

- ограничения разлета плазмы // Третья междунар. конф. по генерации мегагауссовых полей и родственным экспериментам: Тез. докл. — Новосибирск, 1983.
9. Адамьян Ю. Э., Титков В. В., Шнейерсон Г. А. О снижении нагрева проводников в импульсном магнитном поле // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1984. — № 5.
 10. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
 11. Еськов А. Г., Куртмуллаев Р. Х., Китаев М. И. Система трехмерного сжатия плазмы на установке ТЛ-1 // Сверхсильные магнитные поля. Физика. Техника. Применение. — М.: Наука, 1984.
 12. Еськов А. Г., Куртмуллаев Р. Х., Китаев М. И. Оптимизация системы электродинамического разгона и характеристик тяжелой оболочки в термоядерной схеме с квазисферической компрессией «тор — лайнер» // Докл. II Всесоюз. конф. по инженерным проблемам термоядерных реакторов. — Л.: НИИЭФА, 1982. — Т. 1.
 13. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. — М.: Мир, 1974.
 14. Соколов Л. Д. Сопротивление металлов пластической деформации. — М.: Металлургиздат, 1963.
 15. Таблицы физических величин. Справочник/Под ред. И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976.

г. Ленинград

Поступила 6/1 1988 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 1988 г.

УДК 533.95 : 537.84

В. В. Сурков

ГЕОМАГНИТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ПРОДОЛЬНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Распространение акустических волн в Земле приводит к возмущениям геомагнитного поля [1—3]. Изучение электромагнитных сигналов дает дополнительную информацию как о сейсмическом источнике, так и о состоянии породы (в частности, ее электропроводности). В теоретических исследованиях в основном рассматриваются магнитные возмущения, обусловленные поверхностными волнами Рэлея, которые имеют наибольшую амплитуду на больших расстояниях от источника [4—7]. Так, в [5] изучалась квазигармоническая волна Рэлея во внешнем магнитном поле, а в [6] — возмущения, вносимые поверхностными волнами, инициированными линейным и точечным источниками.

В данной работе вычисляются магнитные возмущения в окрестности источника продольных сферических волн при любой функции приведенного потенциала упругих смещений. Исследуются различные механизмы появления электромагнитного сигнала. Анализируется влияние диффузии возникающих токов, выделяется слагаемое, описывающее локальные магнитные возмущения вблизи фронта упругой волны.

Рассмотрим однородное упругое пространство с коэффициентом электропроводности σ_1 при $z < 0$ и σ_2 при $z > 0$. Среда находится в однородном внешнем магнитном поле $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z$. В момент времени $t = 0$ в нижнем

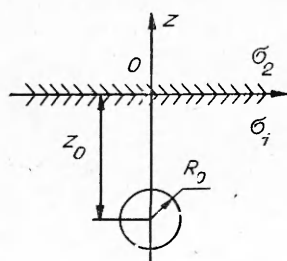


Рис. 1

полупространстве возникает сферическая продольная упругая волна, причем источник волны представляет собой сферический излучатель радиуса R_0 , центр которого находится на глубине z_0 (рис. 1).

Вычислим возмущение внешнего магнитного поля, обусловленное движением проводящих слоев среды в упругой волне. Предполагая, что возникающее возмущение мало, т. е. $\delta \mathbf{H} \equiv \mathbf{H} \ll H_0$, запишем в квазистационарном приближении уравнения

$$(1) \quad \partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] + D_{1,2} \Delta \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0, \quad D_{1,2} = (\mu_0 \sigma_{1,2})^{-1},$$

где $D_{1,2}$ — коэффициенты диффузии магнитных возмущений соответственно для нижнего и верхнего полупространства. Поле скоростей \mathbf{v} считаем известной функцией координат и времени. Учитывая осевую симметрию

задачи, используем цилиндрическую систему координат z, r с центром в точке O . Уравнения (1) при этом принимают вид

$$(2) \quad \frac{\partial H_r}{\partial t} = D_{1,2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_r}{\partial r} \right) - \frac{H_r}{r^2} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} \right] + H_0 \frac{\partial v_r}{\partial z};$$

$$(3) \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = D_{1,2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right] + \frac{H_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r;$$

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

(v_r — проекция радиальной скорости среды на полярный радиус r). В продольной сферической волне v_r выражается через приведенный потенциал смещений $f(\xi)$:

$$(5) \quad v_r = \frac{c_l R_0 r}{R^2} \left(\ddot{f} + \frac{R_0}{R} \dot{f} \right), \quad R = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2} \quad (R_0 < R < R_* = R_0 + c_l t).$$

Здесь $\xi = (c_l t - R)/R_0 + 1$; c_l — скорость продольной упругой волны; точка означает дифференцирование по ξ . Вид функции f определяется граничными условиями на поверхности упругого излучателя и на фронте продольной волны. В дальнейшем считаем упругие свойства обеих сред одинаковыми, тем самым исключая из рассмотрения волновое поле отраженной от границы волны. Вклад отраженных упругих волн в магнитные возмущения может быть посчитан отдельно.

Применим преобразование Фурье к уравнениям (2)–(4). Заметим, что компонент Фурье (5) может быть представлен как ($R \geq R_0$)

$$(6) \quad \tilde{v}_r = \int_{-\infty}^{\infty} v_r e^{i\omega t} dt = A(k) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\tilde{r}}, \quad A(k) = -R_0^3 \int_0^{\infty} \dot{f}(\eta) e^{ikR_0(\eta-1)} d\eta$$

($k = \omega/c_l$). В выражении (6) можно использовать известное представление Вейля

$$(7) \quad \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(krq) \exp[ik|z + z_0| \sqrt{1 - q^2}] \frac{q dq}{\sqrt{1 - q^2}},$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода; $\arg \sqrt{1 - q^2} = \pi/2$ при $q > 1$. Учитывая вид выражения (7), будем искать компоненты Фурье магнитных возмущений в виде

$$(8) \quad \tilde{H}_r = \int_{-\infty}^{\infty} h_r(z, q, k) H_1^{(1)}(krq) dq, \quad \tilde{H}_z = \int_{-\infty}^{\infty} h_z(z, q, k) H_0^{(1)}(krq) dq.$$

Подставляя (6)–(8) в (2)–(4), получаем систему уравнений, из которых независимыми являются следующие:

$$(9) \quad h_z'' - \kappa_{1,2}^2 h_z = - \frac{H_0 A(k) k^4 q^3}{2b D_{1,2}} e^{b|z+z_0|}, \quad b = ik \sqrt{1 - q^2};$$

$$(10) \quad h_z' + qk h_r = 0, \quad \kappa_{1,2} = \sqrt{q^2 k^2 - ikk_{1,2}}, \quad k_{1,2} = c_l / D_{1,2}$$

(штрих означает дифференцирование по z). Функции h_z, h_r должны быть непрерывными при $z = 0$ и $z = -z_0$. Требуя также, чтобы h_z и h_r стремились к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, находим решение (9), (10):

$$(11) \quad \begin{aligned} h_z &= C_1 e^{\nu_1 z} + a_1 e^{-b(z+z_0)} & (z < -z_0), \\ h_z &= C_2 e^{\nu_1 z} + C_3 e^{-\nu_1 z} + a_1 e^{b(z+z_0)} & (-z_0 < z < 0), \\ h_z &= C_4 e^{\nu_2 z} + a_2 e^{b(z+z_0)} & (z > 0). \end{aligned}$$

Функцию h_r можно определить из (11) при помощи (10). Здесь использованы обозначения

$$(12) \quad C_1 = C_2 + \frac{ba_1}{\kappa_1} e^{\kappa_1 z_0}, \quad C_2 = \frac{ba_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2)} e^{-\kappa_1 z_0} + \frac{(a_2 - a_1)(b + \kappa_2)}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{bz_0},$$

$$C_3 = \frac{ba_1}{\kappa_1} e^{-\kappa_1 z_0}, \quad C_4 = \frac{2ba_1}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{-\kappa_1 z_0} +$$

$$+ \frac{(a_1 - a_2)(\kappa_1 - b)}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{bz_0}, \quad a_{1,2} = \frac{H_0 A(k) k^3 q^3}{2D_{1,2} b(k - ik_1)},$$

причем на действительной оси $\text{Re} \kappa_{1,2} > 0$. Подставляя (11), (12) в (8), имеем решение задачи в представлении Фурье.

Интегралы (8) вычислим приближенно для больших расстояний r , используя асимптотику выражений для функций Ханкеля при $kr \gg 1$. Для $z \geq 0$ получаем выражения

$$(13) \quad \tilde{H}_z = \frac{Bk^{5/2}}{\sqrt{2\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z, k, q) dq, \quad \tilde{H}_r = \frac{iBk^{3/2}}{\sqrt{2\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(z, k, q)}{dz} \frac{dq}{q}, \quad B = \frac{H_0 A}{D_1},$$

$$F = \left\{ \left[2e^{-\kappa_1 z_0} + \frac{k(k_1 - k_2)(\kappa_1 - b)}{k_1(k - ik_2)b} e^{bz_0} \right] \frac{e^{-\kappa_2 z}}{(k - ik_1)(\kappa_1 + \kappa_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_2 e^{b(z+z_0)}}{k_1(k - ik_2)b} \right\} q^{5/2} e^{ikr q - \pi i/4}.$$

Рассмотрим случай $k_1 > k_2$. При $k > 0$ проведем разрезы в комплексной плоскости q от точек ветвления корневых выражений: $\pm q_1 = (ik_1/k)^{1/2}$, $\pm q_2 = (ik_2/k)^{1/2}$, $\pm q_3 = 1$, как это показано на рис. 2. Тогда $\text{Re} \kappa_{1,2} > 0$ всюду, за исключением секторов, ограниченных линиями разрезов c_1 , c_2 и штриховыми линиями. Область значений переменной q , где $\text{Re} b < 0$, ограничена разрезом c_3 и штрихпунктирной линией.

Исследуем функцию \tilde{H}_z для $z_0 = 0$. В (13) содержатся экспоненты от функций $f_1 = ikrq - \kappa_2 z$ и $f_2 = ikrq + bz$, имеющие экстремумы в точках $q_4 = (ik_2/k)^{1/2} r/R$ и $q_5 = r/R$ соответственно, которые лежат на выбранном листе римановой поверхности. Сместим контур интегрирования в верхнюю полуплоскость так, чтобы он проходил через перевальные точки по направлениям $\theta_4 = -\pi/8$, $\theta_5 = -\pi/4$ (кривая l на рис. 2). Обозначая через \tilde{H}_1 интеграл, вычисленный вдоль этого пути методом перевала, находим приближенное выражение

$$(14) \quad \tilde{H}_1 = \frac{Br^2}{R^3} \left\{ \frac{ik_2^{3/2} z \exp(-R\sqrt{-ikk_2})}{r(k - ik_1)(\sqrt{k_1 R^2/r^2 - k_2} + \sqrt{k_2 z/r})} \left[2 - \frac{k(k_1 - k_2)}{k_1(k - ik_2)} \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(e^{\pi i/4} \sqrt{\frac{k_1 R^2/r^2 - k_2}{k R^2/r^2 - ik_2}} + 1 \right) \right] - \frac{k k_2}{k_1(k - ik_2)} e^{ikR} \right\}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Здесь последнее слагаемое определяет вклад окрестности точки q_5 , а остальные члены обусловлены окрестностью точки q_4 .

В случае $z = 0$ экспоненты в (13) от функций $f_3 = ikrq - \kappa_1 z_0$ и $f_4 = ikrq + bz_0$ имеют экстремумы в точках $q_6 = (ik_1/k)^{1/2} r/R$ и $q_7 = r/R$ ($R = \sqrt{r^2 + z_0^2}$). Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через точки перевала по направлениям $\theta_6 = -\pi/8$ и $\theta_7 = -\pi/4$ (путь 2 на рис. 2), получаем

$$(15) \quad \tilde{H}_2 = \frac{Br^2}{R^3} \left\{ \frac{2z_0 k_1^{3/2} \exp(-R\sqrt{-ikk_1})}{r(\sqrt{k_1 - k_2 R^2/r^2 - i\sqrt{k_1 z_0}/r})(k - ik_1)} - \frac{k k_2}{k_1(k - ik_2)} e^{ikR} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{k(k_1 - k_2)}{k_2(k - ik_1)} \left[\frac{\sqrt{k - ik_1 R^2/r^2 - i\sqrt{k z_0}/r}}{\sqrt{k - ik_1 R^2/r^2} + \sqrt{k - ik_2 R^2/r^2}} \right] \right) \right\}, \quad R = \sqrt{r^2 + z_0^2},$$

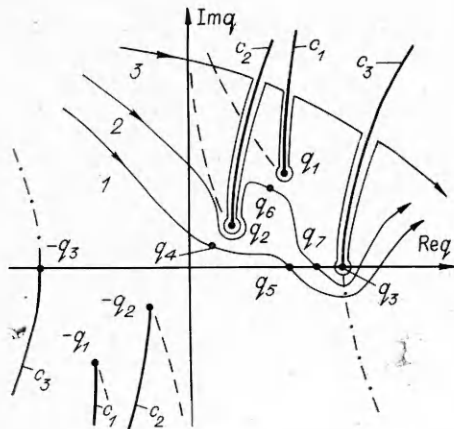


Рис. 2

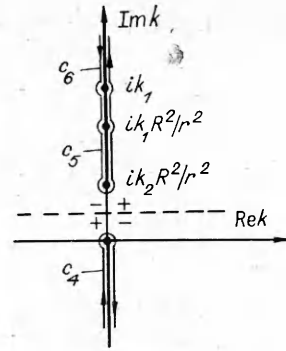


Рис. 3

где предполагается, что $k_1 > k_2 R^2 / r^2$. Первое слагаемое в (15) связано с окрестностью точки q_6 , а второе обусловлено точкой q_7 . Если $k_2 \neq 0$, то к (15) следует добавить слагаемое (18), связанное с обходом разреза c_2 .

Формулы (14), (15) несправедливы, когда $z, z_0 \rightarrow 0$, так как при этом точки перевала $q_4 - q_7$ сближаются с точками ветвления q_1, q_2, q_3 . Исследуем этот случай отдельно, полагая $z = z_0 = 0$. Деформируем исходный контур вверх так, чтобы интегрирование велось вдоль разрезов (кривая \tilde{z} на рис. 2). Так как, кроме ветвлений, никаких других особенностей в q -плоскости у подынтегрального выражения не имеется, то интеграл целиком сводится к вкладам разрезов. Параметризуем разрезы $c_{1,2}$ в виде $\sqrt{q^2 - q_{1,2}^2} = p \exp(3\pi i/8)$, где p — действительная переменная, на левых берегах разрезов $p < 0$, а на правых $p > 0$. Переходя в \tilde{H}_z (13) к переменной p и преобразуя интеграл к промежутку $0, \infty$, получаем после некоторых преобразований выражение, определяющее вклад разреза c_2 :

$$(16) \quad \tilde{H}_{c_2} = \frac{2Bk^{5/2}}{\sqrt{2\pi r}(k_1 - k_2)(k - ik_1)} \int_0^\infty \left[2 + \frac{k(k_1 - k_2)(\alpha_1 - b)}{k_1 b(k - ik_2)} \right] \times \\ \times q^{3/2} p^2 \exp\left(ikr q + \frac{3\pi i}{8}\right) dp, \\ q = \left[q_2^2 + p^2 \exp \frac{3\pi i}{4} \right]^{1/2}, \quad b = ik \left[1 - q_2^2 - p^2 \exp \frac{3\pi i}{4} \right]^{1/2}, \\ \alpha_1 = k \left[p^2 \exp \frac{3\pi i}{4} - \frac{i(k_1 - k_2)}{k} \right]^{1/2}.$$

Причем при $p < p_0 = [\sqrt{2}(k_1 - k_2)/k]^{1/2}$ (область ниже верхней штриховой линии на рис. 2) $\text{Re} \alpha_1 > 0$, а при $p > p_0$ $\text{Re} \alpha_1 < 0$. В точке перевала $p = 0$ предэкспоненциальный множитель в (16) обращается в нуль, поэтому ищем экстремум функции $f = ikr q(p) + 2 \ln p$. При $kr \gg 1$ точка перевала $p_* = (2/kr)^{1/2} (k_2/k)^{1/4}$. Разлагая $f(p)$ в окрестности этой точки, имеем

$$(17) \quad \exp f(p) \approx \frac{2}{kr} \sqrt{\frac{k_2}{k}} \exp \left[-r \sqrt{k k_2} \left\{ \frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{k}{k_2} (p - p_*)^2 \right\} \right].$$

Подставляя (17) в (16) и интегрируя по действительной переменной p , находим

$$(18) \quad \tilde{H}_{c_2} = \frac{Bk_2^{3/2} \sqrt{2}}{r^2 (k_1 - k_2)(k - ik_1) \sqrt{k}} \left[2 - \frac{k(k_1 - k_2)}{k_1(k - ik_2)} \left(e^{\pi i/4} \sqrt{\frac{k_1 - k_2}{k - i(k_2 + \alpha_2)}} + 1 \right) \right] \exp \left(-r \sqrt{-ik k_2} + \frac{3\pi i}{4} \right), \quad \alpha_2 = \frac{2}{r} \left(\frac{k_2}{k} \right)^{1/2} e^{\pi i/4}.$$

После аналогичных вычислений определяем вклад разреза c_1 :

$$(19) \quad \begin{aligned} \tilde{H}_{c_1} = & -\frac{Bk_1^{3/2}\sqrt{2}}{r^2(k_1-k_2)(k-ik_1)\sqrt{k}} \left[2 - \frac{k(k_1-k_2)}{k_1(k-ik_2)} \times \right. \\ & \left. \times \left(e^{-\pi i/4} \sqrt{\frac{k_1-k_2}{k-i(k_1+\alpha_1)}} + 1 \right) \right] \exp\left(-r\sqrt{-ikk_1} + \frac{3\pi i}{4}\right), \\ & \alpha_1 = \frac{2}{r} \left(\frac{k_1}{k}\right)^{1/2} e^{\pi i/4}. \end{aligned}$$

Разрез c_3 параметризуем в виде $i\sqrt{1-q^2} = -p \exp(\pi i/4)$, на левом берегу разреза $p < 0$, а на правом $p > 0$. Переходя в (13) к переменной p и преобразуя интеграл к промежутку $0, \infty$, получаем

$$(20) \quad \tilde{H}_{c_3} = -\frac{2Bk_2k^{3/2}}{\sqrt{2\pi r}(k-ik_2)k_1} \int_0^\infty \left[1 + \frac{k(k_1-k_2)\alpha_1}{k_2(k-ik_1)(\alpha_1+\alpha_2)} \right] q^{3/2} e^{ikrq} dp,$$

где $q = (1+ip^2)^{1/2}$; $\alpha_{1,2} = k(1-q_{1,2}^2+ip^2)^{1/2}$, причем $\text{Re}\alpha_{1,2} > 0$. Вблизи точки перевала $p = 0$ показатель экспоненты принимает вид $ikr \approx \approx kr(i-p^2/2)$. Подставляя это соотношение в (20) и полагая в предэкспоненциальном множителе $p = 0$, после интегрирования имеем

$$(21) \quad \tilde{H}_{c_3} = -\frac{Bkk_2}{rk_1(k-ik_2)} \left\{ 1 + \frac{k(k_1-k_2)}{k_2\sqrt{k-ik_1}(\sqrt{k-ik_1}+\sqrt{k-ik_2})} \right\} e^{ikr}.$$

Таким образом, для данного случая решением будет $\tilde{H}_3 = \tilde{H}_{c_1} + \tilde{H}_{c_2} + \tilde{H}_{c_3}$ (слагаемые определяются формулами (18), (19), (21)). Отметим, что при $z, z_0 \rightarrow 0$ в соотношениях (14), (15) остаются лишь те члены, которые переходят в пределе в выражение (21).

Учитывая, что выше рассматривалось $k > 0$, используем формулу обратного преобразования Фурье

$$(22) \quad H_z = \frac{c_l}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \tilde{H}_z(k) e^{-ikc_l t} dk.$$

Сделаем разрезы в комплексной плоскости k таким образом, чтобы всюду выполнялись условия $\text{Re}\alpha_{1,2} = \text{Re}[k(k-ik_{1,2}R^2/r^2)]^{1/2} > 0$. Эти разрезы обозначены на рис. 3 c_4, c_5 (до точки $k = ik_1R^2/r^2$) и c_6 . На линиях $\text{Re}k = 0$ и $k = ik_2R^2/2r^2$, отмеченных штриховой, $\text{Im}\alpha_2 = 0$. Знаки $\text{Im}\alpha_2$ указаны на рис. 3. Аналогично линии $\text{Re}k = 0$ и $k = ik_1R^2/2r^2$ определяют знакопеременные области $\text{Im}\alpha_1$.

Вначале рассмотрим соотношение (15) (для $z = 0, z_0 \neq 0$). Подставим его в (22) с учетом выражения для $A(k)$ из (16). Преобразуя часть слагаемых к промежутку интегрирования по $k - \infty, \infty$, получаем

$$(23) \quad \begin{aligned} H_2 = H_d + H_e, \quad H_d = & -\frac{2Qz_0r^3k_1^{5/2}}{(k_1-k_2)R^2} \int_0^\infty j(\eta) d\eta \left\{ \sqrt{k_1-k_2} \frac{R^2}{r^2} \times \right. \\ & \left. \times \text{Re} \int_0^\infty \frac{\exp(-R\sqrt{-ikk_1-ikL})}{k-ik_2} dk + \sqrt{k_1} \frac{zi}{2r} \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-R\sqrt{-ikk_1-ikL})}{k-ik_1} dk \right\}, \\ H_e = & \frac{Qk_2r^2}{2} \int_{-\infty}^\infty \left\{ \left[\frac{\sqrt{k-ik_1R^2/r^2} - i\sqrt{k}z_0r}{\sqrt{k-ik_1R^2/r^2} + \sqrt{k-ik_2R^2/r^2}} \right] \frac{k(k_1-k_2)}{k_2(k-ik_1)} + 1 \right\} \frac{k dk}{k-ik_2} \times \\ & \times \int_0^\infty j(\eta) e^{ihR_0(\eta-\xi)} d\eta, \quad Q = \frac{H_0R_0^3}{\pi R^3}, \quad L = R_* - R_0\eta. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что интеграл по η абсолютно сходящийся, и поэтому в H_d изменен порядок интегрирования по η и k . В H_e при $\xi > 0$ перестановка интегралов недопустима, так как для $\eta = \xi$ интеграл по k расходится.

Исследуем слагаемое H_d . Если функция $f(\eta)$ убывает достаточно быстро, так что основной вклад в интеграл по η связан с областью $\eta < R_*/R_0$, то в интеграле по k $L > 0$. Контур интегрирования следует замыкать вниз. При этом в первом члене интегрирования ведется по правому берегу, а во втором — по обоим берегам разреза c_4 . После замены переменной $k = -ix^2/(k_1 R^2)$

$$(24) \quad H_d = \frac{4Qk_1^3 r^3 z_0}{(k_1 - k_2) R^2} \int_0^{R_*} f(\eta) d\eta \int_0^\infty \left(\frac{z_0}{r} \sin x - \sqrt{1 - \frac{k_2 R^2}{k_1 r^2} \cos x} \right) \frac{x \exp\left(-\frac{x^2 L}{k_1 R^2}\right)}{x^2 + k_1^2 R^2} dx.$$

Интеграл от второго слагаемого в (24) преобразуется:

$$(25) \quad \int_0^\infty \frac{x \cos x}{x^2 + k_1^2 R^2} \exp\left(-\frac{x^2 L}{k_1 R^2}\right) dx = \int_0^\infty \Phi\left(x + \frac{L}{k_1 R^2}\right) e^{-x k_1^2 R^2} dx,$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{2y} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{1}{4y}\right) \int_0^{1/2\sqrt{y}} e^{x'^2} dx' \right].$$

Если $k_1^2 R^2 \gg 1$, можно полагать, что в функции $\Phi x \approx 0$. Первый интеграл по x в (24) вычисляется точно, поэтому окончательный результат имеет вид

$$(26) \quad H_d = \frac{H_0 R_0^3 k_1 r z_0}{(k_1 - k_2) R^2} \int_0^{R_*} f(\eta) \left\{ k_1^2 r z_0 e^{k_1 L} \left[e^{k_1 R} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{k_1 L}{k_1}} + \frac{R}{2} \sqrt{\frac{k_1}{L}}\right) - e^{-k_1 R} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{k_1 L}{k_1}} - \frac{R}{2} \sqrt{\frac{k_1}{L}}\right) \right] - \frac{4r^2}{\pi R^2} \sqrt{1 - \frac{k_2 R^2}{k_1 r^2}} \Phi\left(\frac{L}{k_1 R^2}\right) \right\} d\eta.$$

Структура выражения (26) показывает, что оно описывает процессы диффузии токов и агнитных возмущений, возникающих за фронтом ударной волны. Так, для источника типа дельта-функции и при условии $R_* \gg R$, k_1^{-1} выражение в квадратных скобках в (26) запишется как $-R \exp(-k_1 R^2/4R_*)/2R_* \sqrt{\pi}$. Отсюда видно, что данное слагаемое существенно в области $R \leq \sqrt{Dt}$, где заметно влияние диффузии возмущений, возникающих первоначально в окрестности $R \sim R_0$. На больших же расстояниях, если $R \gg R_*$, k_1^{-1} , данное выражение имеет асимптотический вид $-\exp(k_1 R_0 \xi)$. Здесь основную роль играют возмущения, исходящие от фронта упругой волны, причем образуется квазистационарная (без учета геометрического фактора) бегущая картина. Последний член в (26) на больших расстояниях убывает по степенному закону (так как при $R \rightarrow \Phi \rightarrow -1$), что указывает на магнитодипольный характер данного слагаемого. Эффективный магнитный момент обусловлен знакопеременными токами, сосредоточенными в области $R \leq R_*$.

Слагаемое H_e исследуем в области $\xi < 0$, полагая для простоты $z_0 = 0$. Меняя порядок интегрирования по η и k , деформируем контур интегрирования к разрезу c_5 . Учитывая, что в точке $k = ik_2$ подынтегральная функция не имеет особенностей, получаем

$$(27) \quad H_e = -\frac{H_0 R_0^3}{\pi r} \int_0^\infty f(\eta) e^{-k_2 R_0(\eta + |\xi|)} d\eta \int_0^{k_1 - k_2} \frac{(k_2 + p)^2}{\sqrt{p(k_1 - k_2 - p)}} e^{-p R_0(\eta + |\xi|)} dp.$$

Вычисляя внутренний интеграл, приходим к соотношению

$$(28) \quad H_e = \frac{H_0 R_0^2}{2r} e^{-k_2 R_0 |\xi|} \int_0^\infty \dot{j}(\eta) e^{-k_2 R_0 \eta} \frac{d}{d\eta} [(k_1 + k_2) I_0(s) - (k_1 - k_2) I_1(s)] d\eta,$$

$$s = (k_1 - k_2) R_0 (\eta + |\xi|)/2,$$

где I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя первого рода. Отсюда видно, что слагаемое H_e описывает возмущения, локализованные вблизи фронта ($\xi = 0$) упругой волны. Амплитуда их с расстоянием убывает по такому же закону, как амплитуда скорости среды $\sim r^{-1}$. Вдали от фронта продольной волны, если $k_1 R_0 |\xi| \gg 1$ и $k_2 = 0$, формула (28) принимает асимптотический вид

$$(29) \quad H_e = \frac{3H_0}{4r |\xi|^{5/2}} \sqrt{\frac{R_0}{\pi k_1}} \left[-f(\infty) + \frac{5}{2|\xi|} \int_0^\infty \eta \dot{j}(\eta) d\eta \right].$$

Если остаточные смещения отсутствуют, то $f(\infty) = 0$. На больших расстояниях $|\xi| \approx r$, и, значит, (29) представляет собой, как и последнее слагаемое в (26), квазистатическое поле некоторого эффективного магнитного момента.

Подобным образом можно исследовать общие выражения H_z и H_r для других частных случаев ($z = 0, z = z_0 = 0$ и т. п.) при произвольной (но убывающей) функции $\dot{j}(\xi)$. Однако уже из приведенного выше анализа ясно, что на больших расстояниях магнитные возмущения убывают степенным образом. Наибольшая их величина достигается вблизи фронта упругой волны, уменьшаясь с расстоянием $\sim r^{-1}$. Что же касается диффузионных процессов, то они могут играть определяющую роль на начальной стадии процесса, когда диффузионный фронт $R_d \sim \sqrt{Dt}$ опережает упругую волну, имеющую размер $\sim c_t t$. На расстоянии $R \sim k_1^{-1}$ упругая волна выходит вперед и диффузия возникших магнитных возмущений может преобладать только в окрестности источника.

Рассмотрим в качестве примера магнитное поле, обусловленное излучением упругой волны от взрывного источника. Зададим на границе зоны разрушения среды при $R = R_0$ радиальную составляющую σ_{rr} тензора напряжений в виде

$$(30) \quad \sigma_{rr} = - [P_0 + (P_* - P_0) \exp(-t/\tau_0)].$$

Здесь P_* — амплитуда упругих напряжений на границе зоны разрушения (порядка предела прочности породы на разрушение); P_0 — константа порядка литостатического давления; τ_0 — характерное время развития взрыва. Решение соответствующей задачи теории упругости при условии на фронте волны $f(0) = \dot{f}(0) = 0$ позволяет найти явное выражение для функции

$$(31) \quad f(\xi) = a + b e^{-\alpha \xi} - e^{-2\gamma \xi} [(a + b) \cos \delta \xi + \{2\gamma(a + b) - \alpha b\} \sin(\delta \xi)/\delta],$$

$$a = \frac{P_0}{4\gamma \rho c_t^2}, \quad b = \frac{P_* - P_0}{\rho c_t^2 (\alpha^2 - 4\gamma\alpha + 4\gamma)}, \quad \gamma = \frac{c_t^2}{c_l^2}, \quad \alpha = \frac{R_0}{c_t \tau_0}, \quad \delta = 2\sqrt{\gamma(1-\gamma)}$$

(ρ — плотность среды, c_t — скорость поперечных упругих волн). Используя (31), получаем

$$(32) \quad G(k) = \int_0^\infty \dot{j}(\eta) e^{ikR_0 \eta} d\eta = \frac{\alpha b}{ikR_0 - \alpha} + \frac{ci - \alpha b}{2(ikR_0 + i\delta - 2\gamma)} - \frac{ci + \alpha b}{2(ikR_0 - i\delta - 2\gamma)},$$

$$c = 2\gamma[2(a + b) - \alpha b]/\delta.$$

Разберем случай, когда среда 2 является вакуумом. В уравнениях (3), (4) слагаемые, описывающие поле упругих скоростей в среде 2, при

этом автоматически обращаются в нуль, так как $D_2 \rightarrow \infty$. Поле скоростей в упругой волне, отраженной от границы с вакуумом, требует специального рассмотрения и здесь не учитывается. Ограничимся также вычислением компонента напряженности магнитного поля H_z для $z_0^2/r^2 \ll 1$. Разлагая H_e в (23) по параметру z_0/r , имеем

$$(33) \quad H_e = \frac{H_0 R_0^3 i}{2\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} k G(k) e^{-ikR_0 \xi} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{k - ik_2}{k - ik_1}} - \frac{z_0 i}{r} \left(\frac{\sqrt{k - ik_1} - \sqrt{k - ik_2}}{k - ik_1} \right) \right\} dk.$$

Параметр k_2 сохранен в корневых выражениях для определения их знака при обходе точки ветвления. При $\xi > 0$ контур интегрирования замыкаем вниз. В нулевом приближении (33) сводится к вычету в полюсах $k = -i\alpha/R_0$, $k = -(2\gamma i \pm \delta)/R_0$, поскольку интеграл по берегам разреза c_4 от первых двух слагаемых в (33) равен нулю. Вычет в полюсе $k = -i\alpha/R_0$ от последнего члена в (33) равен нулю, так как соответствующее слагаемое имеет разные знаки на берегах разреза c_4 . Вклад этого слагаемого определяется оставшимися полюсами и обходом разреза.

В результате вычислений находим

$$(34) \quad H_e = \frac{H_0 R_0}{r} \left\{ \alpha^2 b \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + k_1 R_0}} - 1 \right) e^{-\alpha \xi} + \operatorname{Re} \left[\frac{(c - \alpha bi)(\delta - 2\gamma i)}{\exp\{\xi(2\gamma + i\delta)\}} \left(\sqrt{\frac{\delta - 2\gamma i}{\delta - i(2\gamma + k_1 R_0)}} - 1 \right) \right] + \frac{z_0}{r} \left(\operatorname{Re} \left[\frac{(\sqrt{\delta - i(2\gamma + k_1 R_0)} - \sqrt{\delta - 2\gamma i})(\delta - 2\gamma i)^{3/2}(a + bi)}{\{\delta - i(2\gamma + k_1 R_0)\} \exp\{\xi(2\gamma + i\delta)\}} \right] + B_0 \right) \right\},$$

$$B_0 = \frac{k_1^2 R_0^2}{\pi} \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{5/2} g(-x) \exp(-k_1 R_0 \xi x)}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})(1+x)} dx,$$

$$g(x) = \frac{\alpha b}{\alpha + x k_1 R_0} - \frac{4\gamma(a+b) + x k_1 R_0 \alpha b}{(x k_1 R_0 + 2\gamma)^2 + \delta^2},$$

где интеграл B_0 , понимаемый в смысле главного значения, обусловлен вкладом разреза c_4 . Если $z_0 = 0$, то выражение (34) можно упростить. При $k_1 R_0 \gg \alpha$, 2γ $H_e = H_0 R_0^2 k_1 \dot{j}(\xi)/2r$, а при $k_1 R_0 \ll \alpha$, 2γ $H_e = -H_0 R_0 \times \times \ddot{j}(\xi)/r$ ($j(\xi)$ определена в (31)). Интеграл B_0 можно упростить, если $k_1 R_0 \xi \gg 1$, подставляя $x = 0$ в знаменатель B_0 и в функцию g (за исключением первого слагаемого, имеющего особенность):

$$(35) \quad B_0 = \frac{\alpha b}{2\xi^{3/2} \sqrt{\pi k_1 R_0}} {}_1F_1\left(1; \frac{5}{2}, -\alpha \xi\right) - \frac{3(a+b)}{4\xi^{5/2} \sqrt{\pi k_1 R_0}}$$

(${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция). Если к тому же $\alpha \xi \gg 1$, то (35) упрощается:

$$(36) \quad B_0 = -\frac{3}{4\xi^{5/2} \sqrt{\pi k_1 R_0}} \left(a + \frac{5g_0}{2\xi} \right), \quad g_0 = a + b - \frac{b(\alpha^2 + 4\gamma)}{4\gamma\alpha}.$$

Следовательно, при $z_0 \neq 0$ как впереди (формула (29)), так и позади фронта упругой волны сигнал с ростом ξ убывает по степенному закону.

При $\xi < 0$, преобразуя контур интегрирования в (33) к разрезу c_5 и учитывая, что вычет в полюсе $k = ik_1$, находящемся на разрезе, обращает-

ся в нуль, получаем

$$(37) \quad H_e = \frac{H_0 R_0^2 k_1}{\pi r} \left\{ k_1 R_0 \int_0^1 \frac{x^{3/2} g(x)}{\sqrt{1-x}} e^{-k_1 R_0 |\xi| x} dx + \right. \\ \left. + \frac{z_0}{r} \left[\int_1^\infty \frac{x^{3/2} g(x)}{\sqrt{x-1}} e^{-k_1 R_0 |\xi| x} dx - \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{x^2 g(x)}{x-1} e^{-k_1 R_0 |\xi| x} dx \right] \right\}.$$

В пределе $k_1 R_0 |\xi| \gg 1$, $\alpha |\xi| \gg 1$ из (37) находим асимптотическую формулу

$$(38) \quad H_e = \frac{H_0}{k_1 r |\xi|^{5/2}} \left\{ \frac{3}{4} \sqrt{\frac{k_1 R_0}{\pi}} \left(\frac{5g_0}{2|\xi|} - a \right) + \frac{2z_0}{\pi r \sqrt{|\xi|}} \left(a - \frac{3g_0}{|\xi|} \right) \right\}.$$

Заметим, что при $z_0 = 0$ (38) совпадает с (29) с учетом (34). Таким образом, формулы (34)–(38) находятся в согласии с проведенным выше общим анализом.

Рассмотрим слагаемые, описывающие в асимптотике диффузию магнитного поля. При $z_0 = 0$ следует воспользоваться выражением (19). Совершим обратное преобразование Фурье при $k_2 \rightarrow 0$ с учетом (32). Структура данного выражения такова, что контур интегрирования нужно замыкать в нижней части плоскости k . Применяя преобразования, подобные сделанным выше, получаем

$$(39) \quad H_d = \frac{H_0 R_0^3 k_1 \sqrt{z}}{r^2} \left\{ \sqrt{k_1 R_0} \operatorname{Re} \left(i - \frac{\sqrt{k_1 R_0}}{\sqrt{\delta - i(k_1 R_0 + 2\gamma)}} e^{-\pi i/4} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{A_1}{\sqrt{\delta - 2\gamma i}} e^{3\pi i/4} + B_1 \right\}, \\ A_1 = \frac{ci + \alpha b}{[\delta - i(2\gamma + k_1 R_0)]} \exp \left[-r \sqrt{\frac{k_1}{R_0}} \left(\sqrt{\sqrt{\gamma} - \gamma} + \right. \right. \\ \left. \left. + i \sqrt{\sqrt{\gamma} + \gamma} \right) - \frac{R_*}{R_0} (2\gamma + i\delta) \right], \\ B_1 = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \frac{g(-x) \cos k_1 r \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} e^{-k_1 R_* x} dx,$$

где интеграл в смысле главного значения связан с обходом разреза c_4 , а остальные слагаемые обусловлены наличием полюсов. Если же параметр z_0/r не мал, то надо использовать первое слагаемое в (23). При помощи обратного преобразования Фурье приходим аналогичным образом к соотношению

$$(40) \quad H_d = \frac{2H_0 R_0^2 r^3 z k_1}{\pi R^5} \left[B_2 - \pi k_1 R_0 \left\{ \frac{\alpha b}{\alpha + k_1 R_0} \left(\sin R \sqrt{\frac{\alpha k_1}{R_0}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z_0}{r} \cos R \sqrt{\frac{\alpha k_1}{R_0}} \right) e^{-\alpha R_*/R_0} + \operatorname{Re} A_1 \left(1 + \frac{z_0 i}{r} \right) \right] \Bigg], \\ B_2 = \text{v.p.} \int_0^\infty \left(\cos k_1 R \sqrt{x} + \frac{z_0}{r} \sin k_1 R \sqrt{x} \right) \frac{g(-x)}{x+1} e^{-k_1 R_0 x} dx,$$

где B_2 — вклад разреза c_4 , а остальные слагаемые — вычеты в полюсах. При больших временах, когда $k_1 R_* \gg 1$ и $R_*/R_0 \gg \alpha^{-1}$, $(2\gamma)^{-1}$, полюсные слагаемые в (39), (40) экспоненциально уменьшаются. Интегралы же B_1 и B_2 имеют асимптотики

$$B_1 = \frac{e^{-u}}{4\sqrt{\pi} (k_1 R_*)^{3/2}} \left\{ a(u-1) + \frac{2R_0 g_0}{R_*} \left(u^2 - u - \frac{3}{4} \right) \right\}, \quad u = \frac{k_1 r^2}{4R_*},$$

$$B_z = a \frac{R_0}{R_*} [2\sqrt{w} \Phi_1(w) - 1] + g_0 \frac{R_0^2}{R_*^2} \left[1 - w + 2\sqrt{w} \left(w - \frac{3}{2} \right) \Phi_1(w) \right] -$$

$$- \frac{z_0 R R_0 \sqrt{\pi k_1}}{2r R_*^{3/2}} \left[a + g_0 \frac{R_0}{R} \left(\frac{3}{2} - w \right) \right] e^{-w},$$

$$\Phi_1 = e^{-w} \int_0^{\sqrt{w}} e^{x^2} dx, \quad w = \frac{k_1 R^2}{4R_*}.$$

Полученные асимптотические выражения описывают диффузию магнитных возмущений. Причем слагаемое B_z определяет, как это уже отмечалось при исследовании соотношения (26), магнитное поле некоторого эффективного магнитного момента диффундирующих токов.

Проведенный выше анализ иллюстрируется численными расчетами при $z=z_0=0$ по формулам (34), (37), (39). Использовалась аппроксимация приведенного потенциала смещений [8] при $P_* = 5 \cdot 10^8$ Па, $P_0 = 1,5 \cdot 10^8$ Па, $\tau_0 = 0,3$ с, $\rho c_i^2 = 5 \cdot 10^{10}$ Па, $c_l = 5$ км/с, $R_0 = 10^2$ м, $\gamma = 0,2$. На рис. 4 показана развертка сигнала H_z во времени на расстоянии $r = 500$ м для среды с электропроводностью $\sigma = 1$ См/м, сплошная линия — суммарное поле $H_d + H_e$, штриховая — слагаемое H_d (39). На рис. 5 дана та же зависимость для $r = 5$ км и $\sigma = 0,1$ См/м, причем в данном случае, как показывают расчеты, $H_d \ll H_e$. При напряженности геомагнитного поля $H_0 = 40$ А/м амплитуды сигналов 10^{-2} и $1,5 \cdot 10^{-4}$ А/м соответственно, что согласуется с данными [1, 9]. Максимум на обоих графиках приблизительно отвечает моменту вступления в пункт регистрации упругой волны. При этом происходит смена полярности сигнала. Характерно также наличие электромагнитного предвестника упругой волны. Эта особенность проиллюстрирована на рис. 6, где сравниваются зависимости от ξ величин H_e и v . Приведены безразмерные функции $10^3 H_e r / H_0 R_0$ (кривая 1, $\sigma = 1$ См/м) и $2 \cdot 10^2 v r / c_l R_0$ (кривые 2, 3 при $r = 500$ м и 5 км).

Проведенный анализ показывает, что упругие волны порождают геомагнитные возмущения двух типов: локализованные вблизи фронта

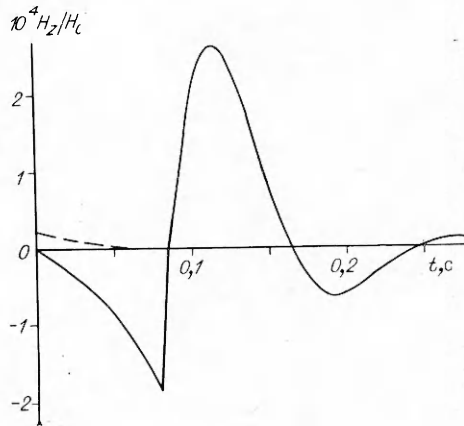


Рис. 4

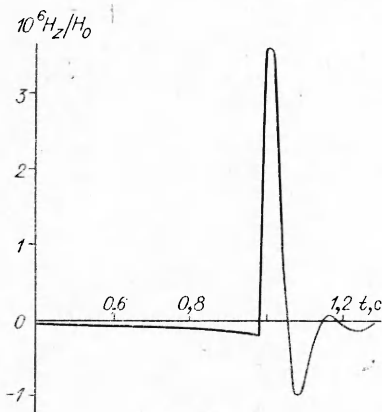


Рис. 5

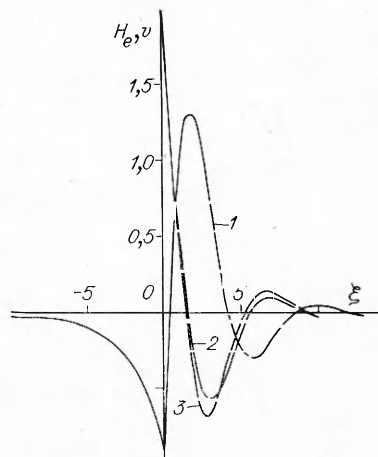


Рис. 6

упругой волны и возмущения диффузионного характера. Существование электромагнитного сигнала, предшествующего акустическому (в ближней зоне), связано с наличием эффективного магнитного момента возникающих токов, а также обусловлено диффузией токовой системы. На больших расстояниях наиболее существенны возмущения, распространяющиеся вместе с продольной волной. Их амплитуда убывает как r^{-1} , а зависимость от времени скоррелирована с акустическими величинами, но сдвинута «по фазе». Такой характер сигнала отвечает экспериментальным данным. Отмеченные закономерности свойственны любому виду функций сейсмического источника.

Автор выражает благодарность С. З. Дунину за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов С. В., Гохберг М. Б. и др. Короткопериодные колебания электромагнитного поля Земли при промышленном взрыве // ДАН СССР.— 1985.— Т. 281, № 3.
2. Гохберг М. Б., Гуфельд И. Л. и др. Исследование возмущений естественных и искусственных электромагнитных полей источниками сейсмического происхождения // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1987.— № 2.
3. Гохберг М. Б., Гуфельд И. Л. и др. Электромагнитное излучение горной среды в условиях взрывного нагружения // ДАН СССР.— 1987.— Т. 295, № 2.
4. Гульельми А. В. Магнитоупругие волны // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1986.— № 7.
5. Гульельми А. В. Возбуждение колебаний электромагнитного поля упругими волнами в проводящем теле // Геомагнетизм и аэронавигация.— 1986.— Т. 27, № 3.
6. Горбачев Л. П., Сурков В. В. Возмущение внешнего магнитного поля поверхностной волной Рэлея // Магнит. гидродинамика.— 1987.— № 2.
7. Гульельми А. В., Гохберг М. Б. и др. Индукционное сейсмомагнитное зондирование земной коры // ДАН СССР.— 1987.— Т. 293, № 4.
8. Роден Г. Неупругие процессы в сейсмических волнах при подземных взрывах // Нелинейные волновые процессы.— М.: Мир, 1987.— (Новое в зарубежной науке. Сер. Механика; № 42).
9. Барсуков О. М., Сквородкин Ю. П. Магнитные наблюдения в районе взрыва в Медо // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1969.— № 5.

г. Москва

Поступила 21/IV 1988 г.

УДК 533.6.011

С. Д. Савров

О МЕХАНИЗМЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ЕЕ ДВИЖЕНИИ В КАНАЛЕ

Деформация ударного фронта мощной ударной волны (УВ) у стенок канала, заполненного инертным газом, обнаружена Шреффлером и Христианом [1]. Количественное описание этого явления и тем более прогнозирование условий его возникновения малоизвестны и до настоящего времени. Неожиданным, например, оказалось обнаружение такой деформации ударного фронта в лабораторной ударной трубе [2].

Первая попытка удовлетворительного объяснения явления деформации фронта предпринята Г. И. Тагановым [3] на основе аналогии пристеночного искривления фронта с явлением отрыва вязкого пограничного слоя. Исходным пунктом в этой модели было предположение о наличии «теплого слоя» перед фронтом УВ вблизи нагреваемой излучением стенки. Такая модель хорошо согласуется с экспериментами, в которых «теплый слой» создан искусственно — путем теплопередачи от нагретой горелкой или разрядом металлической стенки [4—7]. В этих условиях возникновение «теплого слоя» явно отличается от условий его возникновения в ударных трубах или при мощном взрыве над поверхностью Земли. В ударной трубе [2] перед фронтом УВ обнаружено испарение стенок канала при весьма умеренных яркостных температурах (~15 кК). Наличие паров осложняет задачу.

Детальное исследование показало [8], что слой паров является тонким относительно диаметра канала, и это на первый взгляд позволяет применить для описания деформации фронта бифуркационную модель, являющуюся развитием схемы, приведенной в [3].

На рис. 1 дана схема течений для такой модели, где 1 — тангенциальная поверхность, 2 — невозмущенный ударный фронт, 3 — вторичный ударный фронт, 4 — косая УВ, 5 — граница срыва потока, 6 — пристеночный слой паров.