Теплофизика и аэромеханика, 2009, том 16, № 3

УДК 532.546:534.1

Взаимодействие акустических волн с пористым слоем*

А.А. Губайдуллин, О.Ю. Болдырева, Д.Н. Дудко

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

E-mail: timms@ikz.ru

Исследуется взаимодействие звукового импульса с пористым слоем. При этом возможно наличие преграды, экранируемой слоем, а также зазора между пористым слоем и преградой. Предложена методика расчета в линейном приближении давлений и напряжений в пористом слое, в зазоре и на преграде. Методика позволяет интерпретировать данные по взаимодействию акустических волн с пористым слоем, полученные в эксперименте или с помощью конечно-разностных методов. Исследованы особенности прохождения акустической волны в пористый слой и последующего отражения от преграды. Проведено сравнение расчетных данных с данными эксперимента других авторов по прохождению импульса через погруженную в воду пористую пластину.

Ключевые слова: пористый слой, зазор, преграда, акустическая волна, прохождение, отражение.

ВВЕДЕНИЕ

Пористые материалы широко используются в современном строительстве и промышленности, в частности, для поглощения вредных шумов, а также рассматриваются как демпфирующие среды для ослабления воздействий взрывов на сооружения. Распространение и взаимодействие волн в пористых средах изучаются также в связи с задачами сейсмоакустики, сейсморазведки, воздействия на нефтяные пласты. Знание закономерностей прохождения и отражения импульсов давления от пористых пластин, погруженных в жидкость или газ, также необходимо для определения свойств и контроля качества пористых материалов. Для всех этих приложений очень важно исследовать взаимодействия импульсов давления с пористой средой и характер движения флюида в порах в широком диапазоне материалов с различными свойствами.

Теория распространения волн в дискретно-непрерывных и непрерывно-слоистых средах изложена в монографии [1]. В частности, рассмотрено отражение звуковых волн от упругого слоя и от системы упругих слоев. Связь собственных колебаний пористой упругой пластины с коэффициентами отражения и прохождения на границах изучалась в работе [2]. Также рассматривались особенности взаимодейст-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (НШ-3483.2008.1).

вия звуковых волн с плоским слоем [3] и акустическим экраном [4]. В работах [5, 6] исследовалось распространение ультразвуковых и звуковых волн вдоль границы упругой среды и жидкости.

В работе [7] с помощью метода матричного пропагатора исследовано распространение сейсмических волн из упругого основания в неоднородный осадочный слой, расположенный на морском дне. Получено аналитическое выражение для матричного пропагатора.

Прохождение волн из жидкости в вязкоупругую пористую среду при наклонном падении рассматривалось в работах [8, 9]. В теоретическом исследовании [8] показано, что прошедшие в вязкоупругую пористую среду волны являются неоднородными. В статье [9] описывается эксперимент по прохождению и отражению волн от погруженной в жидкость пористой пластины при наклонном падении. Расхождение между расчетными теоретическими и полученными при обработке экспериментальных данных коэффициентами отражения и прохождения устраняется с помощью введения малой мнимой добавки к объемному модулю упругости пористой среды.

Прохождение линейных волн из флюида в пористое полупространство с неподвижным скелетом рассматривалось в работе [10]. Закономерности отражения волн давления от твердых поверхностей, покрытых пористым слоем, изучались в работах [11-18].

Метод определения акустических характеристик газонасыщенной пористой среды по результатам отражения ультразвуковых волн от границ пористого слоя с жестким скелетом при наклонном падении предложен в работах [19, 20]. Метод позволяет определить коэффициент извилистости пор, характерные вязкую и температурную длины пористой среды.

В исследовании [21] описывается эксперимент по прохождению волн через погруженную в воду пористую пластину при нормальном падении. Сравниваются рассчитанный в рамках модели Био и полученный в результате обработки экспериментальных данных коэффициенты прохождения волны через пористый слой при нормальном падении. Показана возможность определения некоторых параметров пористой среды (зависимостей от частоты скоростей и пространственных декрементов затухания быстрой и медленной волн, коэффициентов отражения от границ) путем решения некоторой задачи оптимизации.

При расчете распространения акустических волн в пористых средах, прохождения волн через пористый слой обычно используется несколько основных методов. Для изучения закономерностей прохождения и отражения гармонических волн на границе флюида с пористой средой при нормальном или наклонном падении получают коэффициенты отражения и прохождения на границах флюида и пористой среды. В отдельных случаях (в предположении о неподвижности скелета, при пренебрежении инерционной составляющей межфазной силы, для начального импульса определенного вида) удается получить аналитическое решение задачи о распространении импульса в пористой среде или о прохождении импульса из флюида в пористую среду. Для описания распространения импульсов давления в пористой среде, прохождения волн давления из флюида в пористое полупространство применяются интегральные или дискретные преобразования Лапласа и Фурье [22, 10]. Для расчета прохождения акустического импульса в пористый слой также используют конечно-разностные методы [23, 18, 24], в частности, модифицированный метод крупных частиц [25]. Определенный интерес представляет коэффициент прохождения через пористый слой гармонической волны. Этот коэффициент может быть рассчитан с помощью коэффициентов прохождения и отражения на границах пористой среды и флюида волн, возникших в результате прохождения в слой начальной волны, с учетом конечного числа отражений на границах [21].

В настоящей работе предложена методика численного исследования в линейном приближении процесса взаимодействия акустического импульса с пористым слоем, продемонстрированы его возможности. При этом используется дискретное преобразование Фурье. Проведено исследование особенностей прохождения волны сжатия в пористый слой и последующего отражения от преграды, экранируемой слоем и зазором. Предложенная методика позволяет интерпретировать как экспериментальные данные [21], так и полученные с помощью конечно-разностных методов результаты расчетов взаимодействия акустических волн с пористым слоем [24].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В общем случае имеется пористый слой (ПС) ($x_1 < x < x_2$), зазор ($x_2 < x < x_w$) и преграда — жесткая стенка ($x = x_w$), рис. 1. Область перед слоем $x < x_1$ и зазор заполнены флюидом — газом или жидкостью, пористая среда насыщена тем же флюидом. Перед слоем во флюиде при $x = x_0$ задается импульс давления $p_{\text{in}}(t)$. На границах пористого слоя $x = x_1$, x_2 поры могут быть открытыми или закрытыми. Цель исследования — изучение особенностей прохождения акустической волны в пористый слой и последующего отражения от преграды.

Линеаризованные уравнения одномерного движения пористой среды в рамках двухскоростной с двумя напряжениями модели имеют вид [26, 27]:

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\rho_{s0}\frac{\partial v_s}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\rho_{f0}\frac{\partial v_f}{\partial x}=0,$$

$$\rho_{s0}\frac{\partial v_s}{\partial t}=-\alpha_{s0}\frac{\partial p_f}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{s*}}{\partial x}+F,$$

$$\rho_{f0}\frac{\partial v_f}{\partial t}=-\alpha_{f0}\frac{\partial p_f}{\partial x}-F,$$

$$\sigma_{s*}=\alpha_{s0}\left[(\lambda_*+2\mu_*)\varepsilon_s+\nu_* p_f'\right],\qquad \nu_*=\frac{\lambda_*+2\mu_*/3}{K_s},$$

$$\frac{\partial\varepsilon_s}{\partial t}=\frac{\partial v_s}{\partial x},$$

$$\rho_f'=\alpha_f'\rho_{f0}^{\circ}+\alpha_{f0}\rho_f^{\circ}{}',\qquad \rho_s'=\alpha_s'\rho_{s0}^{\circ}+\alpha_{s0}\rho_s^{\circ}{}',$$

$$\alpha_f'+\alpha_s'=0,$$

$$p_s'=K_s\,\rho_s^{\circ}{}'/\rho_{s0}^{\circ},\qquad p_f'=K_f\,\rho_f^{\circ}{}'/\rho_{f0}^{\circ},$$

$$p_{s*}'=\alpha_{s0}(p_s'-p_f')+\alpha_s'(p_{s0}-p_{f0}),$$

$$p_{s*}'=-\alpha_{s0}\left[(\lambda_*+2\mu_*/3)\varepsilon_s+\nu_* p_f'\right].$$

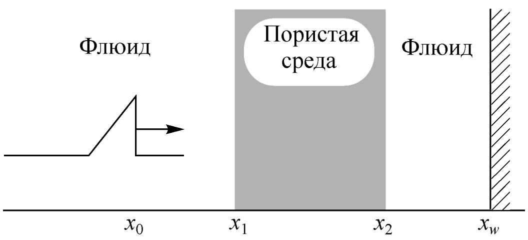

Рис. 1. Схема задачи.

Здесь нижние индексы $j = s, f$ относятся к параметрам твердой или жидкой фаз соответственно, нижний индекс 0 означает невозмущенное значение величины, а штрих — отклонение от невозмущенного значения ($w' = w - w_0$), $\alpha_j, \rho_j, \rho_j^\circ, v_j$ — соответственно объемное содержание, приведенная и истинная плотности и скорость j-фазы, p_f — давление в жидкости, σ_{s*} — приведенное напряжение в скелете среды, F — сила межфазного взаимодействия.

Скелет пористой среды предполагается упругим с модулями упругости $\alpha_s\lambda_*, \alpha_s\mu_*$, ε_s — деформации твердой фазы, p_s — давление внутри твердой фазы, K_s, K_f — соответственно объемные модули упругости для материала твердой фазы и для жидкости. Заметим, что учет другого поведения скелета, например, вязкоупругого [22], не вызывает принципиальных трудностей.

Выражение для межфазной силы F в случае распространения монохроматической волны частоты ω принято в виде [27, 28]:

$$F = F_\mu + F_m + F_B,$$

$$F_m = 0.5\eta_m\alpha_{f0}\alpha_{s0}\rho_{f0}^\circ i\omega(v_f - v_s),$$

$$F_\mu = \eta_\mu \mathrm{a}_*^{-2}\alpha_{f0}\alpha_{s0}\mu_f(v_f - v_s),$$

$$F_B = \eta_B \mathrm{a}_*^{-1}\alpha_{f0}\alpha_{s0}\sqrt{2\rho_{f0}^\circ\mu_f\omega}(1+i)(v_f - v_s).$$

Здесь F_m — сила присоединенных масс, вызванная инерционным взаимодействием фаз, F_μ — сила вязкого трения Стокса, F_B — аналог силы Бассэ, возникающей из-за нестационарности вязкого погранслоя около границы жидкости с твердой фазой, i — мнимая единица, μ_f — динамическая вязкость жидкости, a_* — характерный размер пор или зерен, η_m, η_μ, η_B — коэффициенты инерционного, вязкого и вязко-инерционного взаимодействия фаз, зависящие от структуры среды. Проницаемость пористой среды связана с характерным размером неоднородности соотношением $k_* = \dfrac{\alpha_{f0}\mathrm{a}_*^2}{\alpha_{s0}\eta_\mu}$, коэффициент извилистости поровых каналов модели Био α_∞ пористой среды [29] выражается через коэффициент в силе присоединенных масс η_m: $\alpha_\infty = 1 + \dfrac{1}{2}\alpha_s\eta_m$.

Движение флюида перед пористым слоем и в зазоре рассматривается в акустическом приближении:

$$\frac{\partial\rho_f^\circ}{\partial t} + \rho_{f0}^\circ\frac{\partial v_f}{\partial x} = 0, \quad \rho_{f0}^\circ\frac{\partial v_f}{\partial t} + \frac{\partial p_f}{\partial x} = 0, \quad p_f{}' = K_f\,\rho_f^\circ{}'/\rho_{f0}^\circ.$$

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В рассматриваемой системе присутствует несколько границ (см. рис. 1), на которых происходит скачкообразное изменение свойств среды: $x = x_1, x_2$ — границы между флюидом и пористой средой, $x = x_w$ — граница флюида с жесткой стенкой. На этих границах задаются условия, выражающие непрерывность потока флюида, непрерывность полного напряжения $\sigma = -p_f{}' + \sigma_{s*}$ и линейное соотношение между скачком давления и потоком флюида через граничную поверхность [30, 31]. Таким образом, в данной системе выполняются следующие условия на границах:

$$\left(v_f - v_s\right)\Big|_{x=x_1-0} = \alpha_{f0}\left(v_f - v_s\right)\Big|_{x=x_1+0},$$

$$p_f'\Big|_{x=x_1-0} = \left(p_f' - \sigma_{s*}\right)\Big|_{x=x_1+0},$$

$$p_f'\Big|_{x=x_1-0} - p_f'\Big|_{x=x_1+0} = T \quad \alpha_{f0}\left(v_f - v_s\right)\Big|_{x=x_1+0},$$

$$\alpha_{f0}\left(v_f - v_s\right)\Big|_{x=x_2-0} = \left(v_f - v_s\right)\Big|_{x=x_2+0},$$

$$\left(p_f' - \sigma_{s*}\right)\Big|_{x=x_2-0} = p_f'\Big|_{x=x_2+0},$$

$$p_f'\Big|_{x=x_2-0} - p_f'\Big|_{x=x_2+0} = T \quad \alpha_{f0}\left(v_f - v_s\right)\Big|_{x=x_2-0},$$

$$v_f\Big|_{x=x_w} = 0.$$

Значения параметра $T = 0, \infty$ соответствуют открытым или закрытым порам на границе пористого слоя и флюида. Ниже рассматривается только случай открытых пор на границе пористого слоя ($T = 0$).

Начальный импульс во флюиде перед слоем, соответствующий бегущей вдоль оси x волне, задается как функция времени при $x = x_0$ [32]:

$$p_f'\Big|_{x=x_0} = p_{\text{in}}(t), \quad v_f\Big|_{x=x_0} = p_{\text{in}}(t)\Big/\rho^{\circ}_{f0}C_f,$$

где C_f — скорость звука во флюиде.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Известно, что после прохождения импульса из флюида в пористую среду возмущение в пористой среде приобретает двухволновую структуру. Далее, в результате прохождения возмущений в зазор (см. рис.1), отражения и переотражения от границ пористого слоя (ПС) и жесткой стенки, в системе пористый слой + зазор формируется сложная волновая картина. Все возникающие при этом волны представляют собой следующие группы волн:

1. Звуковые волны перед слоем, распространяющиеся в обратном направлении оси x;
2. Быстрые волны в пористом слое в прямом направлении;
3. Медленные волны в пористом слое в прямом направлении;
4. Быстрые волны в пористом слое в обратном направлении;
5. Медленные волны в пористом слое в обратном направлении;
6. Звуковые волны в зазоре в прямом направлении;
7. Звуковые волны в зазоре в обратном направлении.

Заметим, что при рассмотрении процесса в линейном приближении каждую группу волн можно считать одной волной с суммарной амплитудой (см. рис. 2).

Таким образом, при взаимодействии волны с системой пористый слой + зазор + + жесткая стенка, помимо исходной волны, возникает семь волн. Соответственно, необходимо задать семь граничных условий на поверхностях раздела этой системы $x = x_1, x_2, x_w$, где параметры среды претерпевают разрыв [32].

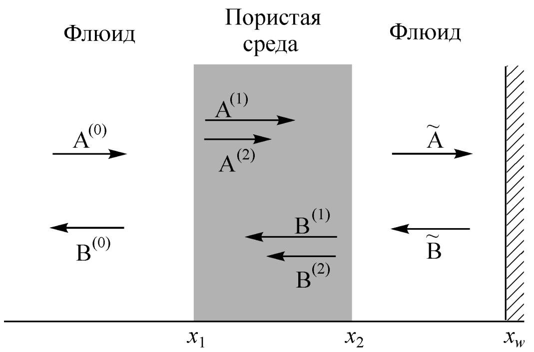

Рис. 2. Схема взаимодействия волны с пористым слоем, зазором и преградой.

Выберем в качестве основных параметров давление флюида p_f и приведенное напряжение в скелете σ_{s*}. В эксперименте могут быть измерены p_f и полное напряжение σ, а σ_{s*} через них находится легко:

$$\sigma_{s*} = \sigma + p_f.$$

Выписанную выше систему уравнений сведем к двум уравнениям относительно p_f и σ_{s*}. Найдем дисперсионное уравнение (Приложение 1).

Для определения амплитуд возникающих волн используем разложение p_f, σ_{s*} в ряд Фурье и введем следующие обозначения для гармонических составляющих распространяющихся в данной системе волн:

$\overset{\circ}{p}_f{}' = P\exp i\left(\omega t - k_f x\right)$ — исходная (падающая) волна во флюиде перед слоем;

$\tilde{p}_f{}' = \tilde{P}\exp i\left(\omega t + k_f x\right)$ — отраженная от слоя волна во флюиде;

$p_f^{(1)}{}' = P^{(1)}\exp i\left(\omega t - k^{(1)}x\right)$, $\sigma_{s*}^{(1)} = S^{(1)}\exp i\left(\omega t - k^{(1)}x\right)$,

$p_f^{(2)}{}' = P^{(2)}\exp i\left(\omega t - k^{(2)}x\right)$, $\sigma_{s*}^{(2)} = S^{(2)}\exp i\left(\omega t - k^{(2)}x\right)$ — быстрая (верхний индекс (1)) и медленная (верхний индекс (2)) волны в слое, распространяющиеся в прямом направлении;

$\tilde{p}_f^{(1)}{}' = \tilde{P}^{(1)}\exp i\left(\omega t + k^{(1)}x\right)$, $\tilde{\sigma}_{s*}^{(1)} = S^{(1)}\exp i\left(\omega t + k^{(1)}x\right)$,

$\tilde{p}_f^{(2)}{}' = \tilde{P}^{(2)}\exp i\left(\omega t + k^{(2)}x\right)$, $\tilde{\sigma}_{s*}^{(2)} = \tilde{S}^{(2)}\exp i\left(\omega t + k^{(2)}x\right)$ — быстрая (1) и медленная (2) волны в слое, распространяющиеся в обратном направлении;

$\hat{p}_f{}' = \hat{P}\exp i\left(\omega t - k_f x\right)$, $\tilde{\hat{p}}_f{}' = \tilde{\hat{P}}\exp i\left(\omega t + k_f x\right)$ — звуковые волны в прямом и обратном направлениях во флюиде в зазоре.

Здесь k_f — волновое число для звуковых волн во флюиде, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$ — волновые числа быстрой и медленной волн в пористой среде, являющиеся корнями дисперсионного уравнения (Приложение 1).

Заметим, что для каждой из волн в пористой среде амплитуды $P^{(j)}$, $S^{(j)}$ не являются независимыми, а связаны линейным соотношением $P^{(j)} = g^{(j)}S^{(j)}$, причем коэффициент пропорциональности $g^{(j)}$ определяется упругими свойствами пористой среды и волновым числом $k^{(j)}$ данной собственной моды (выражения для $g^{(j)}$ приведены в Приложении 1). Амплитуды скоростей флюида и скелета при распространении каждой из волн также линейно связаны с амплитудами давления и приведенного напряжения $P^{(j)}$, $S^{(j)}$ (Приложение 1). Поэтому в качестве независимых амплитуд здесь можно выбрать, например, $\overset{\circ}{P}$, $\tilde{P}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $\tilde{S}^{(1)}$, $\tilde{S}^{(2)}$, $\hat{P}$, $\tilde{\hat{P}}$.

Тогда, с учетом граничных условий задачи, определение полей давлений и напряжений сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей M относительно амплитуд гармонических составляющих возникающих волн:

$$M\begin{pmatrix}\tilde{P}\\ S^{(1)}\\ S^{(2)}\\ \tilde{S}^{(1)}\\ \tilde{S}^{(2)}\\ \hat{P}\\ \tilde{\hat{P}}\end{pmatrix}=\overset{\circ}{P}\exp\left(-i\ \ k_f x_0\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

При этом коэффициенты системы линейных уравнений зависят от параметров флюида и скелета, протяженностей слоя и зазора, волновых чисел. Выражения для элементов матрицы M в случае открытых пор на границах пористого слоя даны в Приложении 2.

При отсутствии зазора между пористым слоем и преградой в процессе взаимодействия волны сжатия с ПС и жесткой стенкой возникает 5 волн — быстрая и медленная волны в слое в прямом и обратном направлениях и отраженная волна во флюиде перед слоем в обратном направлении. В этом случае соответственно задается 5 граничных условий: 3 уравнения при $x = x_1$ (те же самые) и 2 уравнения при $x = x_w$ (равенство нулю скоростей флюида и твердой фазы), необходимые и достаточные для определения амплитуд всех возникающих волн.

Предложенный метод позволяет также рассмотреть процесс прохождения волны сжатия из флюида в протяженную пористую среду (т. е. если отсутствуют зазор и жесткая стенка), и в систему пористый слой + зазор бесконечной протяженности (отсутствует жесткая стенка). В этих случаях возникает соответственно 3 и 5 групп прошедших и отраженных волн и задается такое же число граничных условий.

Эволюция импульса давления при его прохождении в слой и последующем отражении от жесткой стенки рассчитывалась с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье. При этом исходный импульс давления во флюиде перед слоем задается как функция дискретного времени $t_l = T\,l/N$ на рассматриваемом временном промежутке $0 \le t < T$:

$$p_l = p_{\text{in}}\left(t_l\right), \quad l = 0,\ 1 \ldots N-1.$$

Исходный импульс представляется в виде суммы гармонических составляющих частоты $\omega_q = 2\pi q/T$:

$$p_l = \frac{1}{N}\sum_{0\le q<N}\overset{\circ}{P_q}\exp i\left(\omega_q t_l - k_f\left(\omega_q\right)x_0\right), \quad l = 0,\ 1 \ldots N-1,$$

здесь N соответствует числу гармоник, $k_f\ (\omega_q)$ — волновое число акустической волны частоты ω_q во флюиде.

Комплексные амплитуды $\overset{\circ}{P}_q$ определяются по заданным значениям импульса давления p_l с помощью прямого преобразования Фурье. Далее амплитуды гармонических составляющих частоты ω_q всех волн, возникающих в процессе взаимодействия исходной волны с системой пористый слой + зазор + жесткая стенка, определяются из приведенной выше системы линейных уравнений. Затем, при известных значениях амплитуд $\overset{\mathrm{o}}{P}_q, \tilde{P}_q, S_q^{(1)}, S_q^{(2)}, \tilde{S}_q^{(1)}, \tilde{S}_q^{(2)}, \hat{P}_q, \tilde{\tilde{P}}_q$, изменения давлений и напряжений как функции времени для каждой из волн в произвольной точке пространства $x = x_*$ рассчитываются с помощью обратного преобразования Фурье. Сумма давлений (напряжений) всех распространяющихся в рассматриваемой системе волн дает зависимость от времени давления флюида (приведенного напряжения скелета) в заданной точке среды $x = x_*$. Формулы прямого и обратного дискретного преобразования Фурье приведены в Приложении 3.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Возможности разработанного метода проиллюстрированы и использованы при решении различных задач, таких как: прохождение волны из флюида в насыщенную пористую среду с последующим распространением в ней, прохождение через пористый слой или систему слоев во флюиде, воздействие волны на преграду, экранированную пористым слоем, при этом слой может примыкать к преграде или между слоем и преградой может оставаться зазор. В качестве флюида может использоваться газ или жидкость. В силу ограниченности объема статьи рассмотрим подробнее последнюю задачу, тем более что она включает в себя две предыдущие.

Пусть в воздухе или воде расположена преграда (жесткая стенка), перед ней находится пористый слой из зерен кварца. Между стенкой и слоем имеется зазор. По флюиду в направлении преграды распространяется треугольный импульс давления. Требуется описать возникающее волновое течение.

В случае газонасыщенной пористой среды установлено, что присутствие зазора между пористым слоем и стенкой позволяет многократно уменьшить воздействие на экранируемую преграду: в этом случае возмущение давления на стенке имеет существенно меньшую амплитуду, но значительно бóльшую продолжительность по сравнению с исходными, в то время как экранирование преграды пористым слоем без зазора может даже усилить воздействие на нее исходного импульса.

Расчет по данной методике, в отличие от конечно-разностного, позволяет детально описать и интерпретировать возникающую волновую картину. На рис. 3, 4 показана эволюция воздушной волны сжатия при ее прохождении через

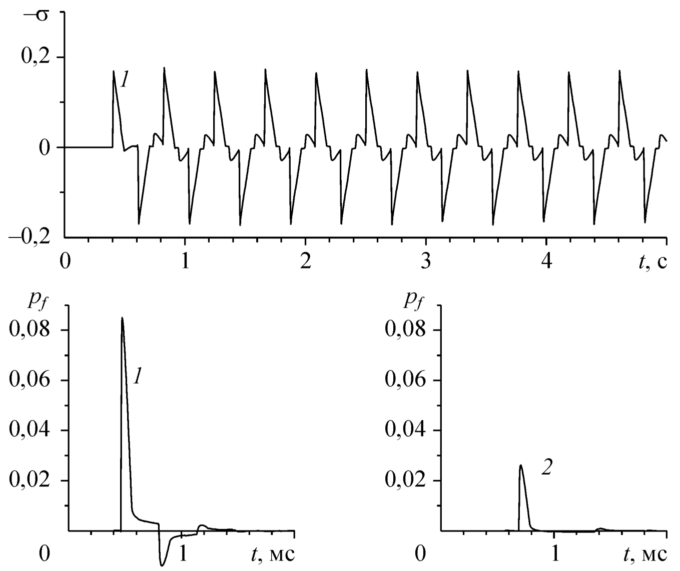

Рис. 3. Зависимости от времени полного напряжения σ и давления газа p_f внутри пористого слоя (*1*, x = 0,05 м) и на стенке (*2*, x = 0,14 м).

пористый слой и при взаимодействии с системой пористый слой + зазор + жесткая стенка. Протяженности пористого слоя и зазора составляют 0,1 м и 0,04 м соответственно (x_0 = –0,1 м, x_1 = 0, x_2 = 0,1 м, x_w = 0,14 м, см. рис. 1). Длительность исходного импульса треугольной формы равна 0,1 мс, безразмерная амплитуда — 0,1. В расчетах использовались следующие параметры пористой среды: α_f = 0,4, a_* = 0,5 мм, ρ_f = 1,21 кг/м^3, K_f = 140,7 кПа, $\mu_f = 1{,}81\cdot10^{-5}$ Па·с, ρ_s = 2650 кг/м^3, K_s = 36,6 ГПа, $\lambda_* = \mu_*$ = 0,2 ГПа, η_m = 1, η_μ = 150, η_B = 1,5. На рис. 3 приведены зависимости от времени полного напряжения σ в середине слоя, давления газа p_f в середине слоя (линия *1*) и за слоем (линия *2*). Профиль полного напряжения соответствует слабо затухающей быстрой (деформационной) волне, которая отражается поочередно от правой и левой границ слоя с газом в виде волн разрежения и сжатия соответственно. Амплитуда медленной волны мала. Профиль давления газа в середине слоя соответствует медленной (фильтрационной) волне, которая также отражается от границ слоя как медленная волна. Она быстро затухает и после двух отражений практически не наблюдается. Быстрая волна на профиле давления газа имеет пренебрежимо малую амплитуду. Возмущение в газе за пористым слоем (линия *2*) формируется за счет прохождения медленной волны, а ее амплитуда в четыре раза меньше амплитуды исходного возмущения в газе. Заметим, что за счет подбора параметров слоя (например, размера зерен) амплитуду прошедшего в газ возмущения можно многократно уменьшить.

На рис. 4 приведены зависимости от времени полного напряжения σ и давления газа p_f внутри пористого слоя (линия *1*, x = 0,05 м) и на стенке (линия *2*, $x = x_w$ = 0,14 м). Присутствие стенки слабо влияет на профиль полного напряжения. Профиль давления газа на стенке (линия *2*) представляет собой последовательность импульсов сжатия, возникающих в результате отражения от стенки волны сжатия, прошедшей из пористого слоя, и последующих отражений ее в зазоре между пористым слоем и стенкой. При этом происходит наложение волн, возникающих в результате отражения от левой границы слоя волн, прошедших в слой через правую границу. В этом можно убедиться, сравнивая профиль *1* на рис. 3 и 4.

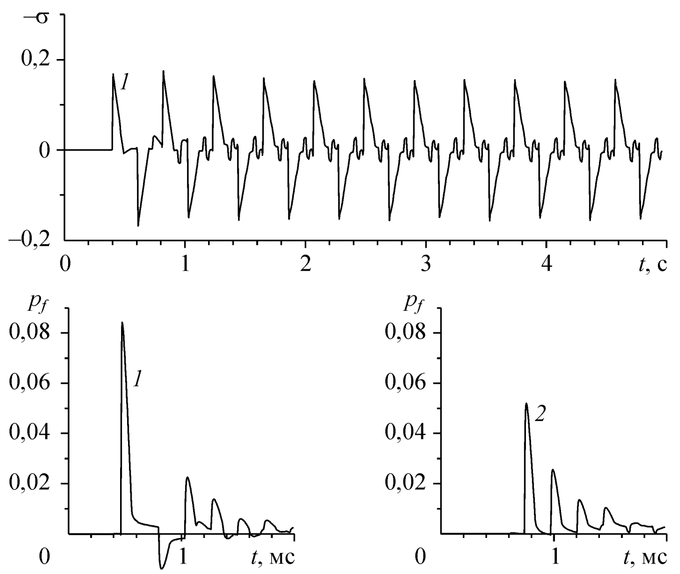

Рис. 4. Зависимости от времени полного напряжения σ и давления газа p_f внутри пористого слоя (*1*, x = 0,05 м) и на стенке (*2*, x = 0,14 м).

В пористом слое амплитуда полного напряжения σ в основном определяется амплитудой быстрой (деформационной) волны в скелете (линия *1* на рис. 4) и при отсутствии зазора основное воздействие на преграду производится этой волной. Но при прохождении из слоя в газ быстрая волна практически не вызывает в нем возмущений, в отличие от медленной (фильтрационной) волны давления p_f.

В случае, когда флюидом является не газ, а жидкость, волновая картина резко меняется (рис. 5). В данном случае протяженности пористого слоя и зазора составляют 0,5 м и 0,15 м соответственно (x_0 = –0,15 м, x_1 = 0, x_2 = 0,5 м, x_w = 0,65 м, см. рис. 1). Длительность исходного импульса треугольной формы равна 0,03 мс, безразмерная амплитуда — 1. Параметры пористой среды следующие: α_f = 0,4, a_* = 0,5 мм, ρ_f = 1000 кг/м^3, K_f = 2,25 ГПа, $\mu_f = 1\cdot10^{-3}$ Па·с, ρ_s = 2650 кг/м^3, K_s = = 36,6 ГПа, λ_* = 6 ГПа, μ_* = 5 ГПа, η_m = 1, η_μ = 100, η_B = 1,5. На профилях полного напряжения и давления газа четко наблюдаются как быстрые, так и медленные моды сжатия. В медленной волне жидкость сжимается, а скелет расширяется. Общая волновая картина настолько сложная, что разобраться в ней можно, лишь построив точную *x-t* диаграмму. Проблема состоит в том, что при падении каждой моды на границу раздела порождаются три моды. Так, например, быстрая мода сжатия при падении на границу с жидкостью порождает отраженные быструю моду разрежения и медленную моду сжатия, а также волну сжатия в жидкости.

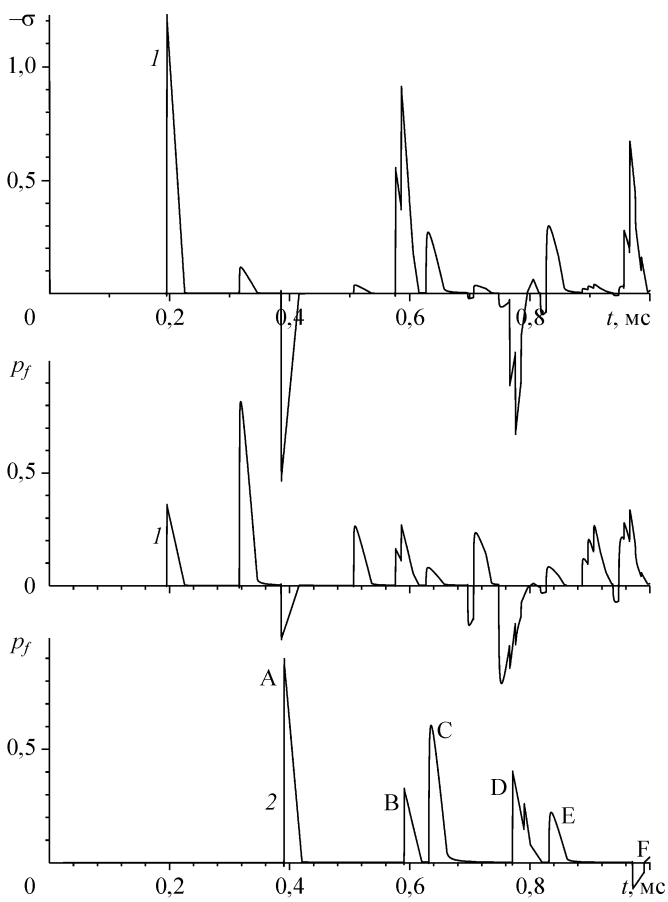

Рис. 5. Зависимости от времени полного напряжения σ и давления жидкости p_f внутри пористого слоя (*1*, x = 0,25 м) и на стенке (*2*, x = 0,65 м).

Медленная мода сжатия порождает медленную моду разрежения, быструю моду сжатия и также волну сжатия в жидкости. Волна сжатия в жидкости при падении на границу с пористой средой порождает быструю и медленную моды сжатия в последней и отраженную волну сжатия в жидкости. Поскольку скорости быстрой и медленной мод в пористой среде и скорость звука в жидкости различаются, то происходит наложение волн. Так, например, на профиле давления на преграде (см. рис. 4, линия *2*) пик *A* соответствует пришедшей из пористого слоя быстрой волне, пик B появляется в результате отражения волны A от пористого слоя, а волна разрежения *F* ($t \approx 1$ мс) — вследствие отражения волны A от дальней (левой) границы x_1 пористого слоя. Пик *C* соответствует приходу медленной моды сжатия, а пик *E* — ее отражению от пористого слоя. Пик *D* — быстрая волна сжатия, которая пришла после переотражения сигнала от правой x_2 (волна разрежения), а потом от левой x_1 (волна сжатия) границ пористого слоя. Отметим, что только волна *A* не встречает на своем пути других волн. Например, медленная мода *C* при движении в пористом слое сталкивается с быстрой волной разрежения и медленной волной сжатия, порожденными быстрой модой *A* при падении на правую границу слоя x_2. Если говорить о воздействии импульса сжатия на преграду, то присутствие пористого слоя и зазора приводит к трансформации одиночного импульса в последовательность импульсов меньшей амплитуды.

Если сравнить случаи, когда флюидом является газ или жидкость, обращает на себя внимание то, что в последнем случае возмущение имеет выраженную двухволновую структуру, при этом профиль медленной моды размывается и затухает значительно слабее. Наличие зазора между слоем и преградой не оказывает столь кардинального влияния на картину волнового взаимодействия, как в первом случае.

В качестве теста было проведено сопоставление расчетных данных, полученных представленным методом, с экспериментальными данными [21]. В этом эксперименте измерялся акустический сигнал, прошедший через погруженную в воду пластину толщиной 1 см из пористого материала QF-20, представляющего собой фильтр из кварцевого волокна (quartz fiber filter) [2]. В экспериментах несущая частота излучаемого импульсного сигнала составляла 200, 500 кГц и 1 МГц. Сопоставление экспериментальных [21] и расчетных данных для частоты 1 МГц приведено на рис. 6 (шаг деления по временной шкале составляет 1 мкс). На рисунке сплошные линии соответствуют экспериментальным, штриховые — расчетным данным. Исходный сигнал сдвинут по вертикали и показан справа в другом масштабе (ось справа): экспериментальная кривая соответствует сигналу, измеренному при отсутствии пластины между излучателем и приемником. Исходный расчетный сигнал задавался импульсом давления вида $p_{in}(t) = A_0 (\beta t)^q e^{-\beta t} \sin(\varphi + \omega t)$. Длительность исходного сигнала равна 5 мкс. В расчетах использовались следующие параметры волны и пористой среды: A_0 = 0,95, q = 2,5, β = 2700 1/мс, φ =3, f = 1 МГц ($\omega = 2\pi f$), α_f = 0,402, ρ_f = 1000 кг/м^3, K_f = 2,22 ГПа, $\mu_f = 1{,}14 \cdot 10^{-3}$ Па·с, ρ_s = 2760 кг/м^3, K_s = 36,6 ГПа, λ_* = 7,33 ГПа, μ_* = 12,76 ГПа, η_m = 2,98, η_μ = 400, η_B = 7.

При прохождении сигнала через пористую пластину происходит его разделение на быструю и медленную моды, которые далее частично отражаются от границы пластины с жидкостью и проходят в жидкость. Рассчитанные в рамках линейной теории скорости быстрой и медленной волн в пластине для частоты 1 МГц составляют 3400 и 1010 м/с. Следовательно, времена прохода быстрой и медленной волн через пластину равны 3 и 10 мкс.

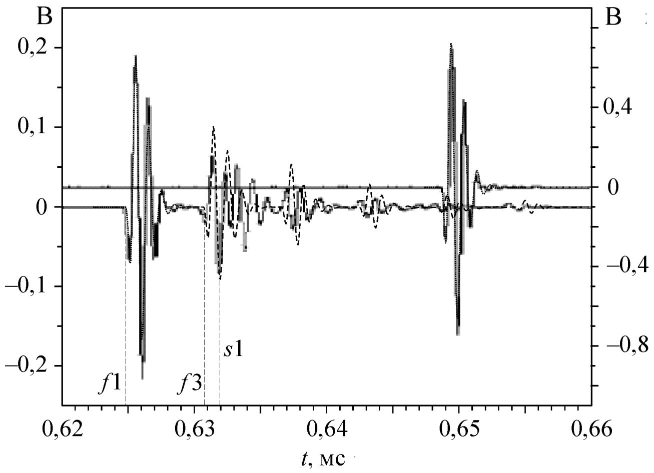

Рис. 6. Сопоставление экспериментальных [21] и расчетных данных для частоты 1 МГц. Сплошные линии соответствуют экспериментальным, штриховые — расчетным данным.

На рис. 6 момент первого вступления, соответствующий приходу из пластины быстрой волны, отмечен как f1. Видно, что зарегистрированный сигнал повторяет форму исходного импульса. Кроме того, наблюдается хорошее качественное и количественное согласие между измеренным и расчетным сигналом, соответствующим приходу из пластины к приемнику быстрой волны. При прохождении быстрой волны через пластину возникает отраженная от правой границы с жидкостью быстрая волна. Последняя порождает быструю волну, отраженную от левой границы. Эта волна проходит через слой с отставанием на 6 мкс (удвоенное время прохода через пластину) от первой быстрой волны и отмечена на рис. 6 как *f*3. Затем (через 1 мкс) приходит медленная волна (*s*1), которая накладывается на предыдущую волну. Для следующего за быстрой модой цуга волн, являющегося, как уже было отмечено выше, суммой переотраженных от границ быстрой и медленной волн, также наблюдается совпадение измеренного и расчетного сигналов. Следует добавить, что при сопоставлении расчетных данных с экспериментальными данными из работы [20] значение коэффициента η_m было вычислено по значению коэффициента извилистости теории Био, и которое для использованного в эксперименте материала QF-20 приведено в статье [2]. Значения коэффициентов η_μ, η_B подбирали из сопоставления с экспериментальной осциллограммой для одной несущей частоты 1 МГц (см. рис. 6). Расчеты с этими значениями коэффициентов η_μ, η_B были сделаны и для других частот 200, 500 кГц, при этом также получено хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных. Таким образом, предложенный метод позволяет детально описать и расшифровать сложную волновую картину, возникающую при взаимодействии акустического сигнала с пористой пластиной, погруженной в воду.

В заключение отметим, что построить и проанализировать точную и детальную картину изученного волнового взаимодействия практически невозможно, если использовать конечно-разностные методы решения задачи. Предложенный подход является в этом смысле эффективным и может быть использован для интерпретации и анализа данных как экспериментов, так и расчетов конечно-разностными и другими методами. В частности, для определения вклада нелинейных эффектов при моделировании нелинейных волновых процессов, верификации компьютерных кодов, а также для решения задач, связанных с акустическим воздействием на пористые системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 334 с.
2. **Belloncle G., Franklin H., Luppé F., Conoir J.M.** Normal modes of a poroelastic plate and their relation to the reflection and transmission coefficients // Ultrasonics. 2003. Vol. 41. P. 207–216.
3. **Ефимов В.В., Семенцов Д.И.** Фазовые соотношения при отражении и пропускании звуковой волны плоским слоем // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 6. С. 789–792.
4. **Бойко А.И., Глазанов В.Е., Михайлов А.В., Тютекин В.В.** Экспериментальные исследования элементов акустических экранов из резины с цилиндрическими каналами // Акустический журнал. 2003. Т. 49, № 1. С. 123–126.
5. **Викторов И.А., Грищенко Е.К., Каекина Т.М.** Исследование распространения ультразвуковых поверхностных волн на границе твердого тела с жидкостью // Акустический журнал. 1963. Т. 9, № 2. С. 162–170.
6. **Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю.** Распространение волн вдоль границы насыщенной пористой среды и жидкости // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 2. С. 201–211.
7. **Yamamoto T.** Propagator matrix for continuously layered seabeds // Bulletin of the Seismological Society of America. 1983. Vol. 73. P. 1599–1620.
8. **Stoll R. D., Kan T.-K.** Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface // J. Acoust. Soc. Am. July. 1981. Vol. 70, No. 1. P. 149–156.
9. **Belhocine F., Derible, S., Franklin H.** Transition term method for the analysis of the reflected and the transmitted acoustic signals from water-saturated porous plates // J. Acoust. Soc. Am. September, 2007. Vol. 122, No. 3. P. 1518–1526.
10. **Султанов А.Ш., Урманчеев С.Ф., Шагапов В.Ш.** К решению задачи об отражении линейных волн в флюиде от насыщенного этим же флюидом пористого полупространства // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 16–26.
11. **Кутушев А.Г., Рудаков Д.А.** Математическое моделирование динамического нагружения слоя пористой порошкообразной среды сжатым газом. // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 11. С. 65–75.
12. **Кутушев А.Г., Рудаков Д.А.** Численное исследование воздействия ударной волны на преграду, экранируемую слоем пористой порошкообразной среды // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 5. С. 25–31.
13. **Кутушев А. Г., Родионов С. П.** Численное исследование влияния параметров слоя насыпной среды и падающей ударной волны на давление на экранируемой плоской стенке // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 2. С. 105–113.
14. **Кутушев А.Г., Родионов С.П.** Взаимодействие слабых ударных волн со слоем порошкообразной среды // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 3. С. 131–140.
15. **Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчеев С.Ф.** Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 87–96.
16. **Gubaidullin A.A., Britan A., Dudko D.N.** Air Shock Wave Interaction with an Obstacle Covered by Porous Material // Shock Waves. 2003. Vol. 13, No. 1. P. 41–48.
17. **Gubaidullin A.A., Dudko D.N.** Modelling of the Impact of Air Shock Wave on Obstacle covered by Porous Screen // Computational Mechanics. 2003. Vol. 31, No. 6. P. 453–460.
18. **Лукин С.В, Губайдуллин А.А., Урманчеев С.Ф.** Закономерности отражения волн давления от твердых поверхностей, покрытых пористым слоем // Нефтегазовое дело. 2006. № 4. С. 35–40.
19. **Fellah Z.E.A., Berger S., Lauriks W. et al.** Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence // J. Acoust. Soc. Am., May, 2003. Vol. 113, No. 5. P. 2424–2433.
20. **Fellah Z.E.A., Depollier C., Berger S., Lauriks W., Trompette P., Chapelon J.-Y.** Determination of transport parameters in air-saturated porous materials via reflected ultrasonic waves // J. Acoust. Soc. Am., November, 2003. Vol. 114, No. 5. P. 2561–2569.
21. **Derible S.** Debye-series analysis of the transmission coefficient of a water-saturated porous plate obeying Biot's theory // J. Acoust. Soc. Am., December, 2005. Vol. 118, No. 6. P. 3430–3435.
22. **Губайдуллин А.А., Кучугурина О.Ю.** Сферические и цилиндрические линейные волны в насыщенных жидкостью пористых средах // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33, № 1. С. 108–115.
23. **Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчеев С.Ф.** Воздействие воздушных ударных волн на преграды, покрытые пористым слоем // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 3. С. 7–20.
24. **Болдырева О.Ю., Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Кутушев А.Г.** Численное исследование передачи ударно-волновой нагрузки экранируемой плоской стенке через слой порошкообразной среды и разделяющий их воздушный зазор // Физика горения и взрыва. 2007. Т. 43, № 1. С. 132–142.
25. **Жилин А.А., Федоров А.В., Коробейников Ю.Г., Фомин В.М.** Математическое моделирование механизма акустической сушки пористых материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44, № 5. С. 102–117.
26. **Нигматулин Р.И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
27. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464 с.

28. **Nigmatulin R.I., Gubaidullin A.A.** Linear waves in saturated porous media // Transport in Porous Media. 1992. Vol. 9, No. 1&2. P. 135–142.
29. **Johnson D.L., Koplik J., Dashen R.** Theory of dynamic permeability and tortousity in fluid-saturated porous media // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 176. P. 379–402.
30. **Deresiewicz H., Skalak R.** On uniqueness in dynamic poroelasticity // Bull. Seism. Soc. America. 1963. Vol. 53, No. 4. P. 783–788.
31. **Feng S., Johnson D.L.** High-frequency acoustic properties of a fluid/porous solid interface. I. New surface mode // J. Acoust. Soc. Am. 1983. Vol. 74, No. 3. P. 906–914.
32. **Исакович М.А.** Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дисперсионное уравнение для продольных волн в пористой среде имеет вид:

$$(\xi)^4\frac{E_*}{K_f}-(\xi)^2\left[\frac{E_*}{K_f}+b_s(1-\nu_*)+\frac{b_f}{\varepsilon_0}+\Phi\left(\frac{\alpha_{s0}E_*}{K_f}+\left(b_s+b_f\right)(1-\nu_*\alpha_{s0})\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon_0}+\Phi\left(\alpha_{f0}+\frac{\alpha_{s0}}{\varepsilon_0}\right)=0,$$

$$\text{где}\quad \xi=\frac{k}{\omega}C_f,\quad E_*=\lambda_*+2\mu_*,\quad \varepsilon_0=\rho^\circ_{f0}\big/\rho^\circ_{s0},$$

$$b_s=\frac{\alpha_s(1-\nu_*)}{\alpha_f+\alpha_s(1-\nu_*)K_f/K_s},\quad b_f=\frac{\alpha_f}{\alpha_f+\alpha_s(1-\nu_*)K_f/K_s},$$

$$\Phi=\frac{1}{2}\eta_m+\frac{1}{i\bar\omega}+\eta_B\sqrt{\frac{2}{\eta_\mu}}\frac{1-i}{\sqrt{\bar\omega}},\quad \bar\omega=\omega\cdot t_\mu,\quad t_\mu=\frac{\rho^\circ_{f0}\mathrm{a}_*^2}{\eta_\mu\mu_f}.$$

Его решения $k^{(1)}$, $k^{(2)}$ являются волновыми числами быстрой и медленной волн.

Для волн в пористой среде $w'=A_w\exp\ i\left(\omega t\mp k^{(j)}x\right)$, j = 1,2, распространяющихся в прямом и обратном направлениях, имеют место следующие соотношения между безразмерными (отнесенными к p_0 и C_f) амплитудами порового давления P, приведенного напряжения в скелете пористой среды S и скоростей фаз V_s, V_f:

$$P^{(j)}=g^{(j)}S^{(j)},\quad g^{(j)}=\frac{b_s/\alpha_{s0}+\Phi\left(b_s+b_f\right)}{\left(\xi^{(j)}\right)^2\frac{E_*}{K_f}b_f-\frac{E_*}{K_f}+\alpha_{s0}\Phi\left(\nu_*b_f-\frac{E_*}{K_f}\right)},$$

$$V_s^{(j)}=\pm\frac{1}{\xi^{(j)}}\frac{p_0}{E_*}\left[\nu_*P^{(j)}-\frac{1}{\alpha_{s0}}S^{(j)}\right],$$

$$V_f^{(j)}=\frac{\left(\xi^{(j)}\right)^2b_s+\alpha_{s0}\Phi}{-\left(\xi^{(j)}\right)^2b_f+1+\alpha_{s0}\Phi}\ V_s^{(j)}.$$

Для звуковых волн во флюиде

$$C_f=\sqrt{K_f\big/\rho^\circ_{f0}},\quad k_f=\omega/C_f,\quad V_f=\pm\frac{p_0}{K_f}P_f.$$

Амплитуды $\tilde{P}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $\tilde{S}^{(1)}$, $\tilde{S}^{(2)}$, $\hat{P}$, $\tilde{\hat{P}}$ определяются при заданной амплитуде исходной волны $\overset{\circ}{P}$ в результате решения системы линейных уравнений с квадратной матрицей *M* 7-го порядка:

$$M\begin{pmatrix}\tilde{P}\\ S^{(1)}\\ S^{(2)}\\ \tilde{S}^{(1)}\\ \tilde{S}^{(2)}\\ \hat{P}\\ \tilde{\hat{P}}\end{pmatrix} = \overset{\circ}{P}\exp\left(-i\ \ k_f x_1\right)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$M_{11} = -\exp\left(i\,k_f x_1\right),\quad M_{21} = \exp\left(i\,k_f x_1\right),\quad M_{31} = M_{41} = M_{51} = M_{61} = M_{71} = 0;$$

$$M_{12} = g^{(1)}\exp\left(-i\,k^{(1)}x_1\right),\quad M_{22} = a^{(1)}/\xi^{(1)}\exp\left(-i\,k^{(1)}x_1\right),$$

$$M_{32} = \exp\left(-i\,k^{(1)}x_1\right),\quad M_{42} = g^{(1)}\exp\left(-i\,k^{(1)}x_2\right),$$

$$M_{52} = a^{(1)}/\xi^{(1)}\exp\left(-i\,k^{(1)}x_2\right),\quad M_{62} = \exp\left(-i\,k^{(1)}x_2\right),\quad M_{72} = 0;$$

$$M_{13} = g^{(2)}\exp\left(-i\,k^{(2)}x_1\right),\quad M_{23} = a^{(2)}/\xi^{(2)}\exp\left(-i\,k^{(2)}x_1\right),$$

$$M_{33} = \exp\left(-i\,k^{(2)}x_1\right),\quad M_{43} = g^{(2)}\exp\left(-i\,k^{(2)}x_2\right),$$

$$M_{53} = a^{(2)}/\xi^{(2)}\exp\left(-i\,k^{(2)}x_2\right),\quad M_{63} = \exp\left(-i\,k^{(2)}x_2\right),\quad M_{73} = 0;$$

$$M_{14} = g^{(1)}\exp\left(i\,k^{(1)}x_1\right),\quad M_{24} = -a^{(1)}/\xi^{(1)}\exp\left(i\,k^{(1)}x_1\right),$$

$$M_{34} = \exp\left(i\,k^{(1)}x_1\right),\quad M_{44} = g^{(1)}\exp\left(i\,k^{(1)}x_2\right),$$

$$M_{54} = -a^{(1)}/\xi^{(1)}\exp\left(i\,k^{(1)}x_2\right),\quad M_{64} = \exp\left(i\,k^{(1)}x_2\right),\quad M_{74} = 0;$$

$$M_{15} = g^{(2)}\exp\left(i\,k^{(2)}x_1\right),\quad M_{25} = -a^{(2)}/\xi^{(2)}\exp\left(i\,k^{(2)}x_1\right),$$

$$M_{35} = \exp\left(i\,k^{(2)}x_1\right),\quad M_{45} = g^{(2)}\exp\left(i\,k^{(2)}x_2\right),$$

$$M_{55} = -a^{(2)}/\xi^{(2)}\exp\left(i\,k^{(2)}x_2\right),\quad M_{65} = \exp\left(i\,k^{(2)}x_2\right),\quad M_{75} = 0;$$

$$M_{16} = M_{26} = M_{36} = M_{66} = 0,$$

$$M_{46} = M_{56} = -\exp\left(-i\,k_f x_2\right),\quad M_{76} = \exp\left(-i\,k_f x_w\right);$$

$$M_{17} = M_{27} = M_{37} = M_{67} = 0,$$

$$M_{47} = -\exp\left(i\,k_f\,x_2\right), \quad M_{57} = \exp\left(i\,k_f\,x_2\right), \quad M_{77} = -\exp\left(i\,k_f\,x_w\right);$$

$$a^{(j)} = \frac{p_0}{E_*}\left[\left(\frac{\alpha_{f0}}{\alpha_{s0}}\frac{b_s}{b_f} - 1\right) + g^{(j)}\left(\frac{E_*}{K_f}\frac{\alpha_{f0}}{b_f} + \nu_*\left(\alpha_{s0} - \alpha_{f0}\frac{b_s}{b_f}\right)\right)\right].$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Прямое преобразование Фурье отображает множество коэффициентов $\{A_0, A_1, \ldots A_{N-1}\}$ во множество коэффициентов $\{B_0, B_1, \ldots B_{N-1}\}$ по правилу

$$B_q = \sum_{l=0}^{N-1} A_l \exp\left(-2\pi i q l/N\right),$$

а обратное преобразование отображает $\{B_0, B_1, \ldots B_{N-1}\}$ в $\{A_0, A_1, \ldots A_{N-1}\}$:

$$A_l = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} B_q \exp\left(2\pi i q l/N\right), \quad q, l = 0, 1, \ldots N-1.$$