Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 3

МОДЕЛИ ВЫПУЧИВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

УДК 539.3

Н. С. Астапов

**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск**

В данной работе рассмотрено $(m+1)$-параметрическое семейство математических моделей, описывающих закритическое поведение шарнирно опертого стержня, лежащего на нелинейно-упругом основании и нагруженного осевой сжимающей силой. Приведены аналитические выражения форм выпучивания и зависимости нагрузка — прогиб, построенные методом возмущений. Проведен анализ начального закритического поведения системы в зависимости от значений параметров, характеризующих жесткость основания. Отмечена возможность неустойчивого закритического поведения системы. Выявлены противоречия, возникающие при использовании для описания выпучивания стержня некоторых известных [1] моделей упругого основания. С помощью теории катастроф указаны такие модели семейства, которые более адекватно [2] отражают процесс выпучивания.

1. Постановка задачи. Рассмотрим шарнирно опертый стержень длиной L, лежащий на нелинейно-упругом основании и нагруженный осевой сжимающей силой P, которая сохраняет направление при деформации стержня [3, 4]. Длина L осевой линии стержня предполагается неизменной. Обозначим через l расстояние между концами стержня. Предположим, что ось стержня может изгибаться только в плоскости. Исследуем предсказываемое различными моделями закритическое поведение системы стержень — основание.

2. Семейство моделей. Возьмем выражение общей потенциальной энергии системы в виде

$$U = -\frac{1}{2} EI \int\limits_0^L æ^2 ds - P\,(L-l) +$$

$$+ \int\limits_0^L\int\limits_0^w (c_1 w + c_3 w^3 + \ldots + c_{2m-1} w^{2m-1})(1 - w_s^2)^{\beta/2} dw ds, \qquad (2.1)$$

где EI — изгибная жесткость; $æ$ — кривизна оси стержня; параметры c_i учитывают линейную ($i = 1$) и нелинейную (нечетное $i \geqslant 3$) составляющие жесткости основания [3]; s — длина дуги оси стержня. Функция $w(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant L)$ определяет [3–5] деформированное положение стержня и должна удовлетворять геометрическим краевым условиям задачи

$$w(0) = w(L) = w_{ss}(0) = w_{ss}(L) = 0. \qquad (2.2)$$

Множитель $(1 - w_s^2)^{\beta/2}$ в выражении (2.1) учитывает геометрическую нелинейность основания, т. е. изменение отклика основания при изгибе стержня [4]. Выразим кривизну $æ$ и расстояние l через функцию $w(s)$ и подставим в (2.1). Функция $w(s)$, минимизирующая функционал (2.1), удовлетворяет уравнению Эйлера, которое с точностью до членов шестой степени включительно, содержащих функцию $w(s)$ и ее производные, можно записать как

$$EIw_{ssss} + EI\,(w_{ss}^2 + 4w_s w_{sss} + 4w_s^3 w_{sss} + 5w_s^2 w_{ss}^2)\,w_{ss} + P\left(1 + \frac{1}{2}\,w_s^2 + \frac{3}{8}\,w_s^4\right)w_{ss} +$$

$$+ c_1 w\left(1 + \frac{\beta-2}{2}\,w_s^2 + \frac{\beta(3\beta-2)}{8}\,w_s^4\right) + c_3 w^3\left(1 + \frac{\beta-2}{2}\,w_s^2\right) = 0. \qquad (2.3)$$

Решая уравнение (2.3) при граничных условиях (2.2) методом возмущений так же, как в [3, 4], получим выражение для формы начального выпучивания стержня по n полуволнам

$$w_n(s) = a_n \sin\frac{n\pi s}{L} + k_n a_n^3 \sin 3\,\frac{n\pi s}{L} + O(a_n^5) \qquad (2.4)$$

(величина a_n приближенно равна амплитуде прогиба стержня (предполагается $a_n/L \ll 1$), k_n — переменная, зависящая от n, c_1, c_3 и β, но не от s) и зависимость нагрузка — прогиб

$$P_n = EI\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[n^2 + \frac{r_1}{n^2} + \frac{n^6 - n^2 r_1(3-\beta) + 6r_3}{8n^2}\left(\frac{\pi a_n}{L}\right)^2\right] + O(a_n^4), \qquad (2.5)$$

где $r_1 = c_1(L/\pi)^4/EI$; $r_3 = c_3(L/\pi)^6/EI$. Для $r_1 = n^2(n+1)^2$, кроме симметричных равновесных форм (2.4), возможны несимметричные формы, подробно исследованные в [3] для $\beta = 1$, $c_i = 0\,(i > 3)$ и в [4] для $c_i = 0\,(i > 1)$. Поэтому случай $r_1 = n^2(n+1)^2$ здесь не рассматривается.

3. Неустойчивость закритического поведения. Анализируя выражение (2.5), видим, что устойчивость закритического поведения системы по форме $w_n(s)$ определяется знаком выражения $n^6 - n^2 r_1(3-\beta) + 6r_3$, который зависит от трех параметров: β, r_1 и r_3. Так, при $r_i = 0$ получается классическая задача о выпучивании упругого стержня без основания, причем закритическое поведение этой системы по любой форме устойчиво. При $r_1 = 1$, $r_3 = -1$, $\beta = 2$, что соответствует с точностью до величин четвертого порядка малости относительно прогиба стержня модели, рассмотренной в [6], получим $n^6 - n^2 - 6 < 0$ для $n = 1$, т. е. неустойчивое начальное закритическое поведение по одной полуволне. Возможность неустойчивого закритического поведения в некоторых классических моделях указана в [4], экспериментально она установлена в [7]. Поэтому естественно ожидать, что в моделях, адекватно описывающих [2] выпучивание стержня на упругом основании, не должна отрицаться возможность неустойчивого закритического поведения. Например, не имеет смысла выбирать модель, где $\beta > 3$, $r_i > 0$.

4. Потенциальные энергии равновесных конфигураций. Теперь будем классифицировать для любого фиксированного значения нагрузки P различные формы выпучивания при помощи соответствующих значений потенциальной энергии. Напомним, что исследование случая $r_1 = n^2(n+1)^2$ принципиальных трудностей не вызывает и для некоторых моделей подробно проведено в [3, 4], поэтому здесь не приводится. С точностью до членов четвертой степени включительно, содержащих функцию $w(s)$ и ее производные, из (2.1) находим

$$U \approx \frac{1}{2}EI\int_0^L w_{ss}^2(1 + w_s^2)\,ds - P\int_0^L\left(\frac{1}{2}\,w_s^2 + \frac{1}{8}\,w_s^4\right)ds +$$

$$+ \int_0^L\!\!\int_0^w c_1 w\left(1 - \frac{\beta}{2}\,w_s^2\right)dw\,ds + \int_0^L\!\!\int_0^w c_3 w^3\,dw\,ds, \qquad (4.1)$$

что не зависит от c_i, $i \geqslant 5$. Из (4.1) и аналитического представления форм выпучивания (2.4) видно, что для вычисления потенциальной энергии с точностью до величин порядка a_n^4 достаточно в (2.4) учесть член, содержащий a_n в первой степени. Для формы w_n получим

$$U_n \approx \frac{L}{64}\left(\frac{\pi}{L}\right)^6 EIa_n^4[-n^6 + n^2 r_1(3 - 7\beta) - 6r_3], \qquad (4.2)$$

т. е. функция полной потенциальной энергии идеальной системы, потерявшей устойчивость по форме w_n, имеет вид ростка катастрофы сборки ($U_n > 0$), двойственной сборки ($U_n < 0$) или более сложной, чем сборка, катастрофы [8]. Так как катастрофы сборки и двойственной сборки являются устойчивыми, то небольшие возмущения модели стержня на упругом основании, учитывающие неидеальность системы (начальные неправильности, эксцентриситет в приложении нагрузки), не изменят типа катастрофы и, следовательно, несущественно повлияют на выражение (4.2).

5. Возникающие противоречия. Заметим, что потенциальная энергия (2.1) системы, имеющей неискривленную форму $w \equiv 0$, равна нулю. Естественно считать математическую модель системы стержень — основание неадекватной физической реальности [2], если при превышении нагрузкой критического значения общая потенциальная энергия искривленного состояния оказывается больше потенциальной энергии невыпученной системы. Для рассматриваемых моделей из этого требования вытекает следующий запрет: функция потенциальной энергии не должна менять тип катастрофы с двойственной сборки на сборку. Поэтому, чтобы избежать противоречия принципу минимума потенциальной энергии, следует выбирать лишь такие модели, для которых справедливо неравенство

$$-n^6 + n^2 r_1(3 - 7\beta) - 6r_3 \leqslant 0, \qquad (5.1)$$

которому удовлетворяют, например, модель стержня без упругого основания ($r_1 = 0$), модель, рассмотренная в [6] с $r_1 = 1$, $r_3 = -1$ и $\beta = 2$, потому что $-n^6 - 11n^2 + 6 \leqslant 0$ для любого натурального n; выбирая модель с $r_1 = 0$, из (5.1) находим ограничение $r_3 \geqslant -1/6$. Однако некоторые классические модели [1, 5] неравенству (5.1) не удовлетворяют [4]. Если рассматривать закритическое поведение системы лишь вблизи первой критической нагрузки, то дополнительно необходимо выполнение ограничений

$$(n-1)^2 n^2 < r_1 < n^2(n+1)^2, \qquad (5.2)$$

используемых для определения числа полуволн синусоиды, по форме которой начинает выпучиваться стержень. Для модели с $r_3 = -r_1 < 0$ из (5.1) и (5.2) получим на параметр β ограничение $\beta \geqslant 5/4$, которому удовлетворяет модель [6]. Разделим обе части неравенства (5.1) на n^6 и перейдем к пределу по n, тогда с учетом (5.2) имеем

$$2 - 7\beta \leqslant 6 \lim_{n\to\infty}(r_3/n^6)$$

и при $r_3 = \mathrm{const}$ ограничение $\beta \geqslant 2/7$. Если для адекватности [2] выбираемой модели дополнительно учесть хотя бы для одного n необходимость выполнения неравенства

$$n^6 - n^2 r_1(3 - \beta) + 6r_3 \leqslant 0, \qquad (5.3)$$

обеспечивающего возможность неустойчивого закритического поведения (см. п. **3**), то из (5.1) и (5.3) следует $\beta \geqslant 0$. Параметр β характеризует [4] геометрическую нелинейность упругого основания, и в [3] подробно исследована модель ($\beta = 1$, $c_1 > 0$, $c_3 \neq 0$), лишенная некоторых недостатков, присущих моделям [1, 5]. Отметим, что главные члены выражений (2.5) и (4.2) не зависят от r_i $(i > 3)$, поэтому выбор параметров c_i $(i > 3)$ не оказывает существенного влияния на описание начального закритического поведения. Однако при выборе коэффициентов c_1, c_3 и β необходимо проверять выполнение неравенства (5.1) для любых n и неравенства (5.3) хотя бы для одного n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П.** О продольном изгибе стержней в упругой среде // Изв. С.-Петербург. политехн. ин-та. 1907. Т. 7. С. 145–157.
2. **Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.** Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990.
3. **Астапов Н. С.** Закритическое поведение стержня на нелинейно-упругом основании // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1991. Вып. 103.
4. **Астапов Н. С., Корнев В. М.** Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 130–142.
5. **Томпсон Дж. М. Т.** Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985.
6. **Damil N., Potier-Ferry M.** A new method to compute perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elactic structures //Int. J. Eng. Sci. 1990. V. 28, N 9. P. 943–957.
7. **Астапов Н. С., Демешкин А. Г., Корнев В. М.** Выпучивание стержня, лежащего на упругом основании // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С.106–112.
8. **Постон Т., Стюарт И.** Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 10/III 1995 г.