следующее. Для получения критерия потери сверхтекучести в работе [10] использовалось понятие истинного импульса, который для течения в капилляре или вблизи выхода из него никак не совпадает с вихревым импульсом. Поэтому использование в этом случае вихревого импульса представляет собой гипотезу, основанную на соображениях размерности, но не более. Положение усугубляется тем, что для случая $\omega \cdot \mathbf{n} \neq 0$ на Γ вихревой импульс, согласно результатам п. 3, не имеет физического смысла.

Из всего этого следует, что само применение понятия вихревого импульса к задаче потери сверхтекучести требует критического анализа и, возможно, пересмотра.

Автор выражает благодарность Б. А. Луговцову за постановку рассмотренных здесь вопросов.

Поступила 16 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М., «Наука», 1969.
2. **Ламб Г.** Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
3. **Владимиров В. А.** О вихревом импульсе течений несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1977, № 6.
4. **Фейнман Р.** Статистическая механика. М., «Мир», 1975.
5. **Тилли Д. Р., Тилли Дж.** Сверхтекучесть и сверхпроводимость. М., «Мир», 1977.
6. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** Об импульсе кольцевого вихря, движущегося в трубе.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
7. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
8. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости. М., ИЛ, 1963.
9. **Юдович В. И.** О потере гладкости решений уравнений Эйлера со временем.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
10. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. М., «Наука», 1964.

УДК 532.5

ВИНТОВЫЕ ПОТОКИ В ШАРЕ

В. М. Быков

(Челябинск)

Пусть Ω — область в R^3, содержащая начало координат и ограниченная гладкой поверхностью S с единичным вектором внешней нормали $\mathbf{n}$. Однородным винтовым потоком называется векторное поле $\mathbf{v}$, гладкое класса C^1 в Ω и непрерывное в $\overline{\Omega}$, для которого

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}; \tag{1}$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_S = 0 \tag{2}$$

($\lambda = \mathrm{const} \neq 0$). Из уравнения (1) получаем $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, поэтому

$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{v} = -\Delta\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$, и декартовы компоненты поля $\mathbf{v}$ должны быть аналитическими функциями в Ω. В частности, $\mathbf{v}$ разлагается в ряд Тэйлора

$$\mathbf{v} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{v}_p, \tag{3}$$

равномерно сходящийся в некоторой окрестности начала координат. Здесь каждое $\mathbf{v}_p$ — однородное полиномиальное векторное поле степени p и нулевой дивергенции. Связь полей $\mathbf{v}_p$ с гармоническими полиномами описывают следующие леммы:

Лемма 1. Если H_n — однородный гармонический полином степени n, то существует последовательность $\{\mathbf{v}_{s,n}\}$ ($s = 0, 1, 2...$) однородных полиномиальных полей ($\deg \mathbf{v}_{s,n} = n + s - 1$), удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{v}_{0,n} = \mathrm{grad}\, H_n; \tag{4}$$

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{v}_{s,n} = \mathbf{v}_{s-1,\,n} \text{ при } s \geqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство. Зададим $\mathbf{v}_{s,n}$ формулами

$$\mathbf{v}_{2k,n} = C_{kn} r^{2k-2}[(n + 2k + 1)r^2\, \mathrm{grad}\, H_n - 2knH_n\mathbf{r}]; \tag{6}$$

$$\mathbf{v}_{2k+1,n} = C_{kn} r^{2k}\, \mathrm{grad}\, H_n \times \mathbf{r}, \tag{7}$$

где

$$C_{kn} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{n+1}\,\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!\,\Gamma\left(n+k+\frac{3}{2}\right)};\quad \mathbf{r} = \{x, y, z\};\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{8}$$

Свойство (4) очевидно. Свойство (5) проверяется с использованием стандартных формул векторного анализа и формулы

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}_p \times \mathbf{r}) = (p + 2)\mathbf{v}_p - \mathbf{r}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v}_p,$$

справедливой для однородного векторного поля $\mathbf{v}_p$ степени p и получающейся из формулы

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{v}_p \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{v}_p - (\mathbf{v}_p, \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{v}_p\, \mathrm{div}\, \mathbf{r} - \mathbf{r}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v}_p,$$

с учетом того, что $(\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{v}_p = p\mathbf{v}_p$ (теорема Эйлера об однородных функциях), $(\mathbf{v}_p, \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{v}_p$, $\mathrm{div}\, \mathbf{r} = 3$.

Лемма 2. Для любого поля $\mathbf{v}$, удовлетворяющего уравнению (1) и имеющего тэйлоровское разложение (3), существует последовательность $\{H_n\}$ ($n = 1, 2, 3,...$ однородных гармонических полиномов $\deg H_n = n$) такая, что для всех p

$$\mathbf{v}_p = \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^{p-n+1} \mathbf{v}_{p-n+1,n}, \tag{9}$$

где $\mathbf{v}_{p-n+1,n}$ — поля, построенные по H_n в силу леммы 1.

Доказательство. При $p = 0$ имеем $\mathbf{v}_0 = \mathrm{grad}\, H_1 = \mathbf{v}_{0,1}$, где линейная форма H_1 определена однозначно. Пусть H_n определены при $1 \leqslant n \leqslant p + 1$ и имеет место формула (9). Определим H_{p+2} так, чтобы равенство (9) выполнялось с заменой p на $p + 1$. В силу единственности разложения Тэйлора имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_{p+1} = \lambda \mathbf{v}_p = \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^{p-n+2} \mathbf{v}_{p-n+1,\,n}.$$

Тогда по лемме 1

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{v}_{p+1} - \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^{p-n+2} \mathbf{v}_{p-n+2,\,n} \right) = \lambda \mathbf{v}_p - \lambda \mathbf{v}_p = 0,$$

поэтому $\mathbf{v}_{p+1} - \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^{p-n+2} \mathbf{v}_{p-n+2,\,n} = \operatorname{grad} H_{p+2}$, где полином H_{p+2} однозначно определяется требованием однородности. Имеем

$$\Delta H_{p+2} = \operatorname{div} \left(\mathbf{v}_{p+1} - \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^{p-n+2} \mathbf{v}_{p-n+2,\,n} \right) = 0,$$

поэтому полином H_{p+2} гармоничен, и можно положить $\mathbf{v}_{0,\,p+2} = \operatorname{grad} H_{p+2}$, откуда $\mathbf{v}_{p+1} = \sum_{n=1}^{p+2} \lambda^{p-n+2} \mathbf{v}_{p-n+2,n}$. Лемма доказана.

Определим для каждого n векторное поле

(10) $$\mathbf{v}^{(n)} = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \mathbf{v}_{s,n},$$

где $\mathbf{v}_{s,n}$ — поле, построенное в лемме 1 по гармоническому полиному H_n из леммы 2. Формула (8) для C_{kn} показывает, что ряд (10) равномерно сходится при всех $\mathbf{r}$. Этот ряд можно почленно дифференцировать, и потому $\operatorname{rot} \mathbf{v}^{(n)} = \lambda \mathbf{v}^{(n)}$. Можно явно вычислить $\mathbf{v}^{(n)}$. Для этого заметим, что $\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}_+^{(n)} + \mathbf{v}_-^{(n)}$, где слагаемые представляют собой «четную» и «нечетную» части $\mathbf{v}^{(n)}$, соответствующие формулам (6), (7):

$$\mathbf{v}_+^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \mathbf{v}_{2k,n}, \quad \mathbf{v}_-^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k+1} \mathbf{v}_{2k+1,n},$$

причем $\mathbf{v}_+^{(n)} = \lambda^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_-^{(n)}$, так что достаточно найти $\mathbf{v}_-^{(n)}$. Из (7), (8) следует

(11) $$\mathbf{v}_-^{(n)} = \frac{\lambda \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(n + k + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\lambda r}{2}\right)^{2k} \operatorname{grad} H_n \times \mathbf{r} =$$

$$= A_n r^{-n-1/2} J_{n+1/2}(\lambda r) \operatorname{grad} H_n \times \mathbf{r},$$

где $A_n = \lambda(n+1)^{-1}\Gamma(n+3/2)$; $J_{n+1/2}(\lambda r)$ — функция Бесселя.

Пусть $S_r \subset \Omega$ — сфера радиуса r с центром в начале координат. Покажем, что

(12) $$\int_{S_r} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} H_n \, dS = \int_{S_r} \mathbf{v}^{(n)} \cdot \mathbf{r} H_n \, dS.$$

Для этого рассмотрим частичную сумму $\mathbf{S}_m$ ряда (3). В силу леммы 2

$$\mathbf{S}_m = \sum_{p=0}^{m} \mathbf{v}_p = \sum_{p=0}^{m} \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^{p-n+1} \mathbf{v}_{p-n+1,n} = \sum_{n=1}^{m+1} \sum_{p=n-1}^{m} \lambda^{p-n+1} \mathbf{v}_{p-n+1,n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{m+1} \sum_{s=0}^{m-n+1} \lambda^s \mathbf{v}_{s,n} = \sum_{n=1}^{m+1} \mathbf{S}_{m-n+1}^{(n)},$$

где $\mathbf{S}_{m-n+1}^{(n)}$ — частичная сумма ряда (10). Имеем

$$\mathbf{S}_m \cdot \mathbf{r} = \sum_{n=1}^{m+1} \mathbf{S}_{m-n+1}^{(n)} \cdot \mathbf{r} = \sum_{n=1}^{m+1} f_{m-n+1}(r) H_n,$$

где $f_{m-n+1}(r)$ — многочлены, явный вид которых можно извлечь из (6). Из последнего равенства и ортогональности сферических функций разных порядков следует, что при $m \geqslant n-1$

$$\int_{S_r} \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{r} H_n ds = f_{m-n+1}(r) \int_{S_r} H_n^2 ds = \int_{S_r} \mathbf{S}_{m-n+1}^{(n)} \cdot \mathbf{r} H_n dS. \tag{13}$$

Пусть $r < \varepsilon$, где ε — радиус шара, в котором ряд (3) равномерно сходится. Тогда в обеих частях равенства (13) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ под знаком интеграла, и равенство (12) доказано при $r < \varepsilon$. Так как обе части этого равенства — аналитические функции от r, то оно верно при всех r, для которых $S_r \subset \Omega$.

Пусть теперь Ω — шар радиуса R с центром в начале координат. Равенство (12) по непрерывности выполняется и при $r = R$, причем из (2) следует, что обе его части равны нулю. Пусть n — первый номер, для которого $H_n \neq 0$. Имеем

$$\mathbf{v}^{(n)} \cdot \mathbf{r} = \left(\mathbf{v}_+^{(n)} + \mathbf{v}_-^{(n)}\right) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{v}_+^{(n)} \cdot \mathbf{r},$$

так как в силу (11) $\mathbf{v}_-^{(n)} \cdot \mathbf{r} = 0$. Далее, $\mathbf{v}_+^{(n)} \cdot \mathbf{r} = \lambda^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_-^{(n)} \cdot \mathbf{r} = \lambda^{-1} \operatorname{div}\left(\mathbf{v}_-^{(n)} \times \mathbf{r}\right)$, откуда, используя (11), получаем

$$\mathbf{v}_+^{(n)} \cdot \mathbf{r} = n\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) r^{-n-1/2} J_{n+1/2}(\lambda r) H_n.$$

Равенство (12) приобретает вид

$$n\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) R^{-n-1/2} J_{n+1/2}(\lambda R) \int_S H_n^2 ds = 0, \tag{14}$$

откуда $J_{n+1/2}(\lambda R) = 0$, и $\lambda = \mu_k^{(n)} R^{-1}$, где $\mu_k^{(n)}$ — k-й корень функции $J_{n+1/2}(z)$.

Пусть теперь $m > n$. Так как $J_{n+1/2}(z)$ и $J_{m+1/2}(z)$ не имеют общих нулей, то из равенства, аналогичного (14) с заменой n на m, получаем $\int_S H_m^2 ds = 0$, откуда $H_m = 0$ при всех $m \neq n$. В итоге $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(n)}$, и доказана следующая

Теорема. Всякий однородный винтовой поток в шаре радиуса R имеет вид $\mathbf{v} = \mathbf{v}_+^{(n)} + \mathbf{v}_-^{(n)}$, где $\mathbf{v}_-^{(n)}$ задается равенством (11) при $\lambda = \mu_k^{(n)} R^{-1}$, $\mathbf{v}_+^{(n)} = [\mu_k^{(n)}]^{-1} R \operatorname{rot} \mathbf{v}_-^{(n)}$, H_n — произвольный однородный гармонический полином степени n. В частности, каждому значению $\lambda = \mu_k^{(n)} R^{-1}$ соответствует $2n+1$ линейно-независимый винтовой поток.

Замечание 1. В случае, когда H_n обладает осевой симметрией, полученные решения известны (см., например, [1]). Если $n = 1$, то автоматически имеет место симметрия относительно оси, задаваемой вектором grad H_1. Картина линий тока в меридиональном сечении для случая $n = k = 1$ представлена в [2].

Замечание 2. Пусть

$$H_n^m = r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m \leqslant n,$$
$$H_n^m = r^n P_n^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi \quad \text{при} \quad -n \leqslant m < 0.$$

Можно показать, что семейство векторных полей $\{\mathbf{v}_+^{(n)}, \mathbf{v}_-^{(n)}\}$ при всевозможных n, $k \geqslant 1$, $|m| \leqslant n$, $\lambda = \mu_k^{(n)} R^{-1}$, $H_n = H_n^m$ является ортогональным базисом в пространстве $J^0(\Omega)$ [3]. Собственный базис оператора $\tilde{\Delta}$ из [3] в шаре Ω также связан с полями $\mathbf{v}_+^{(n)}$ и $\mathbf{v}_-^{(n)}$. Он образован полями $\mathbf{v}_-^{(n)}$ при всевозможных n, k, m, $\lambda = \mu_k^{(n)} R^{-1}$ и полями

$$\mathbf{v}_*^{(n)} = \mathbf{v}_+^{(n)} - \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) R^{-n-1/2} J_{n+1/2}\left(\mu_k^{(n+1)}\right) \operatorname{grad} H_n^m$$

при всевозможных n, k, m, $\lambda = \mu_k^{(n+1)} R^{-1}$. При этом $\mathbf{v}_-^{(n)}$ отвечает собственному значению $-\nu\left[\mu_k^{(n)} R^{-1}\right]^2$, а $\mathbf{v}_*^{(n)}$ — собственному значению $-\nu[\mu_k^{(n+1)} R^{-1}]^2$. Этот базис дает возможность немедленно решить методом Фурье задачу Коши для системы уравнений движения вязкой жидкости в шаре в линеаризации Стокса.

Поступила 29 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярмицкий А. Г.** Сфера в однородном винтовом потоке.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Вып. 19. Харьков, 1975.
2. **Ярмицкий А. Г.** Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина.— ПМТФ, 1974, № 5.
3. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.

УДК 620.172.253

О ПОВЕДЕНИИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШАРЕ

В. М. Понизовский

(Пермь)

В данной работе приводятся экспериментальные результаты наблюдений неустойчивости жидкой пленки на поверхности вращающегося шара.

В экспериментах применялась установка, блок-схема которой дана на фиг. 1. Установка состоит из устройства для магнитного подвешивания и раскручивания шара *1—6*, поддерживающего генератора *9*, генератора