Сибирский экологический журнал, 4 (1999) 431–441

УДК 630*164.4:630*174.755:519.677

Фрактальная структура ветви дерева

А. И. ГУРЦЕВ, Ю. Л. ЦЕЛЬНИКЕР

Институт лесоведения РАН
143030 с. Успенское Одинцовского района Московской области

АННОТАЦИЯ

Ветви древесных растений являются особого рода структурами, которые можно рассматривать как фрактальные. Их фрактальная размерность характеризует "извилистость" объекта и косвенно определяет степень контакта ветви с окружающим пространством.

Предложен метод для определения фрактальной размерности ветви дерева. Для имитации структуры реальной ветви использована схема моноподиального ветвления, для которой приводятся формулы расчета суммарной длины ветвей всех порядков на скелетных ветвях разного возраста в зависимости от коэффициента ветвления. Фрактальная размерность определена на основании зависимости между масштабом измерения и суммарной длиной ветви. На основе эмпирических данных с помощью имитационной модели проведена оценка фрактальной размерности ветви ели, в которой учитывалась динамика новообразования и отмирания побегов.

Показано, что фрактальная размерность увеличивается с возрастом ветви. Уменьшение освещенности до определенных пределов приводит к возрастанию фрактальной размерности ветви.

ВВЕДЕНИЕ

Многие природные объекты, в отличие от геометрических фигур правильной формы (треугольников, цилиндров, шаров и пр.), заполняют пространство не сплошь, а лишь частично. С этой точки зрения такие объекты представляют промежуточную форму между либо объемными (трехмерными) и плоскими (двумерными), либо плоскими и линейными (одномерными) фигурами. Такие объекты получили название фракталов. Для них "мерность" выражается дробными числами, а не целыми, как для привычных геометрических объектов. В нестрогом определении "фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому" [1, с. 19]. Для фракталов характерны неровные границы с окружающим пространством, причем показатель фрактальности (мерность объекта) может служить оценкой "извилистости" объекта и внутри заполняемого им собственного контура и, следовательно, контакта объекта с окружающей средой. Одним из характерных свойств фрактальных объектов является самоподобие, т. е. подобие части объекта в ином масштабе целому объекту.

Особый класс представляют собой ветвящиеся фракталы, примером которых могут служить реки с их притоками, нервная и кровеносная системы и т. п. К таким объектам можно отнести ветки и кроны деревьев. Оценка фрактальной размерности кроны деревьев важна прежде всего потому, что возможность поглощения солнечной радиации и углекислого газа, от которых зависит фотосинтез, определяется контактом ассимилирующих органов с атмосферой, мерилом которого может служить фрактальная размерность ветви или кроны.

Крона дерева как фрактал. Подход к изучению крон деревьев как фрактальных объектов применялся в ряде исследований. При этом рассматривалась либо целиком вся крона дерева как объемного тела и его фрактальная размерность изменялась от 2 до 3 [2], либо анализировались отдельные ветки 1-го порядка с системой дочерних ветвей, которые в первом приближении принимались за плоские фигуры [3]. В этом случае их фрактальная размерность находилась в границах 1–2.

В ряде работ, отражающих такого рода исследования, дано теоретическое обоснование соотношения размеров материнских и дочерних ветвей [4, 5], рассчитаны критические нагрузки, которые может выдержать фрактальная система ветвления [6, 7]. Однако большая часть этих исследований касается, во-первых, фрактальной структуры осевой части кроны, а не ассимилирующих органов, и, во-вторых, они проведены не для реально существующих пород, а на гипотетических деревьях с упрощенной, ди- или трихотомической системой ветвления [4, 5]. Вычисление фрактальной размерности реально существующих деревьев, основанное на данных наблюдений за деревьями в лесу или на открытом месте, проведено в ограниченном числе работ [2, 3]. Это может быть вызвано как относительной новизной фрактальной теории, так и трудностями методического характера. В данной работе уделено много внимания теоретическому рассмотрению ветвящихся структур – от простых до более сложных, изучению их фрактальной структуры и способу ее оценки на примере ветви ели. В данной работе рассматривается моноподиальный рост ветви.

Ветвь с неограниченным ростом и ветвлением. Моноподиальный тип роста характеризуется тем, что каждый год от родительского побега любого порядка образуются один центральный побег того же порядка ветвления и некоторое количество боковых побегов с порядком ветвления на единицу больше [8]. Рассмотрим наиболее общие свойства ветви на примере бесконечно ветвящейся структуры. Затем от столь неправдоподобной модели ветви будем переходить к более реалистичной, вводя постепенно необходимые дополнения.

Для того чтобы от побега можно было перейти к такого рода ветви, следует задать количество ежегодно образующихся дочерних побегов (r) и их длину (l) или способ ее изменения. Определим, что, независимо от возраста ветви, длина каждого вновь образующегося годичного побега, будь то продолжение родительского побега или боковой побег, представляет собой некоторую долю (q) от длины предыдущего побега: $l_{n+1} = ql_n$. Тогда длина n-го сегмента будет равна $l_n = l_0 q^{n-1}$. *Поскольку* l_0 представляет собой просто множитель, примем, что начальная длина ветви равна 1 ($l_0 = 1$). При первом ветвлении, которое произойдет на второй год жизни ветви, будет образовано r новых побегов, включая центральный. Длина каждого из r побегов будет равна q, а общая длина – rq. На 3-й год на каждом из r побегов будет образовано еще по r побегов длиной q^2 каждый и общая длина трехлетней генерации побегов составит r^2q^2. Таким образом, для n-й генерации побегов общая длина будет равняться $(rq)^{n-1}$. Длину всех побегов ветви за n лет (L_n) можно получить, если сложить длины побегов, полученные для каждой генерации :

$$L_n = (rq)^0 + (rq)^1 + (rq)^2 + (rq)^3 + .. + (rq)^{n-1},$$

т. е. как частичную сумму степенного ряда. В случае, если члены степенного ряда (выражение, стоящее в скобках) будут меньше 1, то ряд будет сходящийся, т. е. для длины ветвящейся структуры можно указать конечный предел. Правда, маловероятно, что в природе можно встретить соотношение $rq < 1$. Поэтому бесконечно ветвящаяся ветка будет иметь бесконечную суммарную длину всех побегов ($L_n \to \infty$).

Наряду с суммарной длиной всех побегов (L_n) для ветви можно указать еще один характерный параметр – линейная длина ветви, которую определим как радиус роста ветви (R). Радиус роста ветви – величина, которая характеризует линейный размер пространства, в котором происходит рост ветви и который равен: $R_n = \sum g^{n-1}$, т. е является суммой ежегодно образующихся сегментов ветви и частичной суммой сходящегося степенного ряда (q< 1). Таким образом, бесконечная длина ветви может быть ограничена в некотором конечном пространстве (дву- или трехмерном). Таким образом, задача, которая возникает, связана с измерением бесконечной длины в ограниченном пространстве.

Радиус ветви имеет конечную величину. Это означает, что можно провести окружность с центром в точке начала роста ветви и с радиусом R, которая будет являться границей роста, за пределы которой ветка не вырастет. Значение R можно вычислить по формуле суммы сходящегося степенного ряда:

$R = (1 - q)^{-1}$ при $q < 1$.

В соответствии с методами, принятыми при измерении фрактальных объектов, необходимо оценить длину ветви при разных масштабах. Если будет выбрана единица измерения, равная R, то длина ветви будет равна 1. При уменьшении единицы измерения в 2 раза длина ветви увеличится не в 2 раза, как это можно было бы ожидать для линейного объекта (например, прямой линии). С уменьшением масштаба измерения будут "различимы" более мелкие ветви, чем центральная ось, которые можно будет включать в процесс суммирования. Поскольку процесс измерения ветви тесно связан со степенными рядами, то удобно для последовательного изменения масштаба использовать величину остаточной суммы радиуса ветви (R). Масштаб, позволяющий измерить суммарную длину n генераций ветви, не дает возможности измерить часть ветви, которая старше n и заведомо короче. Длина ветви тогда будет равна общей длине n генераций всех побегов (L_n), деленной на величину масштабной единицы (G_n):

$L_n(G_n) = L_n / G_n$,

где $L_n = \dfrac{1 - (rq)^n}{1 - rq}$;

$G_n = \dfrac{q_n}{1 - q}$;

q_n – длина побега ветви в n лет.

При этом n следует выбирать таким, чтобы с помощью G_n можно было измерить хотя бы одну ветвь (в частности, какой-либо фрагмент центральной оси ветки).

Фрактальная размерность (D) данного объекта есть не что иное, как функция угла наклона (S) прямой линии графика $\ln(G_n)$ – $\ln(L_n(G_n))$ ($D_f = 1 - S$):

$$D_f = -\frac{1}{i \ln q} \ln \frac{1 - (rq)^{n+i}}{1 - (rq)^n},$$

где n – возраст ветви в точке 1, а $n + i$ – возраст ветви в точке 2 при определении угла наклона (S) прямой в интервале, заданном точками 1 и 2.

Таблица 1

Фрактальный размер (D_f) ветвей в зависимости от коэффициентов ветвления (r) и удлинения (q)

q	r		
	3	5	9
0,25	0,02	0,16	0,58
0,50	0,59	1,32	2,17
0,75	2,82	4,59	6,64

При бесконечном росте ($n \rightarrow \infty$) *фрактальная размерность ветви будет равна:*

$D_f = -\ln(r) / \ln(q)$ ($q < 1$ и $rq > 1$).

Из табл. 1 видно, что фрактальная размерность бесконечно ветвящейся структуры сильно зависит от коэффициентов r и q. Более того, при определенных значениях этих параметров размерность оказывается выше, чем реально мыслимые величины. Этот факт можно объяснить многократным взаимным перекрытием "побегов", которые представляют собой линейные объекты, ширина которых равна нулю. Для настоящих ветвей различных древесных пород, имеющих конкретную ширину, фрактальная размерность будет меньше, чем размерность пространства, в котором расположен объект, так как перекрытия недопустимы. В связи с этим число порядков ветвления у живых веток ограничено и, как правило, не превышает 7–8. Вместе с тем та легкость, с которой можно нарастить массу побегов, незначительно изменяя параметры ветвления, говорит о весьма эффективном механизме реагирования на внешние воздействия.

Если обратить внимание на реальное дерево, то оно является линейной конструкцией в трехмерном пространстве. В частности, морфоструктура ветви имеет такую трехмерную организацию, которая позволяет перехватывать поток света, проходящий через плоскость ветви, и осуществлять транспорт ассимилятов и воды, используя механизмы, связанные с линейными характеристиками ветви.

Фрактальной размерности можно, наряду с геометрическим, придать еще и физический смысл. По аналогии с обычной размерностью она связывает между собой массу объекта и его характерный линейный размер (R):

$M(R) \sim R^{D_f}$.

Тогда плотность объекта будет не постоянной величиной, а зависимой от радиуса.

$\rho(R) \sim MR^{-D} \sim R^{D_f - D}$,

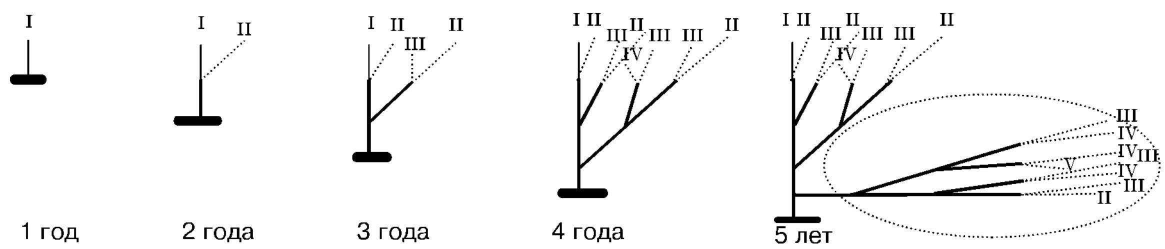
где D – Евклидова размерность пространства. При $D_f <$ D плотность объекта уменьшается по мере удаления от центра объекта, при $D_f = D$ объект соответствует однородному телу; а при $D_f >$ D плотность объекта увеличивается. Поставив в соответствие произведению (rq) понятие массы, можно сказать, что при определенных обстоятельствах (когда $D_f > D$) бесконечно ветвящаяся структура стремится увеличивать свою плотность на периферии. В этом отношении она представляет собой не вполне обычный фрактал, поскольку для фрактальных объектов свойственна как раз обратная тенденция. Но, быть может, деревья потому имеют ветвящуюся форму, что это позволяет им располагать максимум листьев на периферии кроны.

Ветвь с неограниченным ростом, но с ограниченным числом порядков ветвления. Ограничение числа порядков ветвлений является одним из способов, с помощью которого дерево может регулировать плотность ветвей. Для ели характерно образование 3–4 порядков. В рассмотренном выше примере бесконечно ветвящейся структуры нет параметра, который отвечал бы за эту особенность. На рис. 1 показана схема образования ветвей различных порядков.

В первый год ветка образует побег единичной длины. В последующие годы вдоль центральной оси образуется по одному побегу, каждый из которых в q раз меньше предыдущего (родительского) (см. рис. 1).

Начиная со второго года образуются побеги 2-го порядка, чья длина в каждый год определяется по тому же правилу. Число же побегов 2-го порядка равно числу уже имеющихся побегов, поскольку каждый вновь образующийся побег является продолжением уже существующего побега плюс число побегов 1-го порядка, так как от каждого из них должен отходить один побег 2-го порядка.

Начиная с третьего года образуются побеги 3-го порядка по тем же правилам для длины и числа побегов, что и для 2-го порядка, с учетом порядка ветвления. Вновь получаемая ветка в возрасте t имеет верхнюю часть, полностью совпадающую со всей веткой в возрасте $t - 1$, и самую нижнюю боковую ветвь, аналогичную верхней, с той лишь разницей, что все порядки



Длины ветвей разных порядков:

I порядок

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + C^0_{n-1} \; q^{n-1}$$

II порядок

$$1q^1 + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots + C^1_{n-1} \; q^{n-1}$$

III порядок

$$1q^2 + 3q^3 + 6q^4 + \ldots + C^2_{n-1} \; q^{n-1}$$

Рис. 1. Схема образования ветви.

Римские цифры – порядок ветвления.

побегов увеличены на 1 (рис. 1, 5-летняя ветвь). Можно заметить, что правило образования числа побегов соответствует последовательности биномиальных коэффициентов, которые можно найти из треугольника Паскаля (см. рис. 1). Протяженность побегов i-го порядка, расположенных на ветви возраста n, будет равна:

$$S_n^i = \sum_{j=1}^{n} C_{j-1}^{i-1}\, q^{j-1},$$

где C_j^i – биномиальный коэффициент, при $i > j$ равен 0,

S_n^i – суммарная длина побегов одного порядка.

В приведенной схеме образования моноподиальной ветви рассматривался случай, когда могло происходить только одно ответвление от родительского побега. Если число ответвлений больше, то, чтобы получить окончательную длину всех побегов для каждого порядка, необходимо умножить соответствующие длины, полученные в предположении, что каждый год образуется один боковой побег, на произведение коэффициентов ветвления (r), начиная с первого порядка до требуемого включительно (например, для i-го порядка: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_i$). Если все коэффициенты равны, т. е. ветвление не зависит от порядка побега, то выражение для числа побегов можно упростить и множитель будет r_i, где i – порядок ветвления. Таким образом, для всей ветки возраста n с k порядками ветвления общая длина может быть вычислена по формуле:

$$L_n^k = \sum_{i=1}^{k} \prod r_i\, S_i^n,$$

где L_n^k – суммарная длина побегов с 1-го по k-й порядок, расположенных на ветви возраста n; r_i – коэффициент ветвления побегов i-го порядка.

Для всех порядков можно написать рекуррентную формулу расчета частичных сумм:

$$S_n^i = C_0^{i-1}\frac{q^0}{1-q} + q\,\frac{S_{n-1}^{i-1}}{1-q} - C_{n-1}^{i-1}\frac{q^n}{1-q}.$$

Ниже на основе этого выражения приведены формулы для расчета длин побегов первых 3-х порядков ветвления:

1-й порядок:

$$S_n^1 = \frac{1-q^n}{1-q};$$

2-й порядок:

$$S_n^2 = q\frac{1-q^{n-1}}{(1-q)^2} - C_{n-1}^1\frac{q^n}{1-q};$$

3-й порядок:

$$S_n^3 = q_2\left(\frac{1-q^{n-2}}{(1-q)^3} - C_{n-1}^1\frac{q^{n-1}}{(1-q)^2}\right) - C_{n-1}^2\frac{q^n}{1-q}$$

и т. д.

Каждая из частей ветви, отличаемая по признаку порядка, при бесконечном росте ветви ($n \to \infty$) ограничена, и для них можно указать

$$\lim_{n\to\infty} S_n^k = \bar{S}(k) = \frac{q^{k-1}}{(1-q)^k}.$$

Для общей длины побегов k-го порядка ($L(k)$) при бесконечном росте ветви можно записать:

$$L(k) = \bar{S}(k)\prod_{i=1}^{k} r_i.$$

При $r_1 = 1$ и одинаковом ветвлении побегов всех порядков

$$L(k) = r^{k-1}\,\bar{S}(k).$$

Для ветви с ограниченным числом порядков ветвления наблюдается иной характер роста. Общая длина ветви со всеми разрешенными порядками оказывается ограниченной, и, пользуясь вышеприведенными формулами, можно рассчитать предельные значения для всех по-

Таблица 2

Фрактальная размерность ветви с ограниченным ветвлением ($r = 1$)

Коэффициент удлинения q	Порядок ветвления k			Вся ветка
	1-й	2-й	3-й	
0,7	1,002	1,008	1,023	1,021
0,9	1,091	1,258	1,414	1,385

рядков и всей ветки соответственно. Таким образом, это уже ограниченный рост в ограниченном пространстве.

Как и в первом примере, расчет фрактальной размерности ветвей отдельных порядков и всей ветви целиком остается прежним. Способ выбора масштаба измерения также остается прежним.

На значения фрактальной размерности ветви оказывают влияние две характеристики ветвления – q и k.Коэффициент ветвления не влияет на фрактальную размерность ветвей отдельных порядков, так как он является множителем, который при логарифмировании становится просто слагаемым при значении суммарной длины ветви ($\prod r_i$ или r^i). Для всей ветви необходимо брать сумму побегов всех порядков ветвления $\left(\sum L(k)\right)$. При этом перед каждым членом такой суммы множитель r_i будет каждый раз отличаться в зависимости от показателя степени i, который указывает на порядок ветвления, и в этом случае его нельзя вынести из-под логарифма. При трех порядках коэффициент ветвления мало влияет на фрактальную размерность всей ветви целиком (так, при $r = 10$ и $q = 0{,}9$ $D_f = 1{,}411$ для всей ветви). Приведенные в таблице значения D_f являются средними величинами для ветви, рассчитанными за период от 10 до 100 лет. На самом деле, D_f плавно убывает с уменьшением масштаба: так, для 1, 2 и 3-го порядков начальные значения были равны 1,3; 1,7; 2,0 соответственно и стремились к 1 при бесконечном росте ветви (характер поведения D_f аналогичен графикам, представленным на рис. 2). Таким образом, рассматриваемая ветвящаяся структура с ограничением на число порядков ветвления имеет переменную фрактальную размерность, которая стремится к линейной размерности, что является следствием существования предела суммарной длины ветви с ограниченным ветвлением.

При изучении морфоструктуры крон деревьев часто используется коэффициент бифуркации ветвей. Он определяется как отношение числа ветвей k-го порядка к числу ветвей $(k-1)$-го порядка. Он отличается по смыслу от коэффициента ветвления (r), который показывает, сколько побегов может образоваться на родительском побеге за год. Установлено, что коэффициент бифуркации является при определенных условиях постоянной величиной [9]. На графике, где по оси абсцисс отложены порядки ветвления, а по оси ординат – логарифм численности ветвей соответствующего порядка, это отношение выражается прямой линией. В примере образования структуры ветви с ограниченным ветвлением это соотношение не может выполняться. Из рис. 1 видно, что оно равно отношению биномиальных коэффициентов, стоящих один под другим и относящихся к одному возрасту:

$$B_n^k = r_k \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = r_k \frac{n-k+1}{k-1},$$

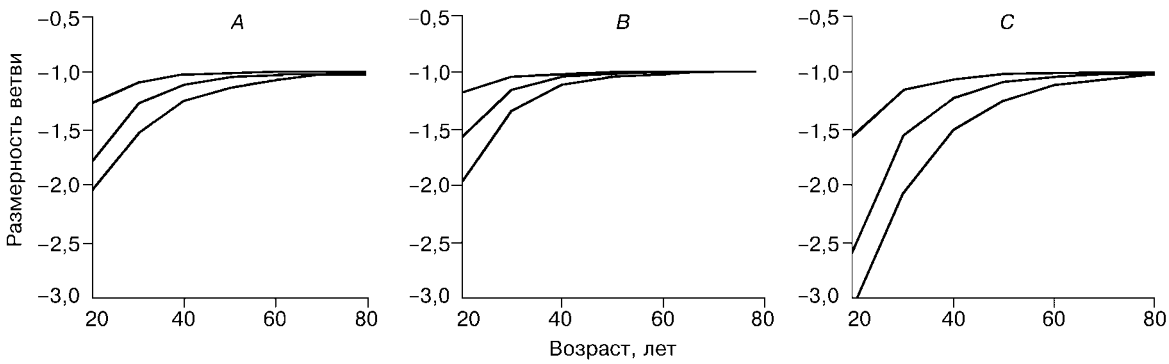


Рис. 2. Изменение фрактальной размерности ветви.

α_1 – показатель степени в формуле аллометрической зависимости между длиной побега и суммарной длиной хвои. α_2 – показатель степени в формуле аллометрической зависимости длины одной хвоинки от длины побега в $n + 1$ год. *A*) $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$; *B*) $\alpha_1 = 1{,}5$ и $\alpha_2 = 1$; *C*) $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0{,}5$. Верхняя, средняя и нижняя линии соответствуют побегам 1-го, 2-го, 3-го порядков.

где B – коэффициент бифуркации ветви в возрасте n.

Отношение биномиальных коэффициентов является величиной, которая задает минимально возможное значение для B n-й генерации побегов. Так, например, если в 6 лет отношение числа ветвей 3-го порядка ко 2-му равно 2, то в 12 лет – 5. Следовательно, если необходимо поддержать коэффициент на уровне 2, то к 12 годам отпад побегов 3-го порядка должен происходить быстрее, чем 2-го. С другой стороны, для той же 12-летней ветви отношение численности ветвей 4-го порядка к 3-му равно 3, а 5-го к 4-му – 2 . Следовательно, коэффициенты ветвления должны возрастать с порядком побегов $r_3 > r_4 > r_5$. Сохраняется ли условие постоянства коэффициента бифуркации ветвей и при каких условиях – трудно решить без специального рассмотрения. При всегда живых побегах и при постоянном коэффициенте ветвления это условие не может быть выполнено.

Модель роста ветви. Для того чтобы сделать следующий шаг к реалистичному описанию ветви, необходимо рассмотреть отпад побегов и способы расчета длины всей ветви. Фрактальную размерность побегов будем считать постоянной в силу самоподобия рассматриваемого объекта. Для всей ветки это будет верно, пока будут оставаться постоянными коэффициенты ветвления r_i.

Отпад побегов у ветки проходит таким образом, что живые побеги располагаются по ее периферии. В результате у ветки можно выделить две области: центральная мертвая часть в виде конуса и окаймляющая ее зона, состоящая из живых побегов разных порядков, на которых расположена хвоя и чей возраст можно принять приблизительно равным по всем направлениям. Разница между длиной побегов всей ветви и центральной ее части будет равна длине побегов живой части:

$$L^k_{n,\,m} = L^k_n - L^k_{n-m}\ ,$$

где $L^k_{n,\,m}$, L^k_n , L^k_{n-m} , – длины побегов k-го порядка для ветви, состоящей из n генераций, для m-летней периферической части, всей ветви и центральной мертвой части соответственно.

Как можно видеть из хода рассуждений, в живую часть ветви должны быть включены побеги, имеющие хвою. Польза от учета побегов, несущих именно хвою, заключается в том, что появляется возможность оценить характер распределения фотосинтезирующих органов на скелетной части ветви. В целом ряде работ показано, что зависимость между параметрами распределения хвои зависит от длины побега, на котором она растет. Эта зависимость выражается степенной функцией, которая в биологических исследованиях называется формулой простой аллометрии $y = \beta x^{\alpha}$. Длина побега n-й генерации (l_n) с учетом линейного множителя (l_0), принятого равным 1 (см. выше), будет $l_n = l_0 q^n$. Тогда во всех формулах, приведенных ранее и относящихся к измерению длины ветви, можно заменить члены степенного ряда на аллометрическую функцию зависимости характеристики хвои (h) от длины побега. Следовательно, новый член степенного ряда будет равен:

$$h = \beta\ (l_0 q^n)^{\alpha} = \beta(l_0)^{\alpha}\ (q^{\alpha})^n = Au^n,$$

где $A = \beta(l_0)^{\alpha}$ – новый линейный множитель, $u = q^{\alpha}$ – новое значение члена степенного ряда.

Фрактальная размерность будет уменьшаться при значениях α больше 1, и наоборот. Измерение хвои по тем или иным показателям для ветвей, состоящих из конечного числа генераций побегов, не представляет особых трудностей. Особенность оценки фрактальной размерности хвои связана с выбором масштабной единицы. Для этого можно задавать минимальный размер одной хвоинки, которая может быть измерена. Чтобы не нарушать связи со степенными рядами и, следовательно, с размером побегов n-й генерации, необходимо иметь функцию связи между длиной побега и длиной хвоинки. Если функция связи снова может быть выражена через формулу аллометрии, то, как и в предыдущем случае, все линейные множители могут быть объединены и вынесены вне ряда и существенными окажутся лишь показатели степени. Таким образом, на оценку фрактальной размерности влияют только показатели степени подставляемых степенных функций.

Измерение фрактальности ветви с хвоей таким образом, как это представлено на графиках (рис. 2), т. е. с помощью аналитической зависимости между суммарной длиной хвои на побеге и его длиной, не совсем правильно. Дело в том, что, выбрав в качестве масштаба минимальный размер хвоинки, которая может быть измерена, необходимо со всех охвоенных веток считать не всю длину хвои на побеге, а величину, равную числу хвоинок на нем, умноженную на минимальное целое число, соответствующее кратному от деления размера хвои на масштабную единицу. Иными словами, вместо измерения особенностей фрактальной структуры, сформированной хвоей, измеряется линейная протяженность всей хвои на побеге. В результате такой подстановки фрактальная размерность становится ниже.

Несмотря на то что это затруднение можно обойти, стоит признать, что аналитическое выражение для оценки фрактальной размерности ветви становится все более сложным. При этом уже можно отметить такие характеристики ветки, как, например, зависимость коэффициента ветвления от длины родительского побега, которые трудно учитывать при оценке ее фрактального размера. Была построена имитационная модель роста ветви с использованием эмпирических аллометрических соотношений морфоструктуры ветви ели. Эти соотношения взяты из работ Ю. Л. Цельникер [10]. Часть из соотношений была пересчитана, или были рассчитаны дополнительные по тем же данным, что и в уже опубликованных работах. Предпочтение в выборе форм зависимости отдавалось формулам аллометрической зависимости по причинам, указанным выше. Алгоритм построения модели полностью повторяет рассуждения, которые использовались при описании роста ветвящейся структуры с ограниченным порядком ветвления.

Аллометрические соотношения, использованные при построении имитационной модели роста ветви ели: y – зависимая величина, x – независимая величина, α – линейный коэффициент, β – степенной коэффициент;

1) масса единицы длины хвои (x) от процента освещенности открытого места (y): α=2,56; β = 1,278;

2) длина хвои на 1 см побега (y) от массы единицы длины хвои (x):α = 7,866 ; β = 1,086 ;

3) поправочный множитель, учитывающий зависимость массы 1 см длины хвои ели от длины родительского побега (y), для интервала освещенности от 100 до 6 %: α = 0,239 ; β = 0,37;

4) средняя длина хвоинки (x) от массы единицы длины хвои (y): α = 1,126; β = 0,278;

5) число хвоинок на 1 см побега (плотность хвои) (x) от массы единицы длины хвои (y): α = 6,982; β = 0,808;

6) зависимость числа мутовчатых и межмутовчатых побегов (коэффициент ветвления) от длины родительского побега была принята линейной; линейные коэффициенты, а также эмпирические данные по срокам жизни и сохранности хвои и побегов в зависимости от порядка ветвления и типа побегов (мутовчатые/межмутовчатые) заимствованы из работы [10].

Оценка размерности проводилась почти по той же схеме. Отличие заключалось в том, что "выращенная" в модели ветвь имеет конечные размеры и, следовательно, характерные границы масштаба, в которых наблюдается фрактальное поведение. Поэтому масштаб измерения изменялся до тех пор, пока ветка не начинала себя вести как линейный объект. Как правило, за первую масштабную единицу принималась длина центральной оси ветки, затем 1/2, 1/4, 1/8 и т.д.

В аналитической модели ветви начальный размер ветви (l_0) оказывался величиной, не влияющей на ее фрактальный размер. Для имитационной модели ветви это не так. Начальный размер в этом случае косвенно влияет на коэффициенты ветвления в течение всей жизни ветви, поскольку они зависят от длины побега, на котором происходит ветвление. Поэтому он, а также возраст ветви и степень освещенности ветви были выбраны для определения фрактальной размерности ветвей.

По предварительным оценкам, полученным с помощью имитационной модели, можно сделать вывод, что фрактальная размерность (D_f) сильно зависит от возраста ветви. Значения D_f для возрастов 10, 15 и 20 лет были равны 1,54, 1,74 и 1,91 соответственно. Длина первого побега ветви (l_0) и освещенность не оказывали существенного влияние на D_f скелетной части.

Первоначально предполагалось, что l_0 будет влиять на D_f, поскольку между длиной побега и характером ветвления есть связь (см. выше). На величину D_f оказывает влияние и характер отпада, который может ее уменьшить. Чтобы оценить вклад каждой из указанных характеристик в процесс образования ветви, необходимо более детальное изучение.

Освещенность не могла влиять на побегообразование. В модели это не было предусмотрено, так как по опытным данным коэффициент q, от которого зависит размер последующего сегмента, не зависел от уровня освещенности. Однако освещенность могла повлиять на фрактальную размерность ассимиляционного аппарата (см. выше). Так, для уровней освещенности 100, 50, 25 и 5 % получен следующий ряд значений D_f для ветки в возрасте 15 лет: 2,08; 2,05; 2,10; 2,16. Таким образом, по мере снижения освещенности до определенного предела (5 %) имеется тенденция к более плотному заполнению пространства хвоинками. Важно отметить, что значения D_f для хвои оказываются выше 2, что свидетельствует о плотном заполнении плоскости (двумерное пространство), на которую, например, можно было бы спроектировать только хвою. Но понятие "проектирование" бессмысленно в рамках данной модели, так как рассматриваются линейные характеристики ветви, для которых нет толщины и, следовательно, нет тени.

ОБСУЖДЕНИЕ

Как уже отмечалось выше, следует осторожно подходить к полученным оценкам фрактальной размерности. Этот показатель не является постоянным при всех масштабах измерения и стремится к 1 при уменьшении масштабной единицы. Поэтому важно контролировать интервал изменения масштаба, где наклон остается относительно постоянным. Оценки фрактального размера ветви как бесконечно ветвящейся структуры с ограниченным порядком ветвления, полученные ранее (см.табл.1), были несколько ниже, чем в имитационной модели. Однако возрастной интервал и, следовательно, границы изменения масштаба измерения были выше. Поскольку D_f стремится к 1 при уменьшении масштаба, то ее оценка могла оказаться заниженной.

Фрактальный размер ветви является величиной, которая описывает "раздробленность" размещения побегов (линейных структур) в трехмерном пространстве. Наряду с другими морфоструктурными показателями ветви она может изменяться в ответ на изменение окружающих условий, помогая дереву приспосабливаться.

Как ветвящаяся структура, ветка может быть отнесена к группе фракталов, куда входят бассейны рек с притоками, кровеносная и нервная системы [1, 11, 12]. Однако можно отметить отличие ветви от других похожих структур. Это закономерность в образовании побегов различных порядков, которую можно описать с помощью степенных рядов. По всей видимости, можно применить методы оценки фрактальности при изучении рек к ветвлению в кронах деревьев, но это будет, на наш взгляд, более искусственным приемом, чем принятый в данной работе. Нам казалось более естественным следовать за процессом побегообразования и провести анализ преимуществ, которые может извлечь дерево при формировании ежегодных возрастных генераций побегов и организации новых порядков ветвления.

Сравнивая бесконечно ветвящуюся ветвь ($D_f > 2$, табл. 1) с веткой, имеющей ограниченное число порядков ветвления ($D_f < 2$, табл.2), можно видеть, что ограничение приводит к более разумному заполнению пространства, позволяет дереву рационально расположить хвою или листья в кроне, ради чего, собственно, и необходимо ветвление.

С возрастом ежегодные приросты ветви уменьшаются и ветвь стремится к некоторому конечному размеру, который зависит от начального размера ветви и коэффициента снижения ежегодного прироста. Вместе с тем фрактальная размерность имеет тенденцию к увеличению. С возрастом увеличивается доля коротких побегов. Это приводит к более "извилистому" заполнению периферии ветви. Отпад ветвей и опадение хвои могут регулировать данный процесс. При этом могут вступать в силу и оптимизационные механизмы транспорта ассимилятов и воды по все более разветвленной сети веточек [4, 5], а также прочие балансовые соотношения жизнедеятельности побегов (дыхание, закладка почек и рост побегов). Поэтому роль фрактальной структуры ветви связана не только со световыми условиями в точках расположения ассимиляционного аппарата, но и с комплексом факторов – от характера контакта с внешней средой и до организации целого организма.

Предварительная оценка фрактальной размерности хвои, проведенная по результатам имитационной модели структурообразования ветви ели, показала, что снижение уровня освещенности приводит к увеличению фрактальной размерности хвои.

Изучение фрактальной структуры ветви, наряду с чисто утилитарными результатами оценки общей длины ветви и хвои по аналитическим формулам, показало, что часто используемые другие количественные методы определения параметров морфоструктуры ветви (суммарная длина и масса ветвей и др.) могут оказаться недостаточными для описания связей между ее структурой и функцией.

Следует отметить, что многие важные характеристики кроны дерева остаются неучтенными и при фрактальной оценке ее структуры, например углы ветвления ветвей, которые, безусловно, оказывают влияние на форму кроны и внутреннее заполнение кронового пространства [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ветви дерева являются особого рода структурами, которые можно рассматривать как ветвящиеся фрактальные объекты. Фрактальная размерность характеризует "извилистость" объектов и косвенно определяет их контакт со средой.

Вычисление фрактальной размерности ветвящихся линейных объектов может быть проведено путем последовательного измерения их суммарной длины при разном масштабе. Тогда фрактальная размерность будет выражена как тангенс угла наклона прямой зависимости между логарифмом масштабной единицы измерения и логарифмом суммарной длины объекта, измеренной при заданном масштабе.

В отличие от бесконечно ветвящейся структуры, которая является истинным фрактальным объектом, для ветки дерева характерно ограниченное число порядков ветвления, что приводит к ограниченному росту суммарной протяженности всех побегов ветви, и реальная ветвь может рассматриваться как фрактал лишь в определенном интервале масштаба измерения, будучи линейным объектом при бесконечно малом значении единицы измерения.

Оценка фрактальной размерности моноподиально ветвящейся ветви, которая была получена на основании имитационной модели ветви ели, показала, что она зависит от опада побегов, возраста ветви и освещенности. Так, в 10-летнем возрасте ветви она равнялась 1,54, а в 20-летнем – 1,91. Уменьшение освещенности до определенных пределов ведет к увеличению фрактальной размерности ветви.

Авторы выражают благодарность доктору физ.-мат. наук проф. Р. Г. Хлебопросу за консультации и критические замечания при обсуждении статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94-04-11631).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Федер, Фракталы, М., Мир, 1991.
2. B. Zeide, P. Pheifer, *Forest Sci,* 1991, **37:** 5, 1253–1265.
3. F. S. Berezovskaya, G. P. Karev , O. F. Kisliuk et al., Internal Report of International Centre for Theoretical Physics, Miramare-Trieste, 1993, 1–12.
4. D. S. Berger, *J. Theor. Biol.*, 1991, **152:** 4, 513–529.
5. C. A. Long, *Ibid.,* 1994, **167:** 2, 107–113.
6. D. L. Turcotte, R. F. Smalley, S. A. Solla, *Nature,* 1985, 313, 671–672.
7. J.W.Crawford, L. M. Young, *J. Theor. Biol*, 1990, **145:** 2, 199–206.
8. F. Halle, R. A. A. Oldeman, P. B. Tomlinson, Tropical Trees and Forests. An Archtectural Analysis, N. Y., Berlin etc.; Springer Verlag, 1978.
9. E. D. Ford, Attributes of Trees as Crop Plants, Edinburgh, Inst. Terrest. Ecology, 1985, 228–252.
10. Ю. Л. Цельникер, *Лесоведение,* 1994, 4, 35–44.
11. B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, N. Y., W. N. Freeman, 1983.
12. P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer, The Algorithmic Beauty of Plants, N. Y., Berlin etc, Springer Verl., 1990.
13. J. B. Fisher, H. Honda, *Amer. J. Bot.*, 1979, **66:** 6, 633–644.

The Fractal Structure of a Tree Branch

A. I. GURTSEV AND JU. L. TSELNIKER

Inst.of Forest Science RAN, Uspenskoje, Odintsovo distr.
Moscow region, 143030 Russia

A method is proposed for estimation of the fractal dimension of a branch. A scheme of monopodial branching is used to simulate a real branch and to determine its linear quantitative characteristics. The fractal dimension of a branch is calculated using the relationship between the yardstick (or unit of measurement) and the branch length.

A simple recursive elongation of shoots $l_{i+1} = ql_i$, where $0 < q < 1$ and l is shoot length at an age i, results in a power series as a measure of the branch length. A set of formulae is proposed to calculate the total length of branches of different order, age and branching coefficient. It is shown that the fractal dimension of a branch depends on these factors. The fractal dimension of entire branch increases along with the branch order and the branching coefficient (r). The fractal dimension of any i-th order shoots does not depend on r.

Taking into account the complexity of relationships between opposite by directed processes (shoot generation and shoot mortality) a simulation model of the branch structure based on the empirical data for *Picea abies* was carried out. In addition, the fractal dimension of needles was analysed using the formulae of allometric relationships between the shoot length and some needle attributes.