УДК 539.3

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ

Т. И. Белянкова, В. В. Калинчук

Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону, Россия
E-mails: tbelen415@mail.ru, kalin@ssc-ras.ru

Разработана математическая модель термоупругого неоднородного предварительно напряженного полупространства, представляющего собой пакет однородных или функционально-градиентных слоев, жестко сцепленных с однородным основанием. Каждая составляющая неоднородной среды подвергается воздействию начальных механических напряжений и температуры. В рамках теории наложения малых деформаций на конечные реализована последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики термоупругой среды с учетом ее неоднородности. Построены интегральные формулы, позволяющие исследовать динамические процессы в неоднородных предварительно напряженных термоупругих средах.

Ключевые слова: термоупругость, функционально-градиентный материал, предварительно напряженная термоупругая среда с покрытием, начальные напряжения, предварительный нагрев, трехмерная функция Грина.

DOI: 10.15372/PMTF20160509

Линейная теория термоупругости для предварительно напряженных тел в изотермическом и неизотермическом случаях развита в работах [1, 2]. В [3] построены определяющие соотношения и уравнения движения термоупругих тел при больших начальных деформациях и начальной температуре. В [4, 5] в линейном приближении исследовано влияние начальных напряжений на волновое поле на поверхности однородного трансверсально-изотропного термоупругого полупространства. В [6–8] в рамках линеаризованной теории изучено влияние предварительного нагрева и начальных механических воздействий на динамику однородной среды. В [6] построена трехмерная функция Грина для однородного термоупругого слоя, проведен анализ влияния начальных напряжений на его дисперсионные свойства. В [7] исследована смешанная задача о колебании однородного термоупругого слоя, в [8] — однородного термоупругого полупространства под действием тепловой нагрузки, имитирующей действие модулированного по частоте лазерного луча, получены распределения теплового потока в области контакта в зависимости от характера, вида и величины начальных воздействий. В [9] проведена линеаризация определяющих соотношений и уравнений движения нелинейной механики термоупругой однородной среды в предположении, что начальное напряженное состояние также однородно. В процессе линеаризации в разложении термодинамического потенциала оставлены члены четвертого порядка по деформациям и второго порядка по температуре. Такой подход возможен

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-01676).

при исследовании динамики однородных термоупругих материалов, однако при исследовании поведения составных структур или сред с неоднородным покрытием он значительно усложняет задачу. В настоящей работе, посвященной изучению неоднородных термоупругих материалов, при проведении линеаризации получены более простые и удобные линеаризованные определяющие соотношения и уравнения движения среды, позволяющие учитывать влияние как неоднородности начального напряженного состояния, так и неоднородности свойств материала на его термоупругие характеристики. Матрицы-функции Грина для предварительно напряженного термоупругого полупространства с неоднородным покрытием строятся на основе гибридного численно-аналитического метода [10–12], представляющего собой сочетание аналитических методов с численными схемами при построении решения и матричным подходом при удовлетворении граничных условий.

1. Постановка краевых динамических задач для термоупругих тел. Рассмотрим задачу о колебаниях термоупругой среды, занимающей некоторый объем V, ограниченный поверхностью $o = o_1 + o_2 = o_3 + o_4$. Введем в пространстве ортонормированный векторный базис декартовых координат $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. Обозначим через x_1, x_2, x_3 и X_1, X_2, X_3 соответственно лагранжевы и эйлеровы декартовы координаты. Набла-операторы, векторы основного и взаимного базисов задаются формулами

$$\nabla_0 = \boldsymbol{i}_m \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad \nabla = \boldsymbol{i}_m \frac{\partial}{\partial X_m}, \quad \boldsymbol{r} = x_k \boldsymbol{i}_k, \quad \boldsymbol{R} = X_k \boldsymbol{i}_k. \tag{1.1}$$

Пусть v — отсчетная конфигурация, связанная с естественным состоянием, V — актуальная конфигурация, связанная с начальным деформированным состоянием, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-векторы точки в начальном деформированном и естественном состояниях соответственно. Напряженно-деформированное состояние нелинейного термоупругого материала в естественном состоянии определяется тензором напряжений Пиолы

$$\Pi = P \cdot C, \qquad P = \chi_S, \tag{1.2}$$

тензором деформации Коши — Грина

$$S = (G - I)/2, \qquad C = \nabla_0 \boldsymbol{R}, \quad G = C \cdot C^{\mathrm{T}} \tag{1.3}$$

и удельной (на единицу объема) энтропией

$$\eta = -\chi_\theta. \tag{1.4}$$

Здесь C — градиент деформации; G — мера деформации Коши — Грина; θ — температура. Для описания тепловых характеристик материала используются определенные в метрике естественного состояния градиент температуры

$$\boldsymbol{g} = \nabla_0 \theta \tag{1.5}$$

и вектор потока тепла

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}(C, \theta, \boldsymbol{g}), \tag{1.6}$$

который в общем случае является нелинейной функцией [13, 14]. В настоящей работе используется его известное представление

$$\boldsymbol{h} = -\lambda \boldsymbol{g} \tag{1.7}$$

($\lambda = \lambda(C, \theta, \boldsymbol{g})$ — тензор коэффициентов удельной теплопроводности). Для материала гексагональной сингонии класса 6mm имеем $\lambda = \|\lambda_{kk}\|_{k=1}^3$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} \neq \lambda_{33}$.

Используемые в представлениях (1.2), (1.4) тензор χ_S и скалярная величина χ_θ являются производными термодинамического потенциала $\chi = \chi(S, \theta)$ [13, 14]. Краевая задача о колебаниях предварительно напряженной термоупругой среды в лагранжевых координатах описывается уравнениями

$$\nabla_0 \cdot \Pi = \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial t^2}; \tag{1.8}$$

$$\nabla_0 \cdot \boldsymbol{h} + \theta \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \tag{1.9}$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{n} \cdot \Pi\big|_{o_1} = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}, \quad \boldsymbol{R}\big|_{o_2} = \boldsymbol{R}^*, \quad \theta\big|_{o_3} = T^*, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}\big|_{o_4} = -h^*, \tag{1.10}$$

где ρ_0 — плотность недеформированного тела; $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности.

Пусть существует некоторое равновесное состояние термоупругого тела

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{r}), \qquad \theta = T_1(\boldsymbol{r}). \tag{1.11}$$

Согласно (1.8)–(1.10) уравнения статики внутри объема и на поверхности представим в виде

$$\nabla_0 \cdot \Pi_1 = 0, \qquad \nabla_0 \cdot \boldsymbol{h}_1 = 0; \tag{1.12}$$
$$\boldsymbol{n} \cdot \Pi_1\big|_{o_1} = \boldsymbol{t}^1_{\boldsymbol{n}}, \quad \boldsymbol{R}_1\big|_{o_2} = \boldsymbol{R}_1, \quad \theta\big|_{o_3} = T_1, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}_1\big|_{o_4} = h_1.$$

Рассмотрим малое возмущение равновесной конфигурации (1.11) [9, 13, 14]

$$\boldsymbol{R}^\times = \boldsymbol{R}_1 + \varepsilon \boldsymbol{u}, \qquad \theta^\times = T_1 + \varepsilon T, \tag{1.13}$$

где $\boldsymbol{u}$, T — добавочные вектор перемещений и температура; ε — малый параметр. Для тензора напряжений Пиолы, удельной энтропии и вектора потока тепла справедливы представления

$$\Pi^\times = \Pi_1 + \varepsilon \Pi^\bullet + o(\varepsilon^2), \quad \eta^\times = \eta_1 + \varepsilon \eta^\bullet + o(\varepsilon^2), \quad \boldsymbol{h}^\times = \boldsymbol{h}_1 + \varepsilon \boldsymbol{h}^\bullet + o(\varepsilon^2), \tag{1.14}$$

где точкой отмечены конвективные производные

$$f^\bullet = \frac{d}{d\varepsilon} f(\boldsymbol{R} + \varepsilon \boldsymbol{u}, T_1 + \varepsilon T)\big|_{\varepsilon=0}.$$

Параметры, определяющие возмущенное состояние термоупругого тела, должны удовлетворять уравнениям движения (1.8), (1.9)

$$\nabla_0 \cdot \Pi^\times + \rho_0 \boldsymbol{b}^\times = \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}^\times}{\partial t^2}, \qquad \nabla_0 \cdot \boldsymbol{h}^\times + \theta^\times \frac{\partial \eta^\times}{\partial t} = 0. \tag{1.15}$$

Подставляя соотношения (1.13), (1.14) в (1.15) и учитывая равновесность напряженного состояния (1.12), с точностью $o(\varepsilon^2)$ получаем линеаризованные в окрестности начального состояния (1.11) уравнения движения и теплопроводности

$$\nabla_0 \cdot \Theta = \nabla_0 \cdot \Pi^\bullet = \rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}; \tag{1.16}$$

$$\nabla_0 \cdot \boldsymbol{h}^\bullet + T_1 \frac{\partial \eta^\bullet}{\partial t} = 0. \tag{1.17}$$

Здесь

$$\Theta = \Pi^\bullet = P^\bullet \cdot C + P \cdot \nabla_0 \boldsymbol{u}; \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{h}^\bullet = \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial S} \circ S^\bullet + \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \theta} \theta^\bullet + \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{g}} \cdot \boldsymbol{g}^\bullet; \tag{1.19}$$

$$\eta^\bullet = \frac{\partial \eta}{\partial S} \circ S^\bullet + \frac{\partial \eta}{\partial \theta}\, \theta^\bullet; \tag{1.20}$$

$$P^\bullet = \frac{\partial P}{\partial S} \circ S^\bullet + \frac{\partial P}{\partial \theta}\, \theta^\bullet. \tag{1.21}$$

Символ “$\circ$” означает операцию полного умножения. При построении определяющих соотношений будем полагать, что состояние

$$S = 0, \qquad \theta = \theta_0 \tag{1.22}$$

является состоянием с минимальной свободной энергией. Оставляя в разложении функции $\chi = \chi(S, \theta)$ [13, 14] в окрестности состояния (1.22) члены второй степени по деформациям и отклонению температуры, получаем

$$\chi = \frac{1}{2}\, {}^4C^W \cdot\cdot\, S \cdot\cdot\, S - \frac{1}{2}\, C_\varepsilon \rho_0\, \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\theta_0} - {}^2Q \cdot\cdot\, S\, (\theta - \theta_0). \tag{1.23}$$

Здесь ${}^4C^W$ — тензор четвертого ранга упругих констант второго порядка; C_ε — удельная теплоемкость; ρ_0 — плотность материала; ${}^2Q$ — тензорный коэффициент термоупругости. Для материала гексагональной сингонии класса 6mm имеем ${}^2Q = \|q_{ii}\|_{i=1}^3$, $q_{11} = q_{22} \neq q_{33}$.

Тензорные константы термодинамического потенциала и удельной теплопроводности определяются по формулам

$${}^4C = C_{ijkl}\boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_l, \qquad Q = Q_{ij}\boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j, \qquad \lambda = \lambda_{ij}\boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j. \tag{1.24}$$

Добавляя выражение (1.23) в формулы (1.2), (1.4), получаем

$$P = {}^4C^W \cdot\cdot\, S - {}^2Q(\theta - \theta_0), \qquad \eta = \frac{C_\varepsilon \rho_0}{\theta_0}\,(\theta - \theta_0) + {}^2Q \cdot\cdot\, S; \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} = {}^4C^W, \qquad \frac{\partial P}{\partial \theta} = -{}^2Q, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{C_\varepsilon \rho_0}{\theta_0}. \tag{1.26}$$

Подставляя формулы (1.25), (1.26) в (1.18)–(1.20), учитывая (1.21), (1.2)–(1.7) и используя соотношения

$$\frac{\partial \eta}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\Big(-\frac{\partial \chi}{\partial \theta}\Big) = -\frac{\partial P}{\partial \theta}, \qquad S^\bullet = \frac{1}{2}\big(\nabla_0 \boldsymbol{u} \cdot C^{\mathrm{T}} + C \cdot \nabla_0 \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\big),$$
$$\theta^\bullet = T, \qquad \boldsymbol{g}^\bullet = \nabla_0 T,$$

получаем

$$\Pi^\bullet = ({}^4C^W \circ S^\bullet - {}^2Q\, T) \cdot C + P \cdot \nabla_0 \boldsymbol{u}; \tag{1.27}$$

$$\boldsymbol{h}^\bullet = -\lambda \cdot \nabla_0 T; \tag{1.28}$$

$$\eta^\bullet = {}^2Q \circ S^\bullet + \frac{C_\varepsilon \rho_0}{\theta_0}\, T. \tag{1.29}$$

Далее будем полагать, что начальное деформированное состояние в термоупругом материале определяется условиями

$$\boldsymbol{R} = \Lambda \cdot \boldsymbol{r}, \qquad \Lambda = \nu_k \boldsymbol{i}_k \boldsymbol{i}_k, \qquad \theta = T_1, \qquad \nu_k = \mathrm{const}, \qquad T_1 = \mathrm{const}, \tag{1.30}$$

где $\nu_k = 1 + \delta_k$; δ_k $(k = 1, 2, 3)$ — относительные удлинения волокон вдоль координатных осей, направление которых совпадает в естественной конфигурации с декартовыми координатами; T_1 — температура тела в начальном деформированном состоянии.

С учетом формул (1.1), (1.23), (1.24), (1.30) тензор напряжений, вектор потока тепла и удельную энтропию (1.27)–(1.29) представим в компонентной форме

$$\Theta = \Theta_{ij}\boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j = \Pi^*_{ij}\boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j, \qquad \boldsymbol{h}^\bullet = h^*_i\boldsymbol{i}_i,$$

$$\Theta_{ij} = \Big(C_{ijkl}\nu_k\,\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - q_{ij}T\Big)\nu_j + P_{ik}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = C^*_{ijkl}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - q^*_{ij}T; \tag{1.31}$$

$$h^*_i = -\lambda_{ii}\,\frac{\partial T}{\partial x_i}; \tag{1.32}$$

$$\eta^\bullet = q^*_{ii}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{C_\varepsilon\rho_0}{\theta_0}\,T. \tag{1.33}$$

Линеаризованные уравнения движения также запишем в компонентной форме

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(C^*_{ijkl}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - q^*_{ij}T\Big) = \rho_0\,\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \qquad j = 1,2,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\lambda_{ii}\,\frac{\partial T}{\partial x_i}\Big) - T_1q^*_{ii}\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big) - T_1\,\frac{C_\varepsilon\rho_0}{\theta_0}\,\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

В случае однородного напряженно-деформированного состояния (1.30) имеем

$$\begin{gathered} C = \nu_k\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_k, \qquad S = S_{kk}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_k, \qquad S_{kk} = \frac{1}{2}\,(\nu_k^2 - 1), \\ P = P_{kk}\boldsymbol{i}_k\boldsymbol{i}_k, \qquad P_{kk} = \frac{1}{2}\,C_{kkkk}(\nu_k^2 - 1) - (T_1 - \theta_0)q_{kk}. \end{gathered} \tag{1.34}$$

Коэффициенты C^*_{ijkl} и q^*_{ij} определяются следующим образом:

$$C^*_{ijkl} = C_{ijkl}\nu_k\nu_j + P_{il}\delta_{jk}, \qquad q^*_{ij} = q_{ij}\nu_j. \tag{1.35}$$

Из (1.35) следует, что при любом виде напряженно-деформированного состояния ($P_{ii} = P_i^0$, $i = 1,2,3$) симметрия исходного материала нарушается. Таким образом, использование обозначения Фойгта для представления матрицы связи в напряженно-деформированном состоянии недопустимо.

2. Постановка динамических задач для предварительно напряженного термоупругого полупространства с покрытием. Рассмотрим гармонические колебания неоднородной предварительно напряженной термоупругой среды, состоящей из пакета $M - 1$ однородных или функционально-градиентных термоупругих слоев $0 \leqslant x_3 \leqslant H$, $H = h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_M = 0$, $|x_1, x_2| \leqslant \infty$, лежащих в однородном полупространстве $x_3 \leqslant 0$, $|x_1, x_2| \leqslant \infty$. Будем полагать, что в качестве материалов покрытия используются термоупругие материалы, в естественном состоянии относящиеся к материалам гексагональной сингонии класса 6mm. Начальное деформированное состояние каждой составляющей среды однородно (1.30) и обусловлено действием начальных механических напряжений и температуры. Систему уравнений (1.16), (1.17) представим следующим образом:

$$\nabla_0 \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)}\ddot{\boldsymbol{u}}^{(n)}; \tag{2.1}$$

$$\nabla_0 \cdot \boldsymbol{h}^{(n)} + T_1^{(n)}\,\frac{\partial \eta^{(n)}}{\partial t} = 0. \tag{2.2}$$

Механические граничные условия на поверхности $o = o_1 + o_2$ запишем в виде

$$\boldsymbol{n} \cdot \Theta^{(1)} = \boldsymbol{f}^*\big|_{o_1}; \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}^*\big|_{o_2}, \tag{2.4}$$

тепловые граничные условия на поверхности $o = o_3 + o_4$ — в виде

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}^{(1)} = -h^* \big|_{o_3}; \tag{2.5}$$

$$T^{(1)} = T^* \big|_{o_4}. \tag{2.6}$$

В (2.1)–(2.6) $\boldsymbol{u}^*$, $\boldsymbol{f}^*$, $\boldsymbol{n}$ — соответственно векторы перемещений, напряжений и внешней нормали к поверхности среды, определенные в естественном состоянии (звездочкой отмечены заданные в соответствующей области величины); $\rho^{(n)}$ — плотность материала; $T^{(n)}$ — динамическая температура; h^*, T^* — поток тепла и температура соответственно; верхний индекс в скобках соответствует величинам, относящимся к n-му слою покрытия ($n = 1, \ldots, M-1$), индекс M — величинам, относящимся к полупространству. Для функционально-градиентных составляющих покрытия зависимость упругих и температурных параметров от координаты x_3 имеет вид

$$\rho^{(n)} = \rho_0^{(n)} f_\rho^{(n)}(x_3), \qquad C_{lksm}^{(n)} = C_{lksm}^{0(k)} f_c^{(k)}(x_3), \qquad q_{lk}^{(n)} = q_{lk}^{0(n)} f_q^{(n)}(x_3),$$
$$\lambda_{lk}^{(n)} = \lambda_{lk}^{0(n)} f_\lambda^{(n)}(x_3), \qquad C_\varepsilon^{(n)} = C_\varepsilon^{0(n)} f_{c\varepsilon}^{(n)}(x_3)$$

(индексом “0” отмечены константы соответствующего “опорного” материала).

С учетом принятых предположений и выражений (1.31)–(1.33) компоненты тензора $\Theta^{(n)}$, вектора $\boldsymbol{h}^{(n)}$ и функции $\eta^{(n)}$ определяются по формулам

$$\Theta_{lk}^{(n)} = C_{lksm}^{*(n)} u_{s,m}^{(n)} - q_{lk}^{*(n)} T^{(n)}, \quad h_i^{(n)} = -\lambda_{ii}^{(n)} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x_i}, \quad \eta^{(n)} = q_{sp}^{*(n)} u_{s,p}^{(n)} + \frac{\rho^{(n)}\, C_\varepsilon^{(n)}}{T_0} T^{(n)}, \tag{2.7}$$

где с учетом представления (1.35)

$$C_{lksp}^{*(n)} = P_{lp}^{(n)} \delta_{ks} + \nu_k^{(n)} \nu_s^{(n)} C_{lksp}^{(n)}, \qquad q_{lk}^{*(n)} = \nu_k^{(n)} q_{lk}^{(n)}, \tag{2.8}$$

индекс после запятой обозначает дифференцирование.

Введем расширенные векторы смещения $\boldsymbol{u}_\tau^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = T^{(n)}\}$, нагрузки $\boldsymbol{f}_\tau = \{f_1, f_2, f_3, f_4 = -h^*\}$ и обозначения

$$\theta_{lksp}^{(n)} = C_{lksp}^{*(n)}, \quad \theta_{lk44}^{(n)} = -q_{lk}^{*(n)}, \quad \theta_{4444}^{(n)} = -C_\varepsilon^{(n)} \rho^{(n)} (T_0)^{-1}, \quad k, l, s, p = 1, 2, 3. \tag{2.9}$$

С учетом формул (2.7), (2.8), (1.34) и свойств материала [15] матрица связи H в обозначениях (2.9) принимает вид

$$H = \left(\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & u_{1,1}^{(n)} & u_{2,2}^{(n)} & u_{3,3}^{(n)} & u_{2,3}^{(n)} & u_{3,2}^{(n)} & u_{1,3}^{(n)} & u_{3,1}^{(n)} & u_{1,2}^{(n)} & u_{2,1}^{(n)} & u_4^{(n)} \\
\hline
\Theta_{11}^{(n)} & \theta_{1111}^{(n)} & \theta_{1122}^{(n)} & \theta_{1133}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{1144}^{(n)} \\
\Theta_{22}^{(n)} & \theta_{1122}^{(n)} & \theta_{2222}^{(n)} & \theta_{2233}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{2244}^{(n)} \\
\Theta_{33}^{(n)} & \theta_{1133}^{(n)} & \theta_{2233}^{(n)} & \theta_{3333}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{3344}^{(n)} \\
\Theta_{23}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \theta_{2323}^{(n)} & \theta_{2332}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Theta_{32}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & \theta_{3223}^{(n)} & \theta_{2323}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Theta_{13}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{1313}^{(n)} & \theta_{1331}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\
\Theta_{31}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{3113}^{(n)} & \theta_{1313}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\
\Theta_{12}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{1212}^{(n)} & \theta_{1221}^{(n)} & 0 \\
\Theta_{21}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{2112}^{(n)} & \theta_{1212}^{(n)} & 0 \\
\hline
-\eta^{(n)} & \theta_{1144}^{(n)} & \theta_{2244}^{(n)} & \theta_{3344}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{4444}^{(n)}
\end{array} \right). \tag{2.10}$$

Следуя [4–7], перейдем к безразмерным переменным

$$
\begin{gathered}
x_i' = \frac{\omega^* x_i}{V_p^{(M)}}, \qquad u_i^{(n)\prime} = \frac{\rho^{(M)}\omega^* V_p^{(M)}}{q_{11}^{(M)} T_0}\, u_i^{(n)}, \qquad T^{(n)\prime} = \frac{T^{(n)}}{T_0},
\\
\omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \qquad \omega^* = \frac{C_\varepsilon^{(M)} C_{11}^{(M)}}{\lambda_{11}^{(M)}}, \qquad h_i^{(n)\prime} = \frac{V_p^{(M)}}{\omega^* T_0 \lambda_{11}^{(M)}}\, h_i^{(n)},
\\
\Theta_{ij}^{(n)\prime} = \frac{\Theta_{ij}^{(n)}}{q_{11}^{(M)} T_0}, \qquad \theta_{ijkl}^{(n)\prime} = \frac{\theta_{ijkl}^{(n)}}{C_{11}^{(M)}}, \qquad \theta_{kk44}^{(n)\prime} = \frac{\theta_{kk44}^{(n)}}{q_{11}^{(M)}}, \qquad \theta_{4444}^{(n)\prime} = \frac{\rho^{(n)} C_\varepsilon^{(n)}}{T_0 \rho^{(M)} C_\varepsilon^{(M)}},
\\
\lambda_{ij}^{(n)\prime} = \frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{\lambda_{11}^{(M)}} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \qquad E = \frac{T_0 (q_{11}^{(M)})^2}{\rho^{(M)} C_\varepsilon^{(M)} C_{11}^{(M)}}, \qquad E_T^{(n)} = E T_1^{(n)\prime}
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

(E, E_T — безразмерные нормирующие множители).

После подстановки выражений (2.7) в представления (2.1)–(2.6) с учетом формул (2.9)–(2.11) краевая задача для предварительно напряженного термоупругого полупространства с неоднородным покрытием в безразмерных параметрах принимает следующий вид:

— для однородных составляющих среды

$$
\begin{gathered}
L_{11}^*[u_1^{(n)}] + \theta_1^{(n)} u_{2,12}^{(n)} + \theta_2^{(n)} u_{3,13}^{(n)} + \theta_{1144}^{(n)} u_{4,1}^{(n)} = 0,
\\
\theta_1^{(n)} u_{1,12}^{(n)} + L_{22}^*[u_2^{(n)}] + \theta_3^{(n)} u_{3,23}^{(n)} + \theta_{2244}^{(n)} u_{4,2}^{(n)} = 0,
\\
\theta_2^{(n)} u_{1,13}^{(n)} + \theta_3^{(n)} u_{2,23}^{(n)} + L_{33}^*[u_3^{(n)}] + \theta_{3344}^{(n)} u_{4,3}^{(n)} = 0,
\\
i\omega E_T^{(n)} [\theta_{1144}^{(n)} u_{1,1}^{(n)} + \theta_{2244}^{(n)} u_{2,2}^{(n)} + \theta_{3344}^{(n)} u_{3,3}^{(n)}] - L_{44}^*[u_4^{(n)}] = 0;
\end{gathered}
\tag{2.12}
$$

— для функционально-градиентных составляющих покрытия

$$
\begin{gathered}
L_{11}^{*f}[u_1^{(n)}] + \theta_1^{(n)} u_{2,12}^{(n)} + L_{13}^{*f}[u_3^{(n)}] + \theta_{1144}^{(n)} u_{4,1}^{(n)} = 0,
\\
\theta_1^{(n)} u_{1,12}^{(n)} + L_{22}^{*f}[u_2^{(n)}] + L_{23}^{*f}[u_3^{(n)}] + \theta_{2244}^{(n)} u_{4,2}^{(n)} = 0,
\\
L_{31}^{*f}[u_1^{(n)}] + L_{32}^{*f}[u_2^{(n)}] + L_{33}^{*f}[u_3^{(n)}] + L_{34}^{*f}[u_4^{(n)}] = 0,
\\
i\omega E_T^{(n)} [\theta_{1144}^{(n)} u_{1,1}^{(n)} + \theta_{2244}^{(n)} u_{2,2}^{(n)} + \theta_{3344}^{(n)} u_{3,3}^{(n)}] - L_{44}^{*f}[u_4^{(n)}] = 0.
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

Линеаризованные граничные условия имеют вид

$$
\Sigma_k^{(1)}\big|_{x_3=h,\ (x_1,x_2)\in o_1} = f_k(x_1, x_2), \quad u_k^{(1)}\big|_{x_3=h,\ (x_1,x_2)\in o_2} = u_k^*(x_1, x_2), \quad k = 1, 2, 3; \tag{2.14}
$$

$$
\lambda_{33}^{(1)} u_{4,3}^{(1)}\big|_{x_3=h,\ (x_1,x_2)\in o_3} = f_4(x_1, x_2), \qquad u_4^{(1)}\big|_{x_3=h,\ (x_1,x_2)\in o_4} = T^*(x_1, x_2); \tag{2.15}
$$

$$
\begin{gathered}
\Sigma_k^{(n)}\big|_{x_3=h_k} = \Sigma_k^{(n+1)}\big|_{x_3=h_k}, \qquad u_k^{(n)}\big|_{x_3=h_k} = u_k^{(n+1)}\big|_{x_3=h_k},
\\
k = 1, \ldots, 4, \quad n = 2, \ldots, M-1;
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

$$
u_k^{(M)}\big|_{x_3\to-\infty} \to 0. \tag{2.17}
$$

В формулах (2.12)–(2.17)

$$
\theta_1^{(n)} = \theta_{1122}^{(n)} + \theta_{1212}^{(n)}, \qquad \theta_2^{(n)} = \theta_{1133}^{(n)} + \theta_{1313}^{(n)}, \qquad \theta_3^{(n)} = \theta_{2233}^{(n)} + \theta_{2323}^{(n)},
$$

$$L_{kk}^* = \theta_{ikki}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \rho^{(n)}\omega^2 \quad (k, i = 1, 2, 3), \qquad L_{44}^* = \lambda_{ii}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - i\omega T_1^{(n)} \theta_{4444}^{(n)}, \tag{2.18}$$

$$L_{kk}^{*f} = L_{kk}^* + \frac{\partial \theta_{3kk3}^{(n)}}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (k = 1, 2, 3), \qquad L_{44}^{*f} = L_{44}^* + \frac{\partial \lambda_{33}^{(n)}}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3};$$

$$L_{s3}^{*f} = (\theta_{ss33}^{(n)} + \theta_{s3s3}^{(n)}) \frac{\partial^2}{\partial x_s\, \partial x_3} + \frac{\partial \theta_{s3s3}^{(n)}}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_s},$$

$$L_{3s}^{*f} = (\theta_{ss33}^{(n)} + \theta_{s3s3}^{(n)}) \frac{\partial^2}{\partial x_s\, \partial x_3} + \frac{\partial \theta_{ss33}^{(n)}}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_s}, \qquad s = 1, 2, \tag{2.19}$$

$$L_{34}^{*f} = \theta_{3344}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta_{3344}^{(n)}}{\partial x_3};$$

$$\Sigma_\tau^{(n)} = \{\Sigma_k^{(n)}\}_{k=1}^4, \quad \Sigma_p^{(n)} = \Theta_{3p}^{(n)}, \quad \Sigma_4^{(n)} = -h_3^{(n)} = \lambda_{33}^{(n)} u_{4,3}^{(n)}, \quad p = 1, 2, 3. \tag{2.20}$$

Компоненты расширенного вектора $\Sigma_\tau^{(n)}$ (2.20) определяются по формулам

$$\Sigma_1^{(n)} = \Theta_{31}^{(n)} = \theta_{3113}^{(n)} u_{1,3}^{(n)} + \theta_{1313}^{(n)} u_{3,1}^{(n)},$$

$$\Sigma_2^{(n)} = \Theta_{32}^{(n)} = \theta_{3223}^{(n)} u_{2,3}^{(n)} + \theta_{2323}^{(n)} u_{3,2}^{(n)}, \qquad \Sigma_4^{(n)} = -h_3^{(n)} = \lambda_{33}^{(n)} u_{4,3}^{(n)},$$

$$\Sigma_3^{(n)} = \Theta_{33}^{(n)} = \theta_{1133}^{(n)} u_{1,1}^{(n)} + \theta_{2233}^{(n)} u_{2,2}^{(n)} + \theta_{3333}^{(n)} u_{3,3}^{(n)} + \theta_{3344}^{(n)} u_4^{(n)}.$$

3. Функция Грина для неоднородного предварительно напряженного термоупругого полупространства. Применим к задаче (2.12), (2.13) с граничными условиями (2.14)–(2.17) преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 (α_1, α_2 — параметры преобразования). В пространстве образов системы (2.12), (2.13) принимают вид

$$\begin{gathered}
L_{11}^\Lambda[U_1^{(n)}] - \alpha_1\alpha_2\theta_1^{(n)} U_2^{(n)} - i\alpha_1\theta_2^{(n)} U_3^{(n)\prime} - i\alpha_1\theta_{1144}^{(n)} U_4^{(n)} = 0,\\
-\alpha_1\alpha_2\theta_1^{(n)} U_1^{(n)} + L_{22}^\Lambda[U_2^{(n)}] - i\alpha_2\theta_3^{(n)} U_3^{(n)\prime} - i\alpha_2\theta_{2244}^{(n)} U_4^{(n)} = 0,\\
-i\alpha_1\theta_2^{(n)} U_1^{(n)\prime} - i\alpha_2\theta_3^{(n)} U_2^{(n)\prime} + L_{33}^\Lambda[U_3^{(n)}] + \theta_{3344}^{(n)} U_4^{(n)\prime} = 0,\\
\omega E_T^{(n)}(\alpha_1\theta_{1144}^{(n)} U_1^{(n)} + \alpha_2\theta_{2244}^{(n)} U_2^{(n)} + i\theta_{3344}^{(n)} U_3^{(n)\prime}) - L_{44}^\Lambda[U_4^{(n)}] = 0;
\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}
L_{11}^{\Lambda f}[U_1^{(n)}] - \alpha_1\alpha_2\theta_1^{(n)} U_2^{(n)} + L_{13}^{\Lambda f}[U_3^{(n)}] - i\alpha_1\theta_{1144}^{(n)} U_4^{(n)} = 0,\\
-\alpha_1\alpha_2\theta_1^{(n)} U_1^{(n)} + L_{22}^{\Lambda f}[U_2^{(n)}] + L_{23}^{\Lambda f}[U_3^{(n)}] - i\alpha_2\theta_{2244}^{(n)} U_4^{(n)} = 0,\\
L_{31}^{\Lambda f}[U_1^{(n)}] + L_{32}^{\Lambda f}[U_2^{(n)}] + L_{33}^{\Lambda f}[U_3^{(n)}] + L_{34}^{\Lambda f}[U_4^{(n)}] = 0,\\
\omega E_T^{(n)}(\alpha_1\theta_{1144}^{(n)} U_1^{(n)} + \alpha_2\theta_{2244}^{(n)} U_2^{(n)} + i\theta_{3344}^{(n)} U_3^{(n)\prime}) - L_{44}^{\Lambda f}[U_4^{(n)}] = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2)

$$L_{kk}^\Lambda = \theta_{3kk3}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \alpha_s^2 \theta_{skks}^{(n)} + \rho^{(n)}\omega^2, \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$L_{44}^\Lambda = \lambda_{33}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \alpha_s^2 \lambda_{ss}^{(n)} - i\omega T_1^{(n)} \theta_{4444}^{(n)}, \qquad s = 1, 2, \tag{3.3}$$

$$L_{kk}^{\Lambda f} = L_{kk}^\Lambda + \theta_{3kk3}^{(n)\prime} \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad L_{44}^{\Lambda f} = L_{44}^\Lambda + \lambda_{33}^{(n)\prime} \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad k, i = 1, 2, 3;$$

$$
\begin{gathered}
L_{s3}^{\Lambda f} = -i\alpha_s(\theta_{ss33}^{(n)} + \theta_{s3s3}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x_3} - i\alpha_s \theta_{s3s3}^{(n)\prime}, \\
L_{3s}^{\Lambda f} = -i\alpha_s(\theta_{ss33}^{(n)} + \theta_{s3s3}^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x_3} - i\alpha_s \theta_{ss33}^{(n)\prime}, \qquad s = 1, 2, \\
L_{34}^{\Lambda f} = \theta_{3344}^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_3} + \theta_{3344}^{(n)\prime}.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Для граничных условий имеем

$$
\Sigma_k^{\Lambda(1)} = F_k\big|_{x_3=h}, \qquad k = 1, \ldots, 4; \tag{3.5}
$$

$$
\Sigma_k^{\Lambda(n)} = \Sigma_k^{\Lambda(n+1)}\big|_{x_3=h_n}, \quad U_k^{(n)} = U_k^{(n+1)}\big|_{x_3=h_n}, \quad k = 1, \ldots, 4, \quad n = 2, \ldots, M-1; \tag{3.6}
$$

$$
U_k^{(M)}\big|_{x_3\to-\infty} \to 0, \tag{3.7}
$$

где $U_k^{(n)}$, $\Sigma_k^{\Lambda(n)}$, F_k ($k = 1, \ldots, 4$) — трансформанты фурье-компонент $\boldsymbol{u}_\tau^{(n)}$, $\Sigma_\tau^{(n)}$, $\boldsymbol{f}_\tau$; штрих означает производную по x_3.

Таким образом, краевая задача о гармонических колебаниях предварительно напряженной термоупругой среды, состоящей из пакета однородных или функционально-градиентных слоев, лежащих на однородном основании, в зависимости от типа источника, характера его воздействия и структуры среды описывается системой уравнений (2.12), (2.13) с граничными условиями (2.14)–(2.17) в обозначениях (2.18)–(2.20). С помощью методов операционного исчисления задача сводится к решению краевой задачи (3.1), (3.2), (3.5)–(3.7) в обозначениях (3.3), (3.4). Решение системы (3.1) имеет следующий вид:

— для полупространства

$$
\begin{gathered}
U_p^{(M)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = -i\alpha_p \sum_{k=1}^{4} f_{pk}^{(M)} c_{k+g}\, \mathrm{e}^{\sigma_k^{(M)} x_3}, \qquad p = 1, 2, \quad g = 8(M-1), \\
U_p^{(M)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \sum_{k=1}^{4} f_{pk}^{(M)} c_{k+g}\, \mathrm{e}^{\sigma_k^{(M)} x_3}, \qquad p = 3, 4;
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

— для однородных слоев покрытия

$$
\begin{gathered}
U_p^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = -i\alpha_p \sum_{k=1}^{4} f_{pk}^{(n)} \big(c_{k+g} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + c_{k+4+g} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3\big), \quad p = 1, 2, \ g = 8(n-1), \\
U_3^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \sum_{k=1}^{4} f_{3k}^{(n)} \big(c_{k+g} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3 + c_{k+4+g} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3\big), \\
U_4^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \sum_{k=1}^{4} f_{4k}^{(n)} \big(c_{k+g} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + c_{k+4+g} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3\big).
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

Здесь $\sigma_k^{(n)}$ — корни характеристического уравнения $\det M_\sigma^{(n)} = 0$,

$$
M_\sigma^{(n)} = \begin{pmatrix}
A_{11}^{(n)} & -\alpha_2^2 \theta_1^{(n)} & \sigma_k^{(n)} \theta_2^{(n)} & \theta_{1144}^{(n)} \\
-\alpha_1^2 \theta_1^{(n)} & A_{22}^{(n)} & \sigma_k^{(n)} \theta_3^{(n)} & \theta_{2244}^{(n)} \\
-\alpha_1^2 \sigma_k^{(n)} \theta_2^{(n)} & -\alpha_2^2 \sigma_k^{(n)} \theta_3^{(n)} & A_{33}^{(n)} & \sigma_k^{(n)} \theta_{3344}^{(n)} \\
-\alpha_1^2 i\omega\, E_T^{(n)} \theta_{1144}^{(n)} & -\alpha_2^2 i\omega\, E_T^{(n)} \theta_{2244}^{(n)} & \sigma_k^{(n)} i\omega\, E_T^{(n)} \theta_{3344}^{(n)} & -A_{44}^{(n)}
\end{pmatrix}, \tag{3.10}
$$

$$A_{ll}^{(n)} = \theta_{3ll3}^{(n)}(\sigma_k^{(n)})^2 - \alpha_s^2\theta_{slls}^{(n)} + \rho^{(n)}\omega^2, \qquad A_{44}^{(n)} = \lambda_{33}^{(n)}(\sigma_k^{(n)})^2 - \alpha_s^2\lambda_{ss}^{(n)} - i\omega T_1^{(n)}\theta_{4444}^{(n)},$$
$$s = 1,2, \qquad l = 1,2,3.$$

Коэффициенты $f_{pk}^{(n)}$ $(p,k = 1,\ldots,4)$ удовлетворяют однородной системе уравнений с матрицей $M_\sigma^{(n)}(\sigma_k)$ (3.10).

В соответствии с [10, 11] введем переменные

$$Y^{(n)} = \begin{pmatrix} Y_\Sigma^n \\ Y_u^n \end{pmatrix}, \qquad Y_\Sigma^n = \|\Sigma_k^{\Lambda(n)}\|_{k=1}^4, \qquad Y_u^n = \|U_k^{(n)}\|_{k=5}^8,$$

с помощью которых систему (3.2) представим в виде

$$Y^{(n)\prime} = M^{(n)}(\alpha_1,\alpha_2,x_3)Y^{(n)}, \tag{3.11}$$

$$M^{(n)} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & m_{13}^{(n)} & 0 & m_{15}^{(n)} & m_{16}^{(n)} & 0 & m_{18}^{(n)} \\
0 & 0 & m_{23}^{(n)} & 0 & m_{25}^{(n)} & m_{26}^{(n)} & 0 & m_{28}^{(n)} \\
m_{31}^{(n)} & m_{32}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{37}^{(n)} & 0 \\
0 & 0 & m_{43}^{(n)} & 0 & m_{45}^{(n)} & m_{46}^{(n)} & 0 & m_{48}^{(n)} \\
m_{51}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{57}^{(n)} & 0 \\
0 & m_{62}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{67}^{(n)} & 0 \\
0 & 0 & m_{73}^{(n)} & 0 & m_{75}^{(n)} & m_{76}^{(n)} & 0 & m_{78}^{(n)} \\
0 & 0 & 0 & m_{84}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

$$m_{13}^{(n)} = \frac{i\alpha_1\theta_{1133}^{(n)}}{\theta_{3333}^{(n)}}, \qquad m_{15}^{(n)} = -\frac{(\theta_{1133}^{(n)})^2\alpha_1^2}{\theta_{3333}^{(n)}} + P_1^{(n)},$$

$$m_{16}^{(n)} = (\theta_1^{(n)}\theta_{3333}^{(n)} - \theta_{2233}^{(n)}\theta_{1133}^{(n)})\,\frac{\alpha_1\alpha_2}{\theta_{3333}^{(n)}}, \qquad m_{s8}^{(n)} = \frac{i\alpha_s}{\theta_{3333}^{(n)}}\,(\theta_{ss44}^{(n)}\theta_{3333}^{(n)} - \theta_{3344}^{(n)}\theta_{ss33}^{(n)}), \qquad s = 1,2,$$

$$m_{23}^{(n)} = \frac{i\alpha_2\theta_{2233}^{(n)}}{\theta_{3333}^{(n)}}, \qquad m_{25}^{(n)} = m_{16}^{(n)}, \qquad m_{26}^{(n)} = -\frac{(\theta_{2233}^{(n)})^2\alpha_2^2}{\theta_{3333}^{(n)}} + P_2^{(n)},$$

$$m_{3s}^{(n)} = \frac{i\alpha_s\theta_{s3s3}^{(n)}}{\theta_{3ss3}^{(n)}}, \quad s = 1,2, \qquad m_{37}^{(n)} = -\frac{\alpha_k^2(\theta_{k3k3}^{(n)})^2}{\theta_{3kk3}^{(n)}} + P_3^{(n)}, \quad k = 1,2,$$

$$m_{43}^{(n)} = -\frac{i\omega E^*\theta_{3344}^{(n)}}{\theta_{3333}^{(n)}}, \qquad m_{45}^{(n)} = \frac{\omega E^*\alpha_1}{\theta_{3333}^{(n)}}(\theta_{3344}^{(n)}\theta_{1133}^{(n)} - \theta_{1144}^{(n)}\theta_{3333}^{(n)}),$$

$$m_{46}^{(n)} = \frac{\omega E^*\alpha_2}{\theta_{3333}^{(n)}}\,(\theta_{3344}^{(n)}\theta_{2233}^{(n)} - \theta_{2244}^{(n)}\theta_{3333}^{(n)}), \qquad m_{48}^{(n)} = \frac{i\omega E^*(\theta_{3344}^{(n)})^2}{\theta_{3333}^{(n)}} + P_4^{(n)},$$

$$m_{51}^{(n)} = (\theta_{3113}^{(n)})^{-1}, \qquad m_{57}^{(n)} = m_{31}^{(n)}, \qquad m_{62}^{(n)} = (\theta_{3223}^{(n)})^{-1}, \qquad m_{67}^{(n)} = m_{32}^{(n)},$$

$$m_{73}^{(n)} = (\theta_{3333}^{(n)})^{-1}, \quad m_{75}^{(n)} = m_{13}^{(n)}, \quad m_{76}^{(n)} = m_{23}^{(n)}, \quad m_{78}^{(n)} = -\frac{\theta_{3344}^{(n)}}{\theta_{3333}^{(n)}}, \quad m_{84}^{(n)} = (\lambda_{33}^{(n)})^{-1},$$

$$P_k^{(n)} = \alpha_i^2\theta_{ikki}^{(n)} - \rho^{(n)}\omega^2 \quad (k = 1,2,3), \qquad P_4^{(n)} = \alpha_i^2\lambda_{ii}^{(n)} + i\omega T_1^{(n)}\theta_{4444}^{(n)} \quad (i = 1,2).$$

Система (3.11) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, для решения которой можно использовать численные методы, в частности метод Рунге — Кутты. Представим $Y_k^{(n)}$ в виде разложения

$$Y_k^{(n)} = \sum_{p=1}^{8} c_{p+g}(\alpha_1, \alpha_2) y_{kp}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3), \qquad k = 1, 2, \ldots, 8, \quad g = 8(n-1), \tag{3.12}$$

где $y_{kp}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ — линейно независимые решения задачи Коши для системы (3.11) с начальными условиями $y_{kp}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_{30}) = \delta_{kp}$.

Решение краевой задачи (3.1)–(3.7) представляет собой совокупность решений для однородных (3.9) и неоднородных (3.12) составляющих покрытия и полупространства (3.8). Неизвестные c_k определяются при подстановке решений в граничные условия

$$AC = \boldsymbol{F}. \tag{3.13}$$

Здесь $C^{\text{т}} = \{c_p\}_{p=1}^{8(M-1)+4}$ — вектор неизвестных; $\boldsymbol{F}^{\text{т}} = \{\boldsymbol{F}_\tau, \boldsymbol{F}_0\}$, $\boldsymbol{F}_\tau$ — трансформанта Фурье вектора заданной нагрузки; $\boldsymbol{F}_0$ — нулевой вектор, размерность которого определяется геометрией задачи;

$$A = \begin{pmatrix} B^{(1)}(h_1) & 0 \\ A^{(1)}(h_{2,\ldots,M}) & B^{(M)}(h_M) \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$B^{(1)}(h_1)$, $B^{(M)}(h_M)$ — прямоугольные матрицы размерами 4×8 и 8×4; A, $A^{(1)}(h_{2,\ldots,M})$ — квадратные матрицы размерами $[4(2M-1)]$ и $[8(M-1)]$ соответственно. Элементы матрицы (3.14) имеют следующий вид:

— для однородного верхнего слоя

$$B^{(1)}(h_1) = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} c_{11}^1 & l_{12}^{(1)} c_{21}^1 & l_{13}^{(1)} c_{31}^1 & l_{14}^{(1)} c_{41}^1 & l_{11}^{(1)2} s_{11}^{01} & l_{12}^{(1)2} s_{21}^{01} & l_{13}^{(1)2} s_{31}^{01} & l_{14}^{(1)2} s_{41}^{01} \\ l_{21}^{(1)} c_{11}^1 & l_{22}^{(1)} c_{21}^1 & l_{23}^{(1)} c_{31}^1 & l_{24}^{(1)} c_{41}^1 & l_{21}^{(1)2} s_{11}^{01} & l_{22}^{(1)2} s_{21}^{01} & l_{23}^{(1)2} s_{21}^{01} & l_{24}^{(1)2} s_{41}^{01} \\ l_{31}^{(1)0} s_{11}^{01} & l_{32}^{(1)0} s_{21}^{01} & l_{33}^{(1)0} s_{31}^{01} & l_{34}^{(1)0} s_{41}^{01} & l_{31}^{(1)0} c_{11}^1 & l_{32}^{(1)0} c_{21}^1 & l_{33}^{(1)0} c_{31}^1 & l_{34}^{(1)0} c_{41}^1 \\ l_{41}^{(1)} c_{11}^1 & l_{42}^{(1)} c_{21}^1 & l_{43}^{(1)} c_{31}^1 & l_{44}^{(1)} c_{41}^1 & l_{41}^{(1)2} s_{11}^{01} & l_{42}^{(1)2} s_{21}^{01} & l_{43}^{(1)2} s_{31}^{01} & l_{44}^{(1)2} s_{41}^{01} \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где

$$l_{pk}^{(n)} c_{ki}^n = l_{pk}^{(n)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} h_i, \qquad l_{pk}^{(n)} s_{ki}^{0n} = l_{pk}^{(n)} \operatorname{sh}^0 \sigma_k^{(n)} h_i, \qquad l_{pk}^{(n)2} s_{ki}^{0n} = l_{pk}^{(n)} (\sigma_k^{(n)})^2 \operatorname{sh}^0 \sigma_k^{(n)} h_i,$$

$$\operatorname{sh}^0 \sigma_k^{(n)} h_i = (\sigma_k^{(n)})^{-1} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} h_i, \qquad p, k = 1, \ldots, 4, \quad n = 1, \ldots, M, \quad i = 1, \ldots, M-1,$$

$$l_{sk}^{(n)} = \theta_{3ss3}^{(n)} f_{sk}^{(n)0} + \theta_{s3s3}^{(n)} f_{3k}^{(n)} + E_p \theta_{3s4s}^{(n)} f_{4k}^{(n)}, \quad s = 1, 2, \qquad l_{3k}^{(n)} = (\sigma_k^{(n)})^{-1} l_{3k}^{(n)0}, \tag{3.16}$$

$$l_{3k}^{(n)0} = -\alpha_1^2 \theta_{1133}^{(n)} f_{1k}^{(n)0} - \alpha_2^2 \theta_{2233}^{(n)} f_{2k}^{(n)0} + (\sigma_k^{(n)})^2 \theta_{3333}^{(n)} f_{3k}^{(n)} + \theta_{3344}^{(n)} f_{4k}^{(n)0},$$

$$l_{4k}^{(n)} = f_{4k}^{(n)0}, \qquad f_{sk}^{(n)} = (\sigma_k^{(n)})^{-1} f_{sk}^{(n)0}, \qquad s = 1, 2, 4;$$

— для функционально-градиентного верхнего слоя

$$B^{(1)}(h_1) = \| y_{kp}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, h_1) \|_{k=1,\ldots,4}^{p=1,\ldots,8}; \tag{3.17}$$

$$B^{(M)}(h_M) = \begin{pmatrix} l^{(M)} \\ f^{(M)} \end{pmatrix}, \qquad l^{(M)} = \| -l_{ij}^{(M)} \|_{i,j=1}^4, \qquad f^{(M)} = \| -f_{ij}^{(M)} \|_{i,j=1}^4; \tag{3.18}$$

$$A^{(1)}(h_{2,\dots,M}) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(h_2) & P^{(2)}(h_2) & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & B^{(2)}(h_3) & P^{(3)}(h_3) & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^{(3)}(h_4) & P^{(4)}(h_4) & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & B^{(M-2)}(h_{M-1}) & P^{(M-1)}(h_{M-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & B^{(M-1)}(h_M) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

где $B^{(n)}(h_k)$, $P^{(k)}(h_l) = -B^{(k)}(h_l)$ — матрицы размером 8×8; верхний индекс соответствует номеру слоя, аргумент — границе раздела слоев. В общем виде с учетом (3.9), (3.12), (3.16) матрицы $B^{(n)}(h_k)$ определяются следующим образом:

— для функционально-градиентного n-го слоя

$$B^{(n)}(h_k) = \|y_{lp}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, h_k)\|_{l,p=1}^{8}, \quad (3.20)$$

— для однородного слоя

$$B^{(n)}(h_k) = \begin{pmatrix} l_{11}^{(n)} c_{1k}^n & l_{12}^{(n)} c_{2k}^n & l_{13}^{(n)} c_{3k}^n & l_{14}^{(n)} c_{4k}^n & l_{11}^{(n)2} s_{1k}^{0n} & l_{12}^{(n)2} s_{2k}^{0n} & l_{13}^{(n)2} s_{3k}^{0n} & l_{14}^{(n)2} s_{4k}^{0n} \\ l_{21}^{(n)} c_{1k}^n & l_{22}^{(n)} c_{2k}^n & l_{23}^{(n)} c_{3k}^n & l_{24}^{(n)} c_{4k}^n & l_{21}^{(n)2} s_{1k}^{0n} & l_{22}^{(n)2} s_{2k}^{0n} & l_{23}^{(n)2} s_{3k}^{0n} & l_{24}^{(n)2} s_{4k}^{0n} \\ l_{31}^{(n)0} s_{1k}^{0n} & l_{32}^{(n)0} s_{2k}^{0n} & l_{33}^{(n)0} s_{3k}^{0n} & l_{34}^{(n)0} s_{4k}^{0n} & l_{31}^{(n)0} c_{1k}^n & l_{32}^{(n)0} c_{2k}^n & l_{33}^{(n)0} c_{3k}^n & l_{34}^{(n)0} c_{4k}^n \\ l_{41}^{(n)} c_{1k}^n & l_{42}^{(n)} c_{2k}^n & l_{43}^{(n)} c_{3k}^n & l_{44}^{(n)} c_{4k}^n & l_{41}^{(n)2} s_{1k}^{0n} & l_{42}^{(n)2} s_{2k}^{0n} & l_{43}^{(n)2} s_{3k}^{0n} & l_{44}^{(n)2} s_{4k}^{0n} \\ f_{11}^{(n)0} s_{1k}^{0n} & f_{12}^{(n)0} s_{2k}^{0n} & f_{13}^{(n)0} s_{3k}^{0n} & f_{14}^{(n)0} s_{4k}^{0n} & f_{11}^{(n)0} c_{1k}^n & f_{12}^{(n)0} c_{2k}^n & f_{13}^{(n)0} c_{3k}^n & f_{14}^{(n)0} c_{4k}^n \\ f_{21}^{(n)0} s_{1k}^{0n} & f_{22}^{(n)0} s_{2k}^{0n} & f_{23}^{(n)0} s_{3k}^{0n} & f_{24}^{(n)0} s_{4k}^{0n} & f_{21}^{(n)0} c_{1k}^n & f_{22}^{(n)0} c_{2k}^n & f_{23}^{(n)0} c_{3k}^n & f_{24}^{(n)0} c_{4k}^n \\ f_{31}^{(n)} c_{1k}^n & f_{32}^{(n)} c_{2k}^n & f_{33}^{(n)} c_{3k}^n & f_{34}^{(n)} c_{4k}^n & f_{31}^{(n)2} s_{1k}^{0n} & f_{32}^{(n)2} s_{2k}^{0n} & f_{33}^{(n)2} s_{3k}^{0n} & f_{34}^{(n)2} s_{4k}^{0n} \\ f_{41}^{(n)0} s_{1k}^{0n} & f_{42}^{(n)0} s_{2k}^{0n} & f_{43}^{(n)0} s_{3k}^{0n} & f_{44}^{(n)0} s_{4k}^{0n} & f_{41}^{(n)0} c_{1k}^n & f_{42}^{(n)0} c_{2k}^n & f_{43}^{(n)0} c_{3k}^n & f_{44}^{(n)0} c_{4k}^n \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

В случае если последний слой покрытия является однородным, матрица $B^{(M-1)}(h_M)$ имеет вид

$$B^{(M-1)}(h_M) = \begin{pmatrix} l_{11}^{(M-1)} & l_{12}^{(M-1)} & l_{13}^{(M-1)} & l_{14}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21}^{(M-1)} & l_{22}^{(M-1)} & l_{23}^{(M-1)} & l_{24}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{31}^{(M-1)\,0} & l_{32}^{(M-1)\,0} & l_{33}^{(M-1)\,0} & l_{34}^{(M-1)\,0} \\ l_{41}^{(M-1)} & l_{42}^{(M-1)} & l_{43}^{(M-1)} & l_{44}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{11}^{(M-1)0} & f_{12}^{(M-1)0} & f_{13}^{(M-1)0} & f_{14}^{(M-1)0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{21}^{(M-1)0} & f_{22}^{(M-1)\,0} & f_{23}^{(M-1)0} & f_{24}^{(M-1)\,0} \\ f_{31}^{(M-1)} & f_{32}^{(M-1)} & f_{33}^{(M-1)} & f_{34}^{(M-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{41}^{(M-1)0} & f_{42}^{(M-1)0} & f_{43}^{(M-1)0} & f_{44}^{(M-1)0} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

В случае если последний слой покрытия является функционально-градиентным, элементы матрицы $B^{(M-1)}(h_M)$ определяются по формулам (3.20), где $n = M-1$, $k = M$.

Подставляя решение (3.13) в представления (3.8), (3.12), (3.9) и применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\boldsymbol{u}_\tau^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Omega} k_\tau^{(n)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3)\, f_\tau(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta; \quad (3.23)$$

$$k_\tau^{(n)}(s, t, x_3) = \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} K_\tau^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)\, \mathrm{e}^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2; \quad (3.24)$$

$$K_\tau^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \|K_{lj}^{(n)}\|_{l,j=1}^{4}. \quad (3.25)$$

Компоненты матрицы $K_\tau^{(n)}$ имеют следующий вид:

— для однородных составляющих ($p = 8(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots, M-1$)

$$K_{lj}^{(n)} = \frac{-i\alpha_l}{\Delta_0} \sum_{k=1}^{4} f_{lk}^{(n)} \big(\Delta_{j,\,k+p} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+4+p} \sigma_k^{(n)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3\big), \qquad l = 1, 2,$$

$$K_{3j}^{(n)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^{4} f_{3k}^{(n)} \big(\Delta_{j,\,k+p} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+4+p} \sigma_k^{(n)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3\big), \qquad (3.26)$$

$$K_{4j}^{(n)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^{4} f_{4k}^{(n)} \big(\Delta_{j,\,k+p} \operatorname{sh} \sigma_k^{(n)} x_3 + \Delta_{j,k+4+p} \sigma_k^{(n)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(n)} x_3\big);$$

— для функционально-градиентных составляющих

$$K_{lj}^{(n)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^{8} \Delta_{j,k+p} y_{l+4,k}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3), \qquad l = 1, \ldots, 4; \qquad (3.27)$$

— для полупространства

$$K_{lj}^{(M)} = \frac{\beta_l}{\Delta_0} \sum_{k=1}^{4} f_{lk}^{(M)} \Delta_{j,k+8(M-1)}\, \mathrm{e}^{\sigma_k^{(M)} x_3}, \quad l = 1, \ldots, 4, \qquad \boldsymbol{\beta} = \{-i\alpha_1, -i\alpha_2, 1, 1\}. \qquad (3.28)$$

Здесь Δ_0, Δ_{ns} — определитель и алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы A (3.14) с элементами (3.15)–(3.22).

Интегральное представление (3.23), (3.24) и функция Грина (3.25)–(3.28) определяют смещение произвольной точки среды под действием заданной на ее поверхности нагрузки. Контуры Γ_1, Γ_2 в представлении (3.24) находятся в области аналитичности подынтегральной функции и выбираются в соответствии с правилами [16].

Заключение. Разработана математическая модель неоднородного предварительно напряженного термоупругого полупространства, представляющего собой пакет однородных или функционально-градиентных слоев, жестко сцепленных с однородным основанием. Каждая неоднородная составляющая среды может подвергаться действию неоднородных начальных напряжений и температуры. В рамках теории наложения малых деформаций на конечные реализована последовательная линеаризация определяющих соотношений нелинейной механики неоднородной термоупругой среды. Предложен метод и построены интегральные формулы, позволяющие учитывать неоднородность элементов покрытия, различные законы изменения свойств этих элементов, неоднородность их напряженного состояния и различные условия на границах между ними.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Green A. E.** Thermoelastic stresses in initially stressed bodies // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1962. V. 266. P. 1–19.
2. **Iesan D.** Incremental equations in thermoelasticity // J. Thermal Stresses. 1980. V. 3. P. 41–56.
3. **Wang J., Slattery P.** Thermoelasticity without energy dissipation for initially stressed bodies // Intern. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 31. P. 329–337.
4. **Singh B.** Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space // Appl. Math. Comput. 2010. V. 217. P. 705–715.
5. **Singh B., Renu.** Surface wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid // Adv. Stud. Theoret. Phys. 2012. V. 6, N 6. P. 263–271.

6. **Калинчук В. В., Суворова Г. Ю., Белянкова Т. И.** Функция Грина термоупругого предварительно напряженного слоя // Вестн. Южн. науч. центра РАН. 2012. Т. 8, № 3. С. 14–21.
7. **Белянкова Т. И., Калинчук В. В., Суворова Г. Ю.** Об одной динамической контактной задаче для термоупругого предварительно напряженного слоя // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, № 5. С. 811–822.
8. **Калинчук В. В., Леви Г. Ю.** Одна динамическая контактная задача для преднапряженного термоупругого полупространства // Вестн. Южн. науч. центра РАН. 2014. Т. 10, № 2. С. 3–8.
9. **Шейдаков Д. Н., Белянкова Т. И., Шейдаков Н. Е., Калинчук В. В.** Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды // Вестн. Южн. науч. центра РАН. 2008. Т. 4, № 3. С. 9–15.
10. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И.** О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.
11. **Калинчук В. В.** Динамика поверхности неоднородных сред / В. В. Калинчук, Т. И. Белянкова. М.: Физматлит, 2009.
12. **Белянкова Т. И., Калинчук В. В.** К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акуст. журн. 2014. Т. 60, № 5. С. 492–504.
13. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
14. **Maugin G. A., Berezovski A. J.** Material formulation of finite-strain thermoelasticity and applications // J. Thermal Stresses. 1999. V. 22, N 4/5. P. 421–449.
15. **Най Дж.** Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. М.: Мир, 1967.
16. **Ворович И. И.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 8/VI 2015 г.,
в окончательном варианте — 2/IX 2015 г.