Физика горения и взрыва

2

1967 г.

УДК 532.593

О ЗАКОНЕ ЗАТУХАНИЯ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЛОТНОЙ СРЕДЕ

В. М. Любошиц

(Москва)

Плоская волна бесконечно малой амплитуды распространяется без искажения профиля. Задача о затухании ударной волны конечной амплитуды после достаточно длительного времени ее распространения решена Ландау в изэнтропическом приближении [1]. Ниже дан в том же приближении иной вывод закона затухания плоской ударной волны с момента ее возникновения в слабосжимаемой среде (металл, горные породы) при взрыве на поверхности среды. Существование «химического пика» давления не учитывается, так как его влияние сказывается только на расстоянии меньше 1 *см* от поверхности среды [2].

Определены основные параметры ВВ и плотной среды, влияющие на быстроту затухания ударной волны. Предварительно найден закон движения границы раздела продукты детонации — плотная среда и падения взрывной нагрузки при непосредственном контакте ВВ и слабосжимаемой среды. Полученные результаты дают возможность оценить границы применения линейного (акустического) приближения при решении двумерных задач о взаимодействии детонационной волны и слабосжимаемого полупространства [3].

ОБОСНОВАНИЕ ИЗЭНТРОПИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Ударные волны в плотных средах являются волнами слабой интенсивности; даже при сжатии металлов давлением в полмиллиона атмосфер их плотность возрастает всего на 15—25%, число Маха потока, создаваемого ударной волной такой амплитуды, меньше 0,25. Однако сжатие ударной волной даже и малой интенсивности принципиально необратимо, так как вследствие трения (вязкости) и теплопроводности энергия ударной волны рассеивается в металле.

Нестационарная одномерная ударная волна описывается системой трех дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка: сохранения количества движения, неразрывности и адиабатичности движения, если дополнительно известно уравнение состояния $p=p(\rho, S)$,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0.
\end{aligned}\right\}$$

До настоящего времени не удалось найти точного решения указанной системы, ибо оно должно содержать три произвольные функции координаты и времени, определяемые из граничных условий [4].

За фронтом ударной волны энтропия металла, очевидно, переменна. Известно, однако, что скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности является малой величиной третьего порядка малости по сравнению со скачками других параметров

$$T\Delta S = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_S \Delta p^3.$$

Это означает, что ударная волна малой амплитуды может считаться во втором приближении изэнтропической (понимая под первым волну бесконечно малой амплитуды) [1].

Согласно термодинамике, приращение удельной энтальпии есть:

$$\Delta\omega = T\Delta S + \frac{\Delta p}{\rho}. \quad (1)$$

Для определения скачка энтропии нужно знать закон сжимаемости металла при высоких давлениях. Поскольку амплитуда ударной волны на 1—2 порядка превосходит предел текучести металла, эффекты прочности предполагаются пренебрежимо малыми и кристаллические тела рассматриваются как квазижидкие с характерным для жидкости скалярным полем давления. В действительности, однако, состояние ударно сжатых тел описывается тензором напряжений, различающихся на величину 2/3 динамического предела текучести, т. е. 2—20 тыс. *атм*. Погрешность такой замены при давлениях в несколько сотен тысяч атмосфер невелика [2].

Связь между давлением и плотностью некоторых твердых тел (горные породы, металлы) с большой точностью может быть выражена соотношением, известным под названием формулы Тэта [4]. В этой формуле $A(S)$ величина переменная, зависящая от энтропии, а показатель n в большом диапазоне изменения давления может считаться постоянным (для металлов $n=4$). При давлениях меньше миллиона атмосфер можно принять $A=\text{const}$. Для стали $A=5\cdot10^5$ *атм*, для дюралюминия $A=2{,}03\cdot10^5$ *атм*.

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_S = \frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{\rho_0 A^2}.$$

Возвращаясь к (1), получим:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta p}{\rho_0}\left[1 + \frac{n+1}{12n^2}\left(\frac{\Delta p}{A}\right)^2\right] = \frac{\Delta p}{\rho_0}\left[1 + 0{,}026\left(\frac{\Delta p}{A}\right)^2\right].$$

Легко проверить, что поправка на неизэнтропичность ударного сжатия металла составит в худшем случае 1,5% (гексоген с плотностью 1,6 *г/см*^{3}).

Переходя к продуктам детонации (ПД), заметим, что их движение до момента отражения от металла описывается центрированной волной разрежения. В момент отражения поверхность металла скачком приобретает скорость $u_н$. Если $u_н$ меньше скорости движения ПД за фронтом детонационной волны, равной $D/4$, где D — скорость детонации, то по ПД идет отраженная ударная волна. Условие ее образования:

$$\frac{\rho_{BB} D^2}{4} \leqslant \frac{\rho_0 \bar{c}_0 D}{4},$$

где $\bar{c}_0$ — скорость звука в невозмущенной среде;
ρ_0 — плотность невозмущенной среды.

$$R = \frac{\rho_{BB} D}{\rho_0 \bar{c}_0} \leqslant 1.$$

Критерий R определяет жесткость плотной среды по отношению к данному виду ВВ. Для металлов и кварца $R<1$; для абсолютно жесткого тела $R=0$.

Отраженную ударную волну можно рассматривать как изэнтропическую, так как даже при отражении от абсолютно жесткой стенки энтропия ПД возрастает всего на 8% [4]. Эта волна описывается общим решением уравнений газодинамики для одномерных изэнтропических движений

$$\left.\begin{aligned} x &= (u + c)\, t; \\ x &= (u - c)\, t + F_1 (u - c). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В плотной среде возникает бегущая волна, описываемая особым (римановским) решением.

$$\left.\begin{aligned} x &= (\bar{u} + \bar{c})\, t + F_2 (\bar{u}); \\ \bar{u} &= \frac{2}{n-1} (\bar{c} - \bar{c}_0). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Исходя из систем (2)—(3) и очевидного равенства давления и скорости по обе стороны границы раздела $u=\bar{u}$, $p=\bar{p}$, находим закон движения границы раздела, вид функции $F_2(\bar{u})$ и затем закон затухания ударной волны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПД—МЕТАЛЛ

Рассмотрим строго одномерную задачу (без учета бокового разлета ВВ). Согласно уравнению изэнтропы для ПД

$$p = \frac{64}{27} p_g \left(\frac{c}{D}\right)^3 = \frac{64}{27} p_g \left(\frac{x/t - u}{D}\right)^3.$$

Перепишем уравнение Тэта для металла, учитывая зависимость скорости звука от плотности:

$$\bar{c}^2 = \frac{dp}{d\rho} = n \frac{A}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1} = \bar{c}_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n-1},$$

$$\bar{p} = A \left[\left(\frac{c}{\bar{c}_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1\right]. \tag{4}$$

Из постоянства инварианта Римана для бегущей вправо ударной волны в металле следует, что

$$\bar{p} = \frac{\rho_0 \bar{c}_0^2}{n}\left[\left(1 + \frac{n-1}{2}\,\frac{\bar{u}}{\bar{c}_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1\right].$$

Приравнивая давления по обе стороны от границы раздела, получим дифференциальное уравнение, определяющее закон движения границы раздела

$$\left(1 + \frac{n-1}{2}\,\frac{\dot{x}}{\bar{c}_0}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1 = \frac{16}{27}\, n\, \frac{\rho_{\text{вв}} D^2}{\rho_0 \bar{c}_0^2}\left(\frac{x/t - \dot{x}}{D}\right)^3;$$

$$\text{при } n = 4; \quad x = t\left[\dot{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{\bar{c}_0 D^2}{R}}\,\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{\dot{x}}{\bar{c}_0}\right)^{8/3} - 1}\right].$$

Это уравнение является известным дифференциальным уравнением Лагранжа. Точное решение возможно только в параметрическом виде (4). Однако это решение громоздко и не может быть использовано для дальнейших расчетов. Упростим уравнение Лагранжа, линеаризовав зависимость скорости звука от давления в металле. Оставляя 1-й член в разложении бинома Ньютона, имеем из (4)

$$\bar{p} = A\left[1 + \frac{2n}{n-1}\,\frac{\bar{c} - \bar{c}_0}{\bar{c}_0} - 1\right] = \frac{2}{n-1}\,\rho_0 \bar{c}_0 (\bar{c} - \bar{c}_0) = \rho_0 \bar{c}_0 \bar{u}. \tag{5}$$

Такое же приближение используется в теории «коротких волн», которая, в отличие от акустики, учитывает зависимость скорости звука от давления, но предполагает, что эта зависимость линейна [5]. Из (4) видно, что линейность сохраняется только при $\bar{p} < A$.

Решая упрощенное уравнение движения границы раздела

$$x = t\left(\dot{x} + 3/4\sqrt[3]{\frac{4D^2\dot{x}}{R}}\right),$$

получаем в неявном виде зависимость скорости (а значит, и давления) на границе раздела от времени

$$\ln\frac{t}{\tau} = -1/3\ln\frac{u}{u_{\text{н}}} - \sqrt[3]{2\eta^2 R}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{u}{u_{\text{н}}}\right)^2} - 1\right),$$

где $\eta = \frac{u_{\text{н}}}{D}$. В начальный момент $t = \tau = \frac{l}{D}$; $u = u_{\text{н}}$. Обозначив $\sqrt[3]{2\eta^2 R} = \alpha$, получим простые параметрические выражения для траектории границы раздела

$$t = \tau\left(\frac{u_{\text{н}}}{u}\right)^{1/3}\exp\left[-\alpha\left(\sqrt[3]{\left(\frac{u}{u_{\text{н}}}\right)^2} - 1\right)\right],$$

$$x = \tau u_{\text{н}}\left[\left(\frac{u}{u_{\text{н}}}\right)^{2/3} + \frac{3}{2\alpha}\right]\exp\left[-\alpha\left(\sqrt[3]{\left(\frac{u}{u_{\text{н}}}\right)^2} - 1\right)\right],$$

при $t \to \infty$ граница раздела перемещается на конечное расстояние

$$\frac{x-l}{l} = \frac{3}{2}\,\frac{\eta e^{\alpha}}{\alpha} - 1. \tag{6}$$

Как известно, для бесконечно жесткой стенки [4]:

$$\frac{t}{\tau} = \left(\frac{p_{н}}{p}\right)^{1/3} \quad (\alpha = 0).$$

Коэффициент α учитывает влияние сжимаемости среды на быстроту спада давления. Из-за конечной сжимаемости материала начальное давление меньше $\frac{64}{27} p_g$, но затем давление на границе раздела спадает медленнее. При отражении от жесткой стенки:

$$\theta_{ж} - t\left(\frac{p}{p_{н}} = \frac{1}{e}\right) - \tau = \tau\,[e^{1/3} - 1] = 0{,}395\,\tau$$

с учетом сжимаемости

$$\theta = t_{1/2e} - \tau = \tau\,[\exp\,(^1/_3 + \alpha - \alpha e^{-2/3}) - 1].$$

Начальные значения безразмерных величин скорости и давления $u_{н}/D$ и $p_{н}/p_{нж}$, а также показатель экспоненты α однозначно определяются критерием жесткости R, т. е. отношением акустических сопротивлений ПД в точке Чепмена — Жуге и среды.

Уравнение Лагранжа, записанное для начального момента времени $t = \tau$, дает кубическое уравнение для определения зависимости $\eta = \eta(R)$

$$(1 - \eta) = \sqrt[3]{\frac{27}{16}\,\frac{\eta}{R}}; \qquad \alpha = \sqrt[3]{2R\eta^2} = \frac{3/2\,\eta}{1-\eta}.$$

По величине η находим безразмерную величину начального давления:

$$\frac{p_{н}}{p_{нж}} = \frac{\rho_0 \bar{c}_0\, u}{\frac{16}{27}\,\rho_{вв} D^2} = \frac{27}{16}\,\frac{\eta}{R} = (1-\eta)^3 = \frac{1}{(1 + {}^2/_3\alpha)^3}.$$

Удельный импульс при отражении детонационной волны от сжимаемой среды есть $I(t) = \int\limits_{\tau}^{t} p(t)\,dt = \rho_0 \bar{c}_0 \int\limits_{\tau}^{t} u\,dt$

$$\frac{I(t)}{I_{ж}} = \frac{\rho_0 \bar{c}_0}{{}^8/_{27}\,\rho_{вв} D\, l} \int\limits_{\tau}^{t} u\,dt = \frac{27}{8}\,\frac{x(t) - l}{lR}.$$

Согласно (6),

$$\frac{I}{I_{ж}} = \frac{27}{8R}\left(\frac{3}{2}\,\eta\,\frac{e^{\alpha}}{\alpha} - 1\right) = \frac{3e^{\alpha} - 3 - 2\alpha}{\alpha\left(1 + \frac{2}{3}\alpha\right)^3}.$$

Импульс слабо зависит от сжимаемости.

Результаты расчетов приведены в табл. 1. В последних трех столбцах помещены значения скорости и давления, вычисленные по точной зависимости между скоростью и давлением (4). Следует отметить, что при взрыве гексогена на поверхности дюралюминия сделанное упрощение p—u-диаграммы заведомо неверно, так как $p_н > A = 20300$ *атм*. Тем не менее, даже в этом случае начальная скорость отличается от вычис-

Таблица 1

Отражение детонационной волны от слабосжимаемой среды.

Вид взаимодействия	R	η	α	$u_н$, *м/сек*	$\frac{p_н}{p_{нж}}$	$p_н$, *тыс. атм.*	$\frac{\theta}{\theta_ж}$	$\frac{I}{I_ж}$	$p_н$, *тыс. атм*	$u_н$ *м/сек*
Сталь — тротил 1,3 *г/см*³	0,198	0,088	0,145	530	0,76	210	1,27	0,91	207	505
Сталь — гексоген 1,6 *г/см*³	0,333	0,13	0,22	1070	0,66	420	1,41	0,89	405	885
Дюралюминий — тротил 1,3 *г/см*³	0,520	0,175	0,33	1050	0,56	155	1,62	0,86	154	830
Гексоген 1,6 *г/см*³	0,88	0,23	0,45	1880	0,44	282	1,87	0,82	285	1400
Кварц — крист. тротил 1,3 *г/см*³	0,58	0,19	0,35	1140	0,55	153	1,65	0,85	—	—

Примечание. При составлении таблиц 1—3 скорость детонации тротила 1,3 *г/см*³ принята равной 6000 *м/сек*, гексогена (1,6 *г/см*³) — 8200 *м/сек*; $\bar{c}_0$ для кварца составляет 5000 *м/сек*, для стали — 5050 и для дюралюминия — 5500 *м/сек*.

ленной по точной зависимости всего на одну треть. Начальные значения давления во всех случаях практически совпадают с вычисленными по точному уравнению движения границы раздела. Это оправдывает сделанное выше упрощение (5).

ЗАТУХАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В МЕТАЛЛЕ

Граница раздела ПД — металл является поршнем, смещающим металл. Как показано выше, скорость этого поршня падает от начальной величины $\bar{u}_н$ по приближенно экспоненциальной зависимости с постоянной времени θ, равной $0{,}395 \frac{l}{D} (3{,}54 e^{0.485\alpha} - 2{,}54)$, где l — эффективная длина заряда с учетом бокового разлета. По аналогичному закону изменяется давление на границе раздела (в приближении «теории коротких волн»). Понижение давления на границе раздела сказывается на амплитуде ударной волны, ибо скорость распространения возмущений за фронтом (скорость характеристик) больше скорости ударной волны.

Скорость распространения характеристики, переносящей заданное значение $\bar{u}$ (и соответствующее значение давления $\rho_0 \bar{c}_0 \bar{u}$), есть $\bar{c} + \bar{u} = \bar{c}_0 + \frac{n+1}{2} \bar{u}$ согласно принятому условию изэнтропичности, а следовательно, постоянства минус инварианта Римана в ударной волне, идущей слева направо.

Скорость ударной волны равняется в первом приближении полусумме скоростей распространения возмущений за и перед фронтом, т. е. $\frac{\bar{c}_0 + \bar{u}_{фр} + \bar{c}}{2} = \bar{c}_0 + \frac{n+1}{4}\bar{u}_{фр}$. Характеристики, переносящие значение скорости, меньшие, чем на фронте, догоняют фронт и ослабляют его. Именно таким образом в изэнтропическом приближении учитывается затухание ударной волны из-за скачка энтропии на фронте.

Уравнение распространения характеристик за фронтом есть (3). (Черту сверху здесь и дальше для простоты опускаем). $F_2(u)$ определяется законом движения поршня, который задается в параметрическом виде: $x = x_н(u_н)$; $t = t_н(u_н)$.

Поскольку $u = u_н \sigma_0(t) e^{-t/\theta}$; $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$ и

$$x_n = (u_н - u)\,\theta, \qquad t = \theta \ln (u_н/u),$$

уравнение характеристик принимает вид:

$$x = \left(c_0 + \frac{n+1}{2}u\right)t + (u_н - u)\,\theta - \left(c_0 + \frac{n+1}{2}u\right)\theta \ln \frac{u_н}{u}. \qquad (7)$$

Фронт ударной волны не является характеристикой, он распространяется со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = D_{уд} = \frac{u + c + c_0}{2} = c_0 + \frac{n+1}{4}u, \qquad (8)$$

тогда как скорость распространения характеристики, образовавшейся в момент $t = \theta \ln \frac{u_н}{u}$, есть $c_0 + \frac{n+1}{2}u$.

Давление на фронте ударной волны находится из (7), если известно положение фронта в данный момент времени, которое может быть найдено из уравнения (8), связывающего скорость ударной волны со скоростью потока (давлением) на фронте. Дифференцируя (7) по времени вдоль фронта, найдем уравнение, определяющее закон затухания давления (скорости потока)

$$\frac{dt}{du} + 2\frac{t}{u} = \theta\left[-\frac{4}{n+1}\frac{c_0}{u^2} - 2\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{u} + 2\frac{1}{u}\ln\frac{u_н}{u}\right].$$

Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения определяет скорость потока на фронте ударной волны как неявную функцию времени:

$$\frac{t}{\theta} = \left(\frac{u_н}{u}\right)^2 \left[\frac{4}{n+1}\frac{c_0}{u_н} - \frac{3-n}{2(n+1)}\right] - \frac{4}{n+1}\frac{c_0}{u} + \frac{3-n}{2(n+1)} + \ln\frac{u_н}{u}.$$

Обозначим $\frac{c_0}{u_н} = \varkappa$

$$\frac{t}{\theta} = \left(\frac{u_н}{u}\right)^2 \frac{4\varkappa}{n+1}\left(1 - \frac{3-n}{8\varkappa}\right) - \frac{4\varkappa}{n+1}\left(\frac{u_н}{u}\right) + \frac{3-n}{2(n+1)} + \ln\frac{u_н}{u}. \qquad (9)$$

Если $\varkappa > 5$, а $n \approx 4$, то с точностью до 3%

$$t = \theta\left(\frac{u_н}{u}\right)\frac{4}{n+1}\varkappa\left(\frac{u_н}{u} - 1\right), \qquad t_2 = t\left(\frac{u_н}{u} = 2\right) = \varkappa\theta\frac{8}{n+1}.$$

Из последнего равенства видно, что форма волны искажается тем быстрее, чем меньше θ и больше $u_н$ при одной и той же длине заряда, т. е. чем больше сжимаемость среды и выше скорость детонации. Например, $\dfrac{t_{2\,\text{тротил-сталь}}}{t_{2\,\text{гексоген-сталь}}} \approx 2$.

Найдем координату фронта в момент, когда давление на фронте равно $\rho_0 c_0 u$:

$$x = \theta\left(c_0 + \frac{n+1}{2}u\right)\left[\left(\frac{u_н}{u}\right)^2 \frac{4\varkappa}{n+1}\left(1 - \frac{3-n}{8\varkappa}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{4\varkappa}{n+1}\left(\frac{u_н}{u}\right) + \frac{3-n}{2(n+1)}\right] + \theta\,(u_н - u). \qquad (10)$$

Результаты расчетов по формулам (9) и (10) приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Затухание ударной волны в стали при взрыве накладного заряда тротила с плотностью 1,3 *г/см³*

$\left(u_н = 530\ м/сек,\ \varkappa = 9{,}55,\ \dfrac{\theta}{\theta_ж} = 1{,}27,\ \dfrac{t}{\theta} = 7{,}75\left(\dfrac{u_н}{u}\right)^2 - 7{,}65\left(\dfrac{u_н}{u}\right) - 0{,}1 + \ln\dfrac{u_н}{u}\right)$

$\frac{u_н}{u}$	u, *м/сек*	$\frac{t}{\theta}$	t *мксек*, $\theta = 2{,}3$ *мксек*	$t\bar{c}_0$, *см*	x, *см*	x/l*
1,1	482	0,95	2,3	1,1	1,25	0,45
1,2	440	2,1	4,8	2,4	2,7	0,98
1,5	353	6,3	14,5	7,3	8,0	2,9

* l=2,75 *см.*

Как и следовало ожидать, закон подобия при взрыве накладного заряда выполняется: пиковое давление ударной волны есть неявная функция x/l. Отметим, что при $t \to \infty$ зависимость (9) переходит в асимптотический закон Ландау $u \to 1/\sqrt{t}$.

Таблица 3

Затухание ударной волны в стали при взрыве накладного заряда гексогена с плотностью 1,6 *г/см³*

$\left(u_н = 1070\ м/сек,\ \varkappa = 4\ 72,\ \dfrac{\theta}{\theta_ж} = 1{,}41\right)$

$\frac{u_н}{u}$	u, *м/сек*	$\frac{t}{\theta}$	t, *мксек*, $\theta = 2{,}25$, *мксек*	$t\bar{c}_0$, *см*	x, *см*	x/l*
1,1	975	0,52	1,15	0,58	0,73	0,22
1,2	890	1,15	2,6	1,3	1,6	0,48
1,5	715	3,5	7,8	3,9	4,8	1,45

* l=3,30 *см.*

ВЫВОДЫ

1. Задача об одномерном разлете ПД в слабосжимаемую среду допускает упрощенное, но достаточно точное аналитическое решение.

2. Масштаб времени затухания ударной волны задается постоянной времени движения границы раздела ПД — среда.

3. Плоскую ударную волну в слабосжимаемой среде можно рассматривать в линейном приближении, т. е. считать незатухающей только на расстоянии порядка нескольких десятых долей длины заряда от поверхности среды. Это следует учитывать при анализе линейного решения задачи Лэмба [3].

Поступила в редакцию
24/V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Л. В. Альтшулер. УФН, 1963, 85, 2.
3. В. С. Никифоровский. ПМТФ, 1964, 2.
4. К. П. Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, 1955.
5. А. А. Гриб, О. С. Рыжов, С. А. Христианович. ПМТФ, 1960, 1.