle v_z^2(z = 0) \rangle_- (1 + 2ka), \end{aligned}$$

получим

$$[v_0^2 - \gamma_- \dot{a}^2] = (\gamma_+ - 1) \dot{b}^2 + \frac{\dot{a}^2}{1 + 2ka} - \gamma_- \dot{a}^2$$

и уравнение для  $a$  в виде

$$(2.13) \quad \ddot{a} = gka + \frac{k}{2} \left[ (\gamma_+ - 1) \dot{b}^2 + \frac{\dot{a}^2}{1 + 2ka} - \gamma_- \dot{a}^2 \right].$$

Анализ уравнений (2.12), (2.13) показывает, что: 1) при малых амплитудах и скоростях возмущений (2.12), (2.13) близки к обычным уравнениям линейной теории; 2) с увеличением амплитуды возмущения (и скорости) ускорение «пузыря» уменьшается и стремится к нулю, так что асимптотически «пузырь» поднимается с постоянной скоростью; 3) с увеличением амплитуды возмущения (и скорости) движение «струи» переходит в свободное падение в поле тяжести с ускорением  $g$ .

Величина асимптотической скорости «пузыря», как следует из (2.12), равна

$$v_* = \sqrt{g/2k} = 0,28 \sqrt{g\lambda}.$$

Этот результат удовлетворительно согласуется с данными [1, 3—7]:

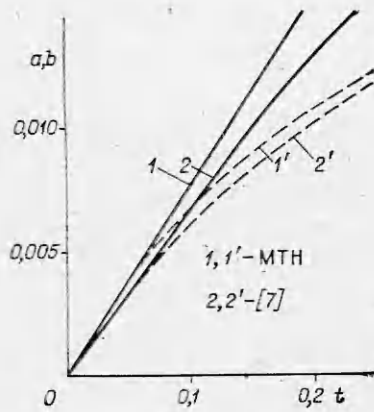
$$v_* = (0,2 - 0,3) \sqrt{g\lambda}.$$

Отметим, что при больших начальных скоростях возмущений  $v_{00}$  «пузырь» испытывает сильное торможение. Это приводит к «быстрому» искажению профиля возмущений, т. е. к быстрому изменению  $x_0$  со временем. При этом линейная теория оказывается неприменимой и при малых амплитудах возмущений. Из (2.12) следует условие «быстрого» изменения профиля  $\gamma_+ k^2 \dot{b}^2 b \gg gkb$  или при  $\gamma_+ = 2$ ,  $\dot{b} = v_{00}$

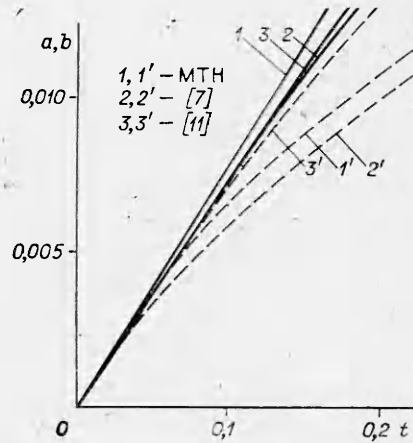
$$2kv_{00}^2/g \gg 1.$$

Оценки роста возмущений в этом случае можно проводить, если в (2.13) положить

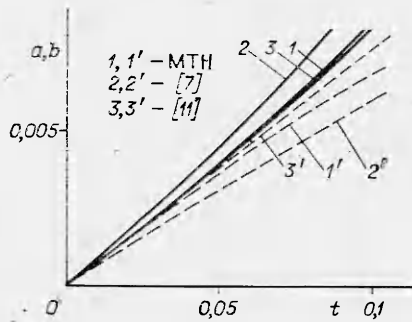
$$(\gamma_+ - 1) \dot{b}^2 = 2v_{00}^2 - \dot{b}^2, \quad \gamma_- = 1.$$



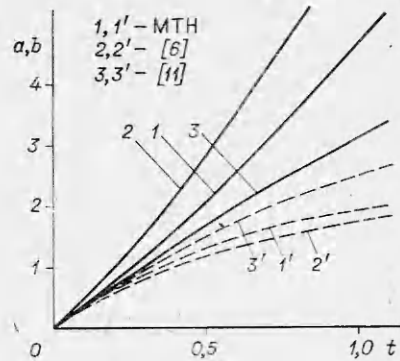
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

Уравнения (2.12), (2.13) обобщаются на случай, когда плотность легкой жидкости  $\rho_*$  не равна нулю. Асимптотический потенциал в легкой жидкости запишется в виде

$$\Phi_* = \xi(t) e^{kz} \cos kx, \quad z < \theta_{\min},$$

где  $\theta_{\min}$  — минимальное значение поверхности раздела  $\theta(x, t)$ .

Проводя усреднение интеграла К — Л (2.2) для данного потенциала по сечениям «пузыря» и «струи», можно получить соотношение, аналогичное (2.9). Далее, ограничиваясь случаем  $\rho_* \ll \rho$ , пренебрегая квадратами скоростей легкой жидкости и используя условия непрерывности на границе легкой и тяжелой жидкостей величин  $\langle v_z \rangle_{\pm}$  и  $\langle p \rangle_{\pm}$ , приходим к следующим уравнениям для  $b$  и  $a$ :

$$(2.14) \quad \ddot{b} = g \left( \frac{\rho - \rho_*}{\rho + \rho_*} \right) kb - \gamma_+ \left( \frac{\rho}{\rho + \rho_*} \right) k^2 \dot{b}^2 b;$$

$$(2.15) \quad \ddot{a} = g \left( \frac{\rho - \rho_*}{\rho + \rho_*} \right) ka + \frac{k}{2} \left( \frac{\rho}{\rho + \rho_*} \right) \left[ (\gamma_+ - 1) \dot{b}^2 + \frac{\dot{a}^2}{1 + 2ka} - \gamma_- \dot{a}^2 \right].$$

Уравнения (2.14), (2.15) совместно с (2.5) и (2.8), являющиеся основными уравнениями МТН, при малых амплитудах возмущений согласуются с линейной теорией, а при больших амплитудах дают правильную асимптотику как для «пузырей», так и для «струй». Оценки ширины «пузырей» и «струй», зная амплитуды возмущений, нетрудно получить из (2.5).

3. Результаты расчетов тейлоровской неустойчивости по МТН, которые сравниваются с соответствующими двумерными расчетами [7], для значений  $\rho/\rho_* = 1,5; 2,0; 10$  представлены на рис. 1—3, а с двумерными расчетами [6] для  $\rho = 1, \rho_* = 0$  — на рис. 4. В [7] использовались

следующие параметры возмущений:  $k = 157$ ,  $a_0 = 0$ ,  $v_{00} = 0,078$ ,  $g = 1$ ,  $a_0$  — начальная амплитуда возмущения. Параметр  $2kv_{00}^2/g = 1,91$ , что свидетельствует с учетом ненулевой плотности легкой жидкости о «медленном» искажении профиля и, следовательно, применимости уравнений (2.14), (2.15) для этого случая. В [6] задавалось  $k = 0,6545$ ,  $a_0 = 0$ ,  $v_{00} = 3,272$ ,  $g = 1$ . Тогда  $2kv_{00}^2/g = 14$ , что соответствует «быстрому» искажению профиля, поэтому в уравнении для «струй» (2.15) использовалось  $(\gamma_+ - 1)\dot{b}^2 = 2v_{00}^2 - \dot{b}^2$ ,  $\gamma_- = 1$ .

На рис. 1—4 приведены зависимости амплитуд «струй» (сплошные) и «пузырей» (штриховые линии) от времени. Сравнение амплитуд возмущений, рассчитанных по МТН, с соответствующими величинами, полученными в двумерных расчетах [6, 7], показывает, что они удовлетворительно согласуются между собой. На рис. 2—4 приводятся также результаты расчетов ТН по эвристической модели [11], которые в целом несколько хуже согласуются с расчетами [6, 7].

Предлагаемая модель тейлоровской неустойчивости в отличие от [11] не содержит феноменологических констант и пригодна для оценок роста возмущений как для «медленного», так и для «быстрого» искажения профиля возмущений в широком диапазоне  $\rho/\rho_*$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis D. J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II.— Proc. Roy. Soc. London, 1950, v. A202, N 1068.
2. Ферми Э. Научные труды. М., 1972, т. 2.
3. Garabedian P. R. On steady state bubbles generated by Taylor instability.— Proc. Roy. Soc. London, 1957, v. A241, N 1226.
4. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора.— В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964.
5. Layzer D. On the instability of superposed fluids in a gravitational field.— Astrophys. J., 1955, v. 122, N 1.
6. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical study of large amplitude free-surface motion.— Phys. Fluids, 1966, v. 9, N 5.
7. Daly B. J. Numerical study of two fluid Rayleigh — Taylor instability.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, N 2.
8. Анучина Н. Н., Бахрах С. М., Забродин А. В. и др. Исследования по гидродинамической неустойчивости границы раздела двух сред.— В кн.: Исследование гидродинамической устойчивости с помощью ЭВМ/Под ред. К. И. Бабенко. М.: ИИМ, 1981.
9. Волосевич П. П., Гамалий Е. Г. и др. Двумерные эффекты при лазерном сжатии стеклянных оболочек.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 24, вып. 5.
10. Freeman J. R., Clauser M. J., Thompson S. L. Rayleigh — Taylor instabilities in inertial-confinement fusion targets.— Nuclear Fusion, 1977, v. 17, N 2.
11. Baker L., Freeman J. R. Heuristic model of nonlinear Rayleigh — Taylor instability.— J. Appl. Phys., 1981, v. 52, N 2.

Поступила 10/VIII 1984 г.

УДК 536.24 : 532.529.

### АСИМПТОТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРИСТЕННЫХ ГАЗОВЫХ ЗАВЕС И ИХ УПРАВЛЕНИЯ

Н. Н. Кортиков, Ю. А. Смирнов  
(Ленинград)

Защита твердых тел от высокотемпературных газовых потоков — актуальная проблема современной техники. Аэродинамическая защита осуществляется с помощью газовых завес. Один из основных способов организации такой завесы — вдув холодного газа через щели в начальном сечении защищаемой поверхности [1]. Задача расчета заключается в определении закона изменения температуры поверхности тела в области газовой завесы. Существующие методы расчета пристенных газовых завес подразде-