

25. Lessen M., Sing P. J. The stability of axisymmetric free shear layers // J. Fluid Mech. — 1973. — V. 60, N 3.
 26. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука, 1977.

г. Новосибирск

Поступила 14/IV 1989 г.,
 в окончательном варианте — 27/IX 1989 г.

УДК 532.517.4

Г. А. Кузьмин

ЭВОЛЮЦИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ СГУСТКОВ

Модель турбулентного течения — набор малых вихрей. Вследствие гидродинамических неустойчивостей в турбулентных течениях образуются сгустки завихренности. Их эволюция во времени определяется нелинейной динамикой завихренности внутри вихрей, а также их взаимодействием между собой.

Возможность раздельного рассмотрения внутренних и внешних степеней свободы зависит от коэффициента перемежаемости $\kappa = \lambda/l$ (λ — характерный размер вихрей, l — расстояние между ними). Если $\kappa \rightarrow 0$, то вихри взаимодействуют лишь через посредство импульсов, а другие внутренние степени свободы несущественны [1, 2].

При $\kappa \neq 0$ во взаимодействии вихрей участвуют другие мультипольные моменты. В свою очередь, их эволюция определяется не только воздействием окружения на каждый конкретный вихрь, но и нелинейной динамикой всех внутренних степеней свободы, набор которых не исчерпывается мультипольными моментами [2, 3].

Влияние окружения вихря на его внутренние степени свободы при $\kappa \ll 1$ аналогично воздействию некоторого неоднородного внешнего поля скорости. Следовательно, полная система уравнений для набора малых вихревых сгустков разбивается на подсистемы. Каждая из подсистем описывает какой-либо из вихрей во внешнем поле, которое индуцируется другими вихрями. Цель настоящей работы — вывод такой подсистемы уравнений и анализ ее решений.

Вихревой сгусток во внешнем поле в безграничной несжимаемой жидкости. Поле завихренности удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad \partial\omega/\partial t - \nu\Delta\omega = (\omega\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla)\omega.$$

Для приближенного решения (1) используется метод Галеркина. Выбор базиса разложения основан на следующих соображениях.

Вихревые сгустки в турбулентных течениях представляют собой некоторые нерегулярные диффузные образования. Если число Рейнольдса Re , найденное по параметрам сгустка, мало, то эволюция вихря определяется в основном вязкостью. Поэтому естественным базисом разложения служит набор решений линеаризованного уравнения (1).

При больших Re внутри вихрей разовьются турбулентные пульсации широкого спектра масштабов. Для их детального описания потребовалось бы учесть большое число членов разложения, какую бы систему функций ни выбрать за базис. Для целей настоящей работы наиболее существенны крупномасштабные деформации вихрей, которые влияют на их взаимодействие. Мелкомасштабные пульсации играют роль резервуара, куда стекает энергия. Их влияние можно учесть с помощью коэффициента эффективной вязкости $\nu_{эф}$. Значение $Re_{эф}$, построенное по эффективной вязкости, уже не столь велико, как Re , и за базис разложения можно выбрать решения линеаризованного уравнения (1), в котором выполнена замена ν на $\nu_{эф}$.

Мультипольные моменты вихрей и такие важные физические характеристики, как вихревой импульс и момент импульса, простыми равенствами связаны с коэффициентами разложения по базису. Это служит дополнительным аргументом в пользу выбранной базисной системы функций.

Некоторые частные решения линеаризованного уравнения (1) (в специальной системе координат) исследованы в [4]. Эти решения выражаются через ортогональные полиномы Эрмита. Общее решение линеаризован-

ных уравнений (1) выразится в ковариантной форме через тензорные полиномы Эрмита, которые определяются равенствами [5]

$$(2) \quad H_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) = (-\lambda)^n \exp\left(\frac{r^2}{\lambda^2}\right) \frac{\partial^n \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)}{\partial r_{i_1} \dots \partial r_{i_n}}.$$

Полиномы (2) удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$(3) \quad \frac{1}{\pi^{3/2} \lambda^3} \int H_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) H_{j_1 \dots j_m}^{(m)}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right) dV = 2^n \delta_{nm} \Delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n},$$

где $\Delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$ — сумма всевозможных произведений символов Кронекера вида

$$\Delta_i^j = \delta_{ij}, \quad \Delta_{il}^{jm} = \delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{lj} \dots$$

Общее решение уравнения (1) ищется как разложение

$$(4) \quad \omega_i(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{r}, t) = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2}\right)}{\pi^{3/2} \lambda^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} c_{i_1 \dots i_n}^n(\boldsymbol{\xi}, t) H_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)$$

($\boldsymbol{\xi}$ — координаты центра вихря, $\lambda(t)$ — его масштаб). Точное определение $\boldsymbol{\xi}$, λ дается ниже. С помощью соотношений ортогональности (3) тензоры c выражаются через моменты завихренности

$$(5) \quad c_{i_1 \dots i_n}^n(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\lambda^n}{2^n n!} \int \omega_i(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{r}, t) H_{i_1 \dots i_n}^{(n)}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) dV.$$

Из $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ следует

$$(6) \quad c_{i_1 \dots i_n}^n + c_{i_1 i_2 \dots i_n}^{i_1} + \dots + c_{i_1 \dots i_{n-1} i}^{i_n} = 0.$$

Приближение настоящей работы состоит в том, что в сумме (4) явно учитывается лишь некоторое конечное число слагаемых N . Если имеется интенсивное мелкомасштабное движение, которое описывается членами суммы (4) с $n > N$, оно учитывается неявно, с помощью коэффициента эффективной вязкости. Величина эффективной вязкости оценивается из сопоставления с экспериментом. Данный прием известен в литературе по вычислительной гидродинамике как моделирование движений подсеточных масштабов.

Разложение (4) подставляется в (1), и выполняется проектирование на первые N членов базиса. Затем решается полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Вихревой сгусток рассматривается в сопутствующей системе отсчета, в которой $\boldsymbol{\xi} = 0$. При $N = 3$ система уравнений для моментов имеет вид

$$(7) \quad \frac{dp_i}{dt} = e_{ijm} \sum_{n=1}^3 c_{i_1 \dots i_n}^m \frac{\partial^n U_j}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0};$$

$$(8) \quad e_{ijm} \frac{dc_{kj}^m}{dt} = \frac{3}{2} \left(b_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} b_{jj} \right);$$

$$(9) \quad e_{ijm} \frac{dc_{klj}^m}{dt} + \frac{2}{3} \left(\lambda \frac{d\lambda}{dt} - 2\nu \right) \left(p_i \delta_{kl} - \frac{1}{4} p_k \delta_{il} - \frac{1}{4} p_l \delta_{ik} \right) = \\ = \frac{\lambda^5}{6} \left(B_{kl}^i - \frac{1}{4} B_{\nu k}^{\nu} \delta_{il} - \frac{1}{4} B_{\nu l}^{\nu} \delta_{ik} \right),$$

где U — внешнее поле скорости; $p_i = e_{ijm} c_j^m$ — вихревой импульс; b_{ik} , B_{kl}^i — квадратичные формы относительно моментов

$$b_{ik} = e_{ijl} \sum_{n=1}^3 c_{i_1 \dots i_n}^l \left(\frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial^{n+1} U_j}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n} \partial \xi_r} + n \delta_{i_n k} \frac{\partial^{n-1} U_j}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_{n-1}}} \right) \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[-\frac{l}{15\lambda^5} c_i^m c_k^m + \frac{1}{35\lambda^5} (6c_i^m c_{vvk}^m + 6c_k^m c_{vvi}^m + 12c_v^m c_{vik}^m + 21c_m^i c_{vvm}^h + \right. \\
& \quad + 21c_m^h c_{vvm}^i - 4c_{ih}^m c_{vv}^m - 8c_{vi}^m c_{vk}^m - 7c_{\mu\mu}^i c_{vv}^h - 14c_{\mu\nu}^i c_{\mu\nu}^h) - \\
& \quad \left. - \frac{1}{7\lambda^7} (2c_{ivv}^m c_{k\mu\mu}^m + 9c_{\mu\mu}^i c_{vvm}^h + 4c_{ihv}^m c_{\mu\nu}^m + 4c_{i\mu\nu}^m c_{k\mu\nu}^h + 6c_{\mu\nu\sigma}^i c_{\mu\nu\sigma}^h) \right], \\
& B_{hl}^i = e_{ijm} \left[c_\mu^m \left(\lambda^2 \frac{\partial^3 U_j}{\partial \zeta_h \partial \zeta_l \partial \zeta_\mu} + 2\delta_{\mu l} \frac{\partial U_j}{\partial \zeta_h} + 2\delta_{\mu h} \frac{\partial U_j}{\partial \zeta_l} \right) + \right. \\
& \quad + c_{\mu\nu}^m \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 U_j}{\partial \zeta_\mu \partial \zeta_\nu \partial \zeta_h \partial \zeta_l} + 4\delta_{\nu l} \frac{\partial^2 U_j}{\partial \zeta_\mu \partial \zeta_h} + 4\delta_{\nu h} \frac{\partial^2 U_j}{\partial \zeta_\mu \partial \zeta_l} + \frac{8}{\lambda^2} \delta_{\nu h} \delta_{\mu l} U_j \right) + \\
& \quad + c_{\mu\nu\sigma}^m \left(\lambda^2 \frac{\partial^5 U_j}{\partial \zeta_\mu \partial \zeta_\nu \partial \zeta_\sigma \partial \zeta_h \partial \zeta_l} + 6\delta_{\mu h} \frac{\partial^3 U_j}{\partial \zeta_\nu \partial \zeta_\sigma \partial \zeta_l} + 6\delta_{\mu l} \frac{\partial^3 U_j}{\partial \zeta_\nu \partial \zeta_\sigma \partial \zeta_h} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{24}{\lambda^2} \delta_{\mu k} \delta_{\nu l} \frac{\partial U_j}{\partial \zeta_\sigma} \right) \Big] \Big|_{\xi=0} + \frac{2}{105(2\pi)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{\lambda^5} [42(c_k^m c_{im}^i + c_l^m c_{km}^i) + 154c_m^i c_{kl}^m + \right. \\
& \quad + 21(c_k^i c_{vv}^l + c_l^i c_{vv}^k)] + \frac{1}{\lambda^7} [-45(c_{vv}^h c_{\mu\mu l}^i + c_{vv}^l c_{\mu\mu k}^h) - 162c_{kl}^m c_{vvm}^i + \\
& \quad + 72c_{kl}^m c_{ivv}^m + 180(c_{\mu k}^m c_{\mu ml}^i + c_{\mu l}^m c_{\mu mk}^i) - 72c_{vv}^m c_{ihl}^m - 81(c_{vv}^i c_{k\mu\mu}^l + c_{vv}^h c_{l\mu\mu}^i) + \\
& \quad \left. + 324c_{vm}^i c_{vhl}^m - 144c_{iv}^m c_{vhl}^m + 90(c_{km}^i c_{vvm}^l + c_{lm}^i c_{vvm}^h) \right] \Big|.
\end{aligned}$$

Система (7)–(9) состоит из 39 скалярных уравнений. В силу (6) и условий симметрии лишь 26 из них независимы. Свойства решений системы уравнений целесообразно проиллюстрировать на простом частном примере, в котором число независимых уравнений невелико из-за дополнительных свойств симметрии вихря.

Симметричные колебания вихря. Предположим, что вихревые линии инвариантны относительно отражений в плоскостях (x, z) , (y, z) :

$$\begin{aligned}
(10) \quad \omega_x(x, y, z) &= \omega_x(-x, y, z) = -\omega_x(x, -y, z), \\
\omega_y(x, y, z) &= -\omega_y(-x, y, z) = \omega_y(x, -y, z), \\
\omega_z(x, y, z) &= -\omega_z(-x, y, z) = -\omega_z(x, -y, z).
\end{aligned}$$

С использованием (5), (6), (10) отличные от нуля компоненты тензорных моментов выражаются через шесть независимых функций $\varepsilon, c, k, d, l, f$:

$$\begin{aligned}
(11) \quad c_{yz}^x &= \varepsilon, \quad c_{xz}^y = c, \quad c_{xy}^z = -\varepsilon - c, \quad c_{xxy}^x = -k, \quad c_{yzz}^x = -l, \quad c_{yzy}^x = -3d, \\
c_{xxx}^y &= 3k, \quad c_{xyy}^y = d, \quad c_{xzz}^y = f, \quad c_{xuz}^z = (l - f)/2.
\end{aligned}$$

Если выполнены условия (10), вихревой импульс \mathbf{p} направлен по оси z , а момент вихревого импульса равен нулю.

Чтобы замкнуть систему уравнений, положение центра вихря и его масштаб надо связать с моментами распределения завихренности. Используются определения для ζ [6] и λ :

$$(12) \quad \zeta_z = \frac{1}{2p} \int [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}]_z z dV;$$

$$(12)' \quad \lambda^2 = \frac{1}{4p} \int [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}]_z (x^2 + y^2) dV.$$

Если начало координат поместить в центр завихренности, то $\xi = 0$. Соотношение (12)' эквивалентно $k + d = 0$. Если функции (11), (12) известны, поле завихренности восстанавливается по формуле (4).

Смысл параметров (11) определяется видом подынтегральных выражений в (5). Параметр $l + f$ дает продольную протяженность вихря. Если $k - d \neq 0$, то вихрь сплюснут либо по оси x , либо по оси y в зависимости от знака $k - d$. При $l - f \neq 0$ в сечении плоскостями xz , yz

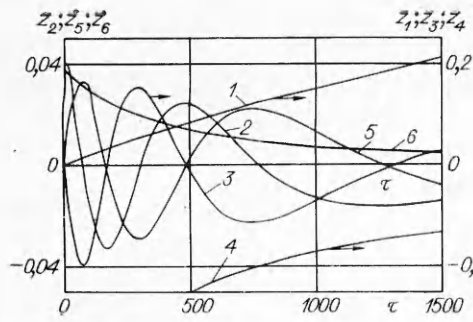


Рис. 1

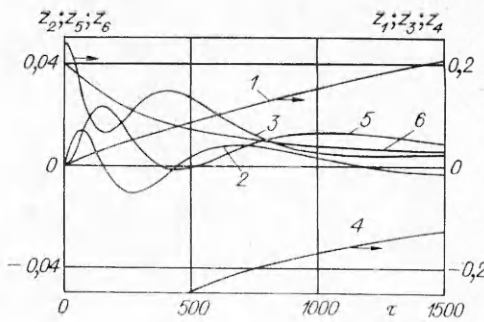


Рис. 2

вихрь подобен либо эллипсу, либо бабочке. Если, кроме того, $c \neq 0$, то эллипс превращается в изогнутый банан. В нестационарных вихрях все эти конфигурации сменяются в определенной последовательности.

Стационарные решения. В невязкой жидкости имеется аналитическое стационарное решение, в котором все вихревые линии — кольца: $k = d = c = \varepsilon = 0$, $l = f = \text{const}$, $\lambda = \lambda_0$. Скорость вихря определяется его импульсом, радиусом и продольным масштабом.

Вихрь, близкий сферическому вихрю Хилла, получится, если соотношения (11), (12) положить равными соответствующим моментам вихря Хилла [1]. Прямое вычисление интегралов дает $\varepsilon = c = k = d = l = f = 0$, $\lambda^2 = (2/7)a^2$ (a — радиус вихря Хилла). Вихрь движется со скоростью $7^{3/2}p/[15(4\pi)^{3/2}a^3]$, которая на 20 % больше скорости вихря Хилла.

Легко получить другие стационарные решения, подобные изогнутым вихревым кольцам. Эти решения не выписываются, поскольку неясно, какие из них сохраняются в пределе бесконечно точной аппроксимации. Среди стационарных решений могут существовать конфигурации, которые подобно вихрям двумерной гидродинамики [7] перемещаются в пространстве без изменения формы.

Колебания вихрей. Характер эволюции вихря в вязкой жидкости зависит от значения $R = p/(\lambda_0^2 \nu)$. При $R < \sim 10^3$ начальные деформации затухают монотонно.

Рис. 1—4 иллюстрируют, что при достаточно больших R уравнения имеют осциллирующие решения. Линии 1—6 отвечают безразмерным функциям

$$z_1 = (\lambda/\lambda_0 - 1)/4, \quad z_2 = c/(\lambda p), \quad z_3 = 12k/(\lambda^2 p), \\ z_4 = 3(l + f)/(2\lambda^2 p), \quad z_5 = 3(l - f)/(2\lambda^2 p), \quad z_6 = -U\lambda^3/p$$

(U — самоиндуцированная скорость вихря). Внешняя скорость предполагается равной нулю. По оси абсцисс отложено безразмерное время $\tau = tp/\lambda_0^4$. На рис. 1—3 $R = 2500$.

Если в начальный момент времени задан малый квадрупольный момент z_2 , то линии 1—6 близки к аналитическому решению линеаризованной (по амплитуде деформаций) системы уравнений, которое выражается через функции Бесселя (см. рис. 1). В невязкой жидкости z_2, z_3, z_5 синусоидальны, а z_1, z_4, z_6 постоянны.

На рис. 2 приведено численное решение уравнений, если в начальный момент времени вихревые линии имеют эллиптическую форму (мал, но отличен от нуля $z_3(0)$). Вся картина колебаний смещена вдоль оси ординат. В этом отношении диффузные вихри ведут себя иначе, чем тонкие вихревые кольца, для которых смещение осцилляций вдоль оси ординат отсутствует [8].

Рис. 3 иллюстрирует влияние нелинейности на период и форму колебаний. С увеличением амплитуды период колебаний растет. Пики функции z_2 становятся похожими на зубья пилы. Напротив, пики функ-

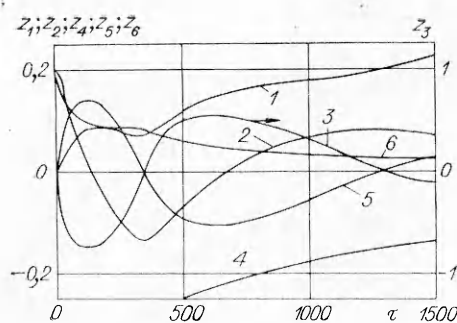


Рис. 3

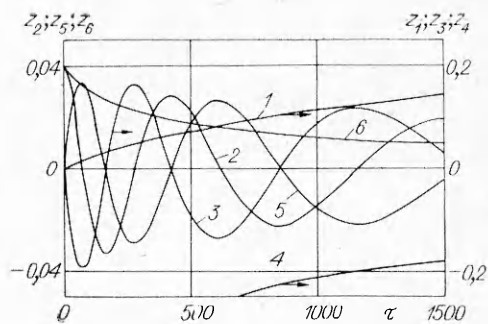


Рис. 4

ций z_3, z_5 затуплены вблизи вершин. Колебания большой амплитуды оказывают заметное влияние на зависимость скорости и масштаба вихря от времени.

На рис. 4 показаны затухающие колебания турбулентного кольца. Влияние мелкомасштабной турбулентности учитывается с помощью коэффициента турбулентной вязкости, который из соображений размерности полагается равным br/λ^2 . Сравнение рассчитанных значений скорости роста масштаба вихря и его скорости движения с экспериментальными данными [9, 10] позволяет оценить эмпирическую константу b . На рис. 4 $b = 4 \cdot 10^{-4}$, $R = 10^6$. Таким образом, число Рейнольдса, определенное по турбулентной вязкости, оказывается достаточно большим, чтобы осуществился колебательный режим затухания деформаций турбулентного вихря.

Взаимодействующие вихри. Система уравнений для ансамбля вихрей состоит из подсистем. Каждая из подсистем имеет вид (7)–(9) и описывает эволюцию параметров и координат какого-либо из вихрей. Взаимодействие осуществляется через неоднородную скорость, которую индуцирует вихревая система в месте нахождения данного вихря. Эта скорость дается мультипольным разложением, в котором отбрасываются слагаемые выше третьего порядка. Уравнения Робертса [2] следуют из (7)–(9), если вязкость и параметр перемежаемости устремить к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
2. Roberts P. H. A Hamiltonian theory for weakly interacting vortices // *Mathematika*.— 1970.— V. 19, N 1.
3. Кузьмин Г. А., Паганинский А. З. Тензорные характеристики когерентных вихревых структур // *ПМТФ*.— 1986.— № 5.
4. Sattar A. About transverse vortex rings that can be used as elements of turbulence // *Bull. de la classe des sciences/Acad. Roy. Belg.*— 1984.— V. 67, N 7.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1966.
6. Saffman P. G. The velocity of viscous vortex rings // *Studies Appl. Math.*— 1970.— V. 49, N 1.
7. Дим Г., Забуеки Н. Стационарные V-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение // *Солитоны в действии*.— М.: Мир, 1981.
8. Viets H., Sforza P. M. Dynamics of bilaterally symmetric vortex rings // *Phys. Fluids*.— 1972.— V. 15, N 2.
9. Луговцов Б. А. О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси // *Некоторые проблемы математики и механики*.— Л.: Наука, 1970.
10. Maxworthy T. Turbulent vortex rings // *J. Fluid Mech.*— 1974.— V. 64, N 2.

г. Новосибирск

Поступила 9/III 1989 г.,
в окончательном варианте — 2/X 1989 г.