В растворах слабой концентрации при малых γ

$$c(0) = c_0 [1 + \sigma (T_0 - T_1) \gamma^{1/3}] \tag{3.4}$$

При $\gamma = 1$ первые два члена ряда (2.3) имеют вид

$$c(z) = c_0 + \sigma (T_0 - T_1) \left\{ -3^{-1/3} \frac{c_0 (1 - c_0)}{\Gamma(4/3)} \left[\int_0^z \exp \frac{-\xi^3}{3} d\xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{3} \int_0^z \xi^3 \exp \frac{-\xi^3}{3} d\xi \right] + \frac{2}{3} c_0 (1 - c_0) \right\} \tag{3.5}$$

Концентрация на поверхности определится из (3.5) соотношением

$$c(0) = c_0 + \frac{2}{3} \sigma (T_0 - T_1) c_0 (1 - c_0) \tag{3.6}$$

которое следует также из (3.3) при $\gamma \to 1$.

4. Предположим, что диффузионный слой много тоньше теплового слоя. Разложим в ряд Маклорена выражение для распределения температуры в потоке жидкости (2.2) и ограничимся первыми двумя членами разложения

$$T(z) = T_1 + 3^{-1/3} \Gamma^{-1} (4/3) (T_0 - T_1) z \tag{4.1}$$

В случае растворов слабой концентрации уравнение (2.1) с учетом (4.1) интегрируется в квадратурах

$$c(z) = -\frac{c_0 q}{1 - 3^{-2/3} q \gamma^{1/3} J} \int_0^z \exp \left(-\frac{\xi^3}{3\gamma} - q\xi \right) d\xi + c_0 (1 - 3^{-2/3} q \gamma^{1/3} J)^{-1}$$

$$\left(J = \int_0^\infty \exp \left(-\xi - 3^{1/3} q \gamma^{1/3} \xi^{1/3} \right) \xi^{-3/2} d\xi, \quad q = \frac{\sigma (T_0 - T_1)}{\Gamma(4/3) 3^{1/3}} \right) \tag{4.2}$$

Концентрация вещества на поверхности определится из (4.2) соотношением

$$c(0) = c_0 (1 - 3^{-2/3} q \gamma^{1/3} J)^{-1} \tag{4.3}$$

При малых значениях параметра $\varepsilon = \sigma (T_0 - T_1)$ из (4.3) следует выражение (3.4).

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за предложенную задачу и советы.

Поступила 27 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Грю К. Э., Иббс Т. Л. Термическая диффузия в газах. М., Гостехиздат, 1956.
2. Liu V. C. On the separation of gas mixtures by suction of thermal-diffusion boundary Layer. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, Part. 1.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. Lighthill M. J. Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc. 1950, vol 202, S. A., № 1070.

ОБ УЧЕТЕ ВЛАЖНОСТИ В УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВ

С. С. Григорян

(*Москва*)

В работах [1,2] была предложена система уравнений, описывающих движения слабосцементированных грунтов. В естественных условиях такие грунты, представляющие собой пористую массу из минеральных частиц, оказываются насыщенными водой в той или иной степени.

Очевидно, что механические (в частности, динамические) свойства таких грунтов должны существенно зависеть от насыщенности пор водой и воздухом, поэтому в системе уравнений, описывающей движения этих грунтов, должны быть учтены количественные характеристики водо- и воздухосодержания. Исследованием движений грунтов, поры которых почти полностью заполнены водой и содержат лишь ничтожное количество воздуха, занимался Г. М. Ляхов [3,4].

Поставленные им опыты по изучению распространения в водонасыщенных грунтах взрывных волн показали, что при высоких напряжениях в таких грунтах касательные напряжения оказываются пренебрежимыми по сравнению со средним давлением, поэтому при этих условиях водонасыщенные грунты можно рассматривать как идеальные жидкости.

На основе этого было предложено [3,4] уравнение состояния в виде соотношения между давлением p, плотностью среды ρ и определенным образом введенными концентрациями воды и воздуха α_1, α_2

$$p = f(\rho, \alpha_1, \alpha_2)$$

которое удовлетворительно описывает поведение этих грунтов при высоких давлениях. При падении давления до сравнительно небольших величин предположение о возможности пренебрежения касательными напряжениями становится уже неприемлемым, и грунт начинает проявлять свойства твердого тела.

С другой стороны, при очень малом содержании воды в порах грунта свойства грунта как твердого тела сохраняются до очень высоких значений напряжений. Так, в песчаном грунте естественного сложения при влажности порядка 6% радиальное и боковое напряжения (главные) в ударной волне, распространяющейся от взрыва сосредоточенного заряда ВВ, измеренные на расстоянии 5 радиусов заряда от центра взрыва, оказываются порядка 230 и 70 *кг/см*^{2} соответственно, что свидетельствует о наличии весьма значительных касательных напряжений при этих условиях. (Измерения проводились по схеме, описанной в работе [1]).

Система уравнений, предложенная в работах [1,2], и была предназначена для описания движений грунтов, содержащих незначительное количество воды в порах.

В предлагаемой заметке строится полная система уравнений для описания движений грунтов, пригодная при любом их влагосодержании и переходящая в предельных случаях в уравнения идеальной жидкости с уравнением состояния Г. М. Ляхова при почти полностью насыщенных водой порах и в уравнения работ [1,2] при стремящемся к нулю водосодержании.

Будем исходить из того, что все известные экспериментальные данные, связанные с исследованием распространения взрывных волн в грунтах (полностью водонасыщенных, средней водонасыщенности и практически сухих), обладают одним существенным свойством — при обработке в соответствующих безразмерных переменных результатов опытов, проведенных в различных масштабах с соблюдением геометрического подобия, получаются универсальные зависимости. Это означает, что система уравнений, выбираемая для описания рассматриваемых явлений, должна содержать постоянные параметры, имеющие размерность только плотности и давления. Свойство вязкости и другие, подобные ему свойства грунта, оказываются несущественными. Это означает, что основные представления, принятые при выводе системы уравнений в работах [1,2], могут быть сохранены и при построении системы уравнений, учитывающей произвольную степень водонасыщенности грунта.

Именно, будем считать, что система уравнений работы [2] сохраняет свой вид и для водосодержащих грунтов, однако функции

$$p = f(\rho, \rho_*), \qquad I_2 = F(p), \qquad G = G(\rho_*) \tag{1}$$

должны быть заменены функциями, зависящими от определенной меры водосодержания, которую обозначим W (в качестве W может быть, например, взято процентное содержание массы воды в единице массы грунта), т. е. функциями

$$p = f(\rho, \rho_*, W), \qquad I_2 = F(p, W), \qquad G = G(\rho_*, W) \tag{2}$$

Величина W будет, вообще говоря, функцией координат и времени (это новая неизвестная функция). Поэтому система уравнений работы [2], в которой вместо соотношений (1), написаны соотношения (2), становится незамкнутой. Ее должно замкнуть уравнение, выражающее закон изменения W. Если ограничиться рассмотрением достаточно быстропротекающих процессов (например, процессов распространения волн от взрыва или удара), то можно считать, что в малой частице грунта в процессе ее движения сохраняется начальное содержание воды, ибо из-за кратковременности процесса вода не успевает переместиться в порах относительно минерального скелета. Перемещение жидкости в порах грунтов вследствие малости размеров пор, тормозящего действия сил поверхностного натяжения жидкости и наличия вязкости представляет собой медленный процесс, который в теории фильтрации описывается уравнениями параболического типа.

Поэтому при рассмотрении быстрых процессов сформулированное выше предположение можно считать обоснованным. Принятие этого предположения немедленно приводит к уравнению

$$\frac{dW}{dt} \equiv \frac{\partial W}{\partial t} + v_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

которое замыкает систему уравнений.

Если в рассматриваемой задаче начальная влажность $W_0(x, y, z)$ постоянна во всех частицах, то уравнение (3) становится тривиальным, а полная система уравнений переходит в систему работы [2], ибо в соотношениях (2) следует в этом случае просто положить $W = \mathrm{const} = W_0$. Если же начальная влажность меняется от слоя к слою, то уравнение (3) становится существенным, и полная система уравнений будет сложнее системы работы [2].

Отметим, что в естественных условиях последний случай является достаточно типичным: водосодержание грунта обычно растет с глубиной от практически сухого грунта на дневной поверхности до полностью водонасыщенного грунта ниже уровня грунтовых вод.

Зависимость p, F и G от W должна определяться из эксперимента. Схемы опытов, предложенные в [1,2], позволяют, вообще говоря, определить зависимость p и F от W, производя опыты с грунтами различного водонасыщения. Зависимость G от W можно определять из опытов по измерению скоростей звука в грунтах различного водонасыщения. Г. В. Рыковым и автором были по схеме работы [2] проведены некоторые предварительные статические опыты по определению зависимости $p = f(\rho, \rho_*)$ для песка, в которых менялась влажность грунта W. Опыты показали, что с возрастанием W кривая $p(\rho)$ при давлениях порядка нескольких атмосфер — нескольких десятков атмосфер — сначала опускается к оси ρ, т. е. сжимаемость грунта возрастает, а затем начинается деформирование этой кривой в обратную сторону. При некотором значении влажности кривая поднимается выше исходного ее положения, т. е. сжимаемость становится меньше первоначальной сжимаемости сухого песка. Все это, конечно, естественно. В самом деле, при малом содержании воды в грунте повышение влажности облегчает процесс сжатия образца, так как при этом вода играет в основном роль смазки между частичками грунта. С другой стороны, при значительном количестве воды в порах грунта повышение давления довольно скоро приводит к сокращению части объема пор, занятого воздухом, так что вода почти полностью занимает поры и начинает воспринимать вместе с минеральным скелетом внешнее давление. В результате сжимаемость грунта сильно падает, так как сжимаемости воды и минералов весьма малы.

При очень больших давлениях в сухом грунте поры также будут почти полностью ликвидированы, и сжимаемость его будет определяться сжимаемостью минеральных частиц. Увеличение влажности грунта приводит к понижению порога давления, выше которого сжимаемость определяется сжимаемостью только воды и минералов. При полном водонасыщении этот порог падает до незначительных величин. Ясно, что при давлениях, превышающих порог, необратимостью объемной деформации [1,2] можно пренебречь, так как эта необратимость связана с необратимым сокращением пор, которого выше указанного порога практически уже не происходит. Таким образом, влияние повышения влажности W на зависимость $p = p(\rho, \rho_*, W)$ качественно состоит в том, что уменьшается диапазон значений давления p, внутри которого имеют место необратимые объемные деформации, так что в пределе при почти полном водонасыщении эта зависимость переходит в уравнение состояния Г. М. Ляхова [3,4]. Аналогичное влияние оказывает возрастание W на функцию пластичности $F(p, W)$. Так как касательные напряжения в любой материальной среде, вообще говоря, ограничены сверху, то ясно, что при повышении давления p до очень больших величин функция $F(p, W)$ должна стремиться к некоторому пределу. В сухом грунте, как показывают эксперименты, этот предел достаточно высок (проведенные нами опыты с песком малой влажности естественного залегания показывают, что до $p \sim 130$ *кг/см²* функция $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = (2p + b)^2, \qquad b = 0.5 \text{ кг/см}^2.$$

С другой стороны, в почти полностью водонасыщенном песке касательные напряжения при давлениях порядка нескольких атмосфер или одного-полутора десятков атмосфер уже несущественны. Это и означает, что качественно влияние возрастания W на зависимость $I_2 = F(p, W)$ состоит в том, что предельное значение F и величина p, при котором это значение практически достигается, снижаются с ростом W. При этом будет, вообще говоря, меняться и вид зависимости F от p при меньших значениях p.

Таким образом, задачу построения модели грунта, учитывающей влияние влажности на его динамические характеристики, для случая быстрых движений можно считать решенной. Эта модель формально получается из модели работ [1,2] путем замены соотношений (1) соотношениями (2) и добавления уравнения (3). При $W \to 0$ она переходит в соотношения из [2], а при $W \to W_{\max}$ и не очень малых p — в соотношения идеальной жидкости с баротропным уравнением состояния из [3]. В этой модели имеются постоянные параметры, имеющие размерность только давления и плотности, что, как было отмечено, и должно иметь место для ее согласования с данными опытов.

Для рассмотрения медленных процессов при значительном водосодержании W соотношения этой модели, в частности уравнение (3), должны быть существенно изменены, с тем чтобы они учитывали процесс перемещения жидкости по порам относительно минерального скелета и связанное с этим уплотнение самого скелета (фильтрация и так называемая консолидация грунта), а также другие явления, обычно обсуждаемые в руководствах по механике грунтов.

Поступила 13 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 3.
2. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
3. Ляхов Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, 1959, № 1.
4. Ляхов Г. М. Взрывные волны в грунте и разжижение водонасыщенного песка. Сб. ученого совета по народнохозяйственному использованию взрыва, 1961, № 18.