

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

С. В. Левяков

СибНИА им. С. А. Чаплыгина, 630051 Новосибирск

В геометрически нелинейной постановке рассматривается задача о нагружении внешним давлением тонкостенной упругой трубы (тороидальной оболочки). На основе численного алгоритма исследуется нелинейное деформирование и устойчивость состояний равновесия оболочки в области значительных формоизменений ее поперечного сечения. Приводятся результаты по определению критических давлений с учетом моментного докритического состояния криволинейных труб, которые сравниваются с приближенным решением.

Линейная устойчивость длинных криволинейных труб кругового поперечного сечения при действии внешнего давления рассмотрена в [1, 2], где получены приближенные решения задачи, позволяющие определить критическое давление в зависимости от геометрических характеристик трубы. При построении решений не учитывалась докритическая деформация поперечных сечений и использовалось допущение о малости радиуса поперечного сечения по сравнению с радиусом кривизны осевой линии трубы.

Представляет интерес исследовать задачу устойчивости труб в геометрически нелинейной постановке с учетом моментного докритического напряженно-деформированного состояния, оценить влияние геометрических параметров на величину критической нагрузки, а также исследовать формы равновесия в области больших перемещений.

Рассмотрим трубу, представляющую собой сектор тонкостенной упругой тороидальной оболочки, подчиненной гипотезам Кирхгофа — Лява. Принимается [1, 2], что в деформированном состоянии оболочка является тороидальной, поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к осевой линии и могут деформироваться в своей плоскости. На основе этих предположений в [3, 4] выведены геометрически нелинейные соотношения и разработана конечно-элементная модель оболочки. Геометрия поперечного сечения определена узловыми значениями координат и направляющих косинусов единичных нормалей к контуру поперечного сечения.

Для нахождения деформированного состояния оболочки воспользуемся методом дискретного продолжения, основанным на пошаговом определении решения с его последующим итерационным уточнением. На каждом шаге строится решение, линеаризованное по отношению к найденному состоянию равновесия, которое затем уточняется из условия ортогональности вектора поправок вектору линеаризованного решения [5].

Для некоторого шага продолжения система уравнений метода Ньютона — Рафсона имеет вид

$$\mathbf{H}^{k-1} \delta \mathbf{q}^k + \mathbf{w}^{k-1} \delta p^k + \mathbf{g}^{k-1} = 0, \quad \delta \mathbf{q}^T = \delta[x_{11}, x_{21}, \varphi_1, \dots, x_{1n}, x_{2n}, \varphi_n, \varepsilon, \varkappa], \quad (1)$$

где  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{H}$  — градиент и матрица Гесса, составленные из коэффициентов первой и второй вариаций полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов [4]; компоненты вектора  $\mathbf{w}$  определяются формулой  $w_i = \partial^2 U / \partial q_i \partial p$ ,  $U$  — потенциал сил поверхностного

давления  $p$ , которое выступает в качестве равноправной неизвестной;  $x_{ij}$  — координаты узлов деформированного поперечного сечения;  $\varphi_j$  — углы поворота вектора нормали в плоскости поперечного сечения;  $\varepsilon$  и  $\varkappa$  — деформация и искривление осевой линии оболочки;  $n$  — число узлов; верхний индекс указывает номер итерации.

Система (1) дополняется контрольными уравнениями [5]

$$(\delta \mathbf{q}^1)^T \delta \mathbf{q}^1 + (\delta p^1)^2 = \delta s^2 \text{ при } k = 1, \quad (\delta \mathbf{q}^k)^T \delta \mathbf{q}^k + \delta p^k \delta p^k = 0 \text{ при } k > 1 \quad (2)$$

( $\delta s$  — задаваемый шаг продолжения).

Решение системы (1) представляется в виде

$$\delta \mathbf{q}^k = \delta p^k \mathbf{u}^k + \mathbf{v}^k, \quad (3)$$

где  $\mathbf{u}^k$  и  $\mathbf{v}^k$  удовлетворяют системам уравнений

$$\mathbf{H}^{k-1} \mathbf{u}^k + \mathbf{w}^{k-1} = 0, \quad \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{v}^k + \mathbf{g}^{k-1} = 0. \quad (4)$$

Подстановка (3) в (2) с учетом  $\mathbf{g}^0 = 0$ ,  $\mathbf{v}^1 = 0$  приводит к формулам для вычисления приращения нагрузки

$$\delta p^1 = \pm \delta s / (1 + (\mathbf{u}^1)^T \mathbf{u}^1)^{1/2} \text{ при } k = 1, \quad \delta p^k = -(\mathbf{v}^k)^T \mathbf{u}^1 / (1 + (\mathbf{u}^k)^T \mathbf{u}^1) \text{ при } k > 1. \quad (5)$$

Знак в (5) определяет направление продолжения решения и на  $i$ -м шаге выбирается из условия (по  $i$  не суммировать)

$$(\delta \mathbf{q}_i^1)^T \delta \mathbf{q}_{i-1}^1 + \delta p_i^1 \delta p_{i-1}^1 > 0.$$

После каждой итерации новые значения неизвестных параметров вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_{ij}^{k+1} &= x_{ij}^k + \delta x_{ij}^{k+1}, & (\lambda_{ij}^n)^{k+1} &= (\lambda_{ij}^n)^k \cos \delta \varphi_j^{k+1} + \lambda_{ij}^k \sin \delta \varphi_j^{k+1}, \\ \varepsilon^{k+1} &= \varepsilon^k + \delta \varepsilon^{k+1}, & \varkappa^{k+1} &= \varkappa^k + \delta \varkappa^{k+1}, & p^{k+1} &= p^k + \delta p^{k+1}, \end{aligned}$$

где  $\lambda_{ij}^n$ ,  $\lambda_{ij}$  — направляющие косинусы нормальных и касательных единичных векторов к контуру поперечного сечения оболочки.

Вопрос об устойчивости найденных состояний равновесия решается путем проверки знакоопределенности матрицы  $\mathbf{H}^0$ . Такая информация может быть получена на прямом ходе метода Гаусса при решении систем (4).

Исследуем деформирование тороидальной оболочки, имеющей характеристики:  $r/h = 100$ ,  $kr = 0,5$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\mu = 165,2$ , где  $r$  — радиус поперечного сечения,  $k$  — кривизна осевой линии,  $h$  — толщина стенки,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu = \sqrt{12(1 - \nu^2)} kr^2/h$  — параметр начальной кривизны. Рассмотрим формы равновесия, симметричные относительно плоскости кривизны осевой линии, при этом ограничения на возможность самопересечения поверхности оболочки не накладываются.

Как показывают расчеты, при сколь угодно малом уровне давления возникает искажение формы поперечного сечения вблизи линии нулевой гауссовой кривизны оболочки. На рис. 1 представлены кривые распределения нормального прогиба  $w$  по сечению оболочки, полученные с помощью рассмотренного численного алгоритма и по программе линейного анализа тороидальных оболочек BENDPAC [6]. Здесь  $\lambda = p/p_0$ ,  $p_0 = (1/4)E(1 - \nu^2)^{-1}(h/r)^3$  — критическое давление в прямой трубе. При  $\lambda > 6$  начинает заметно проявляться нелинейный характер деформирования: происходит перераспределение перемещений в поперечном сечении, и образуется локальная вмятина, развитие которой при возрастающей нагрузке до величины  $\lambda_* = 9,927$  приводит к потере устойчивости оболочки. Таким образом, в отличие от прямых труб [7], тороидальная оболочка теряет устойчивость при достижении предельной точки.

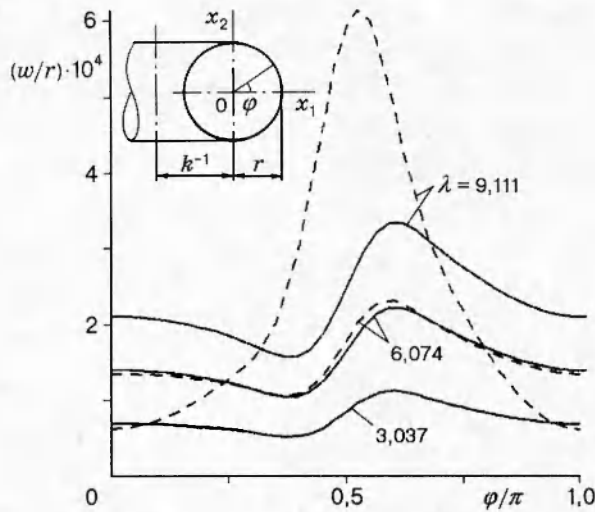


Рис. 1. Распределение нормального прогиба в сечении оболочки: сплошные линии — линейное решение, штриховые — нелинейное

На рис. 2 приведены диаграммы равновесных состояний, где по осям абсцисс откладываются безразмерный прогиб при  $\varphi = \pi/2$  (а) и параметр искривления осевой линии оболочки  $\alpha = \sqrt{12(1-\nu^2)}\alpha r^2/h$  (б), а по осям ординат — параметр внешнего давления  $\lambda$ . На основной ветви нелинейного решения (линии I), проходящей через точку исходного недеформированного состояния, обнаружено 6 предельных точек. Формы поперечного сечения, соответствующие равновесным состояниям, отмеченным номерами на рис. 2, показаны на рис. 3.

Исследована также ветвь решений, изолированная от основной ветви (линии II), на которой имеется предельная точка (точка 7 на рис. 2, а). В качестве начального приближения для выхода на изолированную ветвь использовалось линейное решение задачи при  $\lambda > \lambda_*$ . Отмечается сходство форм деформирования поперечных сечений, соответствующих изолированной ветви (рис. 3, состояние 7), с формами сплющивания оболочки при чистом изгибе краевыми моментами. В обоих случаях поперечные сечения оболочек с большим

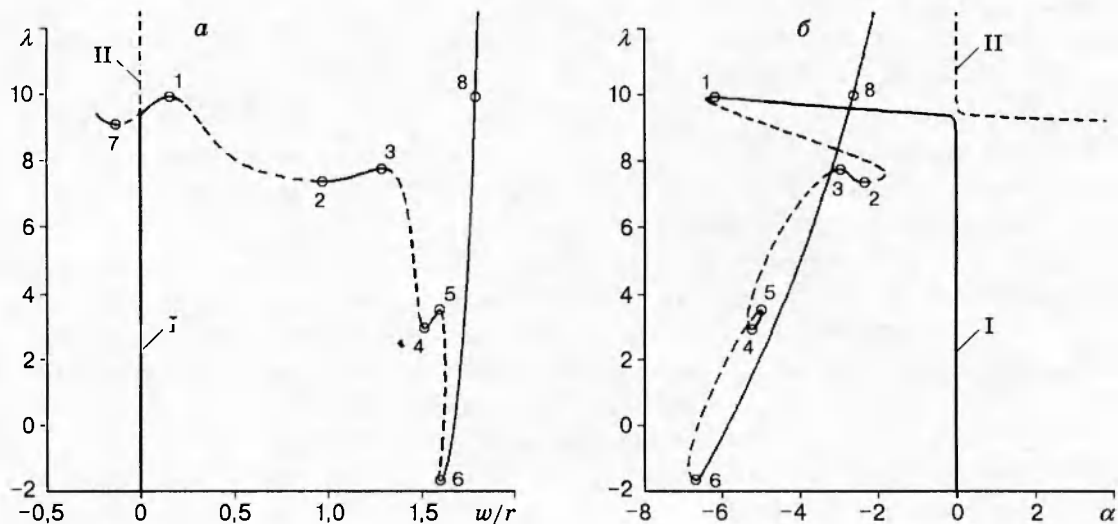


Рис. 2. Диаграммы равновесных состояний тороидальной оболочки: сплошные линии — устойчивые состояния, штриховые — неустойчивые

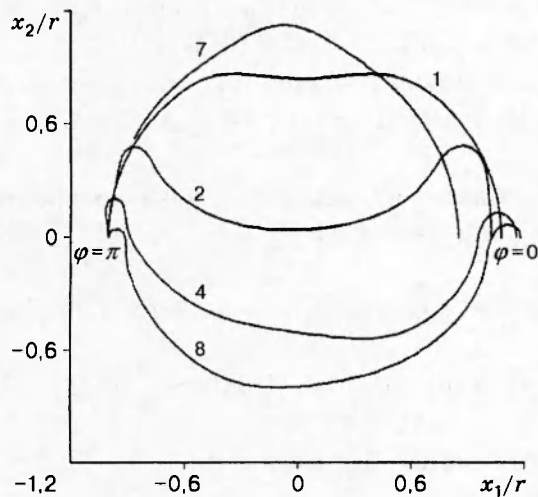


Рис. 3

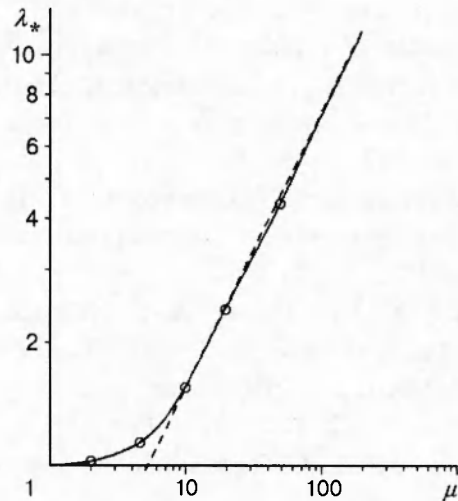


Рис. 4

Рис. 3. Формы поперечного сечения оболочки

Рис. 4. Зависимость параметра критического давления от параметра начальной кривизны трубы:

сплошная линия — численное решение; точки — приближенное решение [2]; штриховая линия — расчет по формуле (6)

значением параметра  $\mu$  деформируются за счет локального изгиба в окрестности линии нулевой гауссовой кривизны.

С целью выяснения влияния геометрических характеристик на устойчивость криволинейных труб рассматривались оболочки при значениях параметра  $r/h = 50, 100, 200$  и коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,3$ . Расчеты показывают, что изменения  $r, h$  и  $k$  при фиксированном значении  $\mu$  практически не сказываются на величине параметра критического давления  $\lambda_*$ . На рис. 4 представлена зависимость  $\lambda_*$  от параметра начальной кривизны  $\mu$ . Установлено, что при  $\mu > 10$  имеет место приближенное соотношение

$$\lambda_* = (1/3)\mu^{2/3}. \quad (6)$$

Интересно отметить, что приближенное решение [2], основанное на ряде существенных упрощений, обеспечивает достаточную точность при определении критических давлений в широком диапазоне изменения геометрических параметров труб.

Трубы с малыми значениями параметра кривизны  $\mu < 10$  также теряют устойчивость при переходе через предельную точку. При этом формы поперечного сечения в окрестности критической точки близки к овалу, большая ось которого лежит в плоскости кривизны трубы.

Автор выражает признательность Дж. Ф. Уотэму за предоставленную программу BENDPAC.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Костовецкий Д. Л. Об устойчивости равновесия кривой тонкостенной трубы кругового сечения, нагруженной наружным давлением // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 177–179.

2. Аксельрад Э. Л. Об устойчивости криволинейной трубы кругового сечения при внешнем давлении // Инж. журн. Механика твердого тела. 1967. № 2. С. 170–176.
3. Кузнецов В. В., Левяков С. В. Нелинейная задача Кармана для тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1992. № 2. С. 136–142.
4. Кузнецов В. В., Левяков С. В. Нелинейный изгиб тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения, нагруженных внутренним давлением // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 112–118.
5. Yang Y.-B., Shieh M.-S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points // AIAA J. 1990. V. 28. P. 2110–2116.
6. Whatham J. F. Pipe bend analysis by thin shell theory // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1986. V. 53, N 3. P. 173–180.
7. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 26/VIII 1996 г.,  
в окончательном варианте — 23/XII 1996 г.*

---