

## ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООВОГО ВЗРЫВА

Л. Г. Раздольский

(Москва)

В настоящей работе рассматривается простейшая модель неадиабатического теплового взрыва, как с учетом, так и без учета выгорания за период индукции.

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \frac{\theta + \theta_0}{\kappa} \quad (1)$$

уравнение теплового баланса в безразмерной форме для реакции нулевого порядка в соответствии с нестационарной теорией [1].

Система уравнений, описывающая тепловой взрыв с учетом выгорания за период индукции, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \varphi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \frac{\theta}{\kappa}, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \gamma\varphi(\eta) \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Начальные условия:

$$\theta/\tau=0 = 0 \quad \eta/\tau=0 = 0. \quad (3)$$

Все обозначения заимствованы из [2].

Функция  $\varphi(\eta)$  находится из уравнения:

$$\varphi(\eta) = \begin{cases} 1 - \eta & \text{— мономолекулярная реакция,} \\ (1 - \eta)^2 & \text{— бимолекулярная реакция,} \\ (1 - \eta)(\eta + \eta_0) & \text{— автокаталитическая реакция первого порядка.} \end{cases}$$

Уравнения (1) и (2) в соответствующих задачах, как правило, решались с помощью ЭВМ методами вычислительной математики. Естественно, что при этом некоторые качественные стороны явлений либо ускользали из поля зрения исследователя, либо доставались ценой большого объема побочных вычислений. Настоящая работа посвящена применению вариационных методов при решении некоторых задач теплового взрыва, которые позволили с помощью известной физической картины явления получить сравнительно простые окончательные формульные соотношения.

Применению вариационных методов для решения задач о тепловом взрыве посвящено весьма малое количество работ (см., например, [3, 4]). Поэтому настоящая статья носит отчасти иллюстративный характер. В связи с этим здесь рассматривается классическая задача о нахождении критического параметра  $\kappa_*$ , задача о нахождении периода индукции  $\tau_{\text{инд}}$  для случая неадиабатического взрыва, а также решается задача о вырожденных взрывных процессах [2].

Для нахождения  $\kappa_*$  рассмотрим уравнение (1). Будем решать его методом Бубнова—Галеркина. В качестве аппроксимирующей функции выберем:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tau^n e^{-n\tau}. \quad (4)$$

Аппроксимирующая функция удовлетворяет следующим условиям: при  $\tau \rightarrow 0$   $\theta \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$   $\theta \rightarrow 0$ . Прделавав обычную процедуру метода

Бубнова — Галеркина с уравнением (1), получим, если в (4) ограничиться одним членом ряда:

$$\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{c\tau e^{-\tau}}{1 + \beta c\tau e^{-\tau}}\right) \tau e^{-\tau} d\tau = \frac{c}{4\kappa} + \frac{\theta_0}{\kappa}. \quad (5)$$

Точное вычисление интеграла, стоящего в левой части уравнения (5), связано с практически непреодолимыми трудностями, поэтому вычислим его приближенно [5]. Заметим, что подынтегральная весовая функция позволяет использовать полиномы Лягерра для вычисления интеграла с наивысшей степенью точности. Практически ограничимся только двумя узлами и найдем корни полинома Лягерра:

$$x_1 = 3 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{3}.$$

Соответствующие коэффициенты [5] равны:

$$A_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \quad A_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}.$$

Тогда уравнение (5) примет вид:

$$A_1 \exp\left(\frac{cN_1}{1 + \beta cN_1}\right) + A_2 \exp\left(\frac{cN_2}{1 + \beta cN_2}\right) = \frac{c}{4\kappa} + \frac{\theta_0}{\kappa}, \quad (6)$$

где

$$N_1 = (3 - \sqrt{3}) e^{-(3 - \sqrt{3})}; \quad N_2 = (3 + \sqrt{3}) e^{-(3 + \sqrt{3})}.$$

Достаточная точность вычислений обеспечивается даже при учете только первого слагаемого в (6).

Из уравнения (6) находим неизвестный параметр  $c$ . Уравнение (6) может также служить для определения критического параметра  $\kappa_*$ . Графически это представлено на рис. 1. В частном случае, когда  $\theta_0 = 0$ , необходимо решить следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1 \exp\left(\frac{c_* N_1}{1 + \beta c_* N_1}\right) &= \frac{c_*}{4\kappa_*}, \\ A_1 \frac{N_1}{(1 + \beta c_* N_1)^2} \exp\left(\frac{c_* N_1}{1 + \beta c_* N_1}\right) &= \frac{1}{4\kappa_*}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{(1 + \beta c_* N_1)^2}{N_1} = c_*. \quad (8)$$

Поскольку в начале решение уравнения (1) искалось в классе положительных функций, то  $c_* > 0$ . Легко видеть, что для этого необходимо в данном случае,  $\beta < 0,25$ . Это условие невырожденности теплового взрыва было получено также в [2].

Если  $\beta \ll 1$ , то можно пренебречь членом с  $\beta^2$ . Например, в частном случае, когда  $\beta = 0$ , из первого уравнения системы (7), имеем:  $\kappa_* = \frac{1}{e} \frac{1}{4N_1 A_1} = 0,8859 \frac{1}{e}$ .

Рассмотрим случай, когда  $\theta_0 \neq 0$ . Система (7) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left(\exp\left(\frac{c_* N_1}{1 + \beta c_* N_1}\right)\right) &= \frac{c_*}{4\kappa_*} + \frac{\theta_0}{\kappa_*}, \\ A_1 \frac{N_1}{(1 + \beta c_* N_1)^2} \exp\left(\frac{c_* N_1}{1 + \beta c_* N_1}\right) &= \frac{1}{4\kappa_*}. \end{aligned} \right\}$$

Проделав необходимые выкладки, окончательно получим при  $\beta \ll 1$ :

$$c_* = \frac{1 - 4N_1\theta_0}{N_1(1 - 2\beta)},$$

$$\kappa_* = \frac{1}{1,28} \{\exp[1,6\theta_0 - 1]\}^{\frac{2}{5}} \text{ при } \beta = 0.$$

Отсюда следует, что  $0 \leq \theta_0 < 0,6$ . Легко получить также зависимость  $\theta_m(\kappa)$ . На основании (4)  $\theta_m = c e^{-1}$ . Таким образом, указанную зависимость легко получить из первого уравнения системы (7). Характер зависимости представлен на рис. 2.

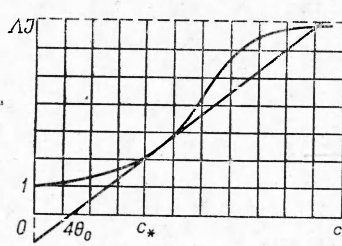


Рис. 1.

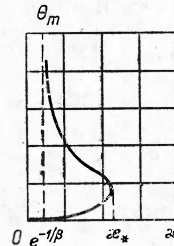


Рис. 2.

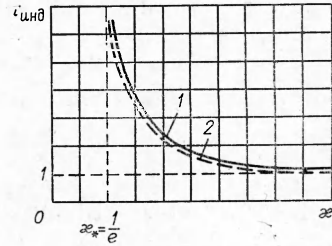


Рис. 3.

Переходим к вычислению  $\tau_{\text{инд}}$ . Как известно [1], для этого необходимо вычислить интеграл.

$$\tau_{\text{инд}} = \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \frac{\theta + \theta_0}{\kappa}}.$$

Введем замену переменных  $z = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$ , тогда  $\theta = \frac{z + 1}{z - 1}$ ;  $d\theta = \frac{2}{(1 - z)^2} dz$ .

Далее, пользуясь для вычисления интеграла формулой Гаусса [5] с закрепленными концами, получим при  $n=1$

$$\tau_{\text{инд}} = \frac{\frac{8}{3}\kappa}{\kappa \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right) - (1 + \theta_0)} + \frac{1}{6\left(1 - \frac{\theta_0}{\kappa}\right)}. \quad (9)$$

Формула (9) охватывает все случаи соотношений между предразогревом  $\theta_0$  и параметром  $\kappa$ . В соответствии с работой [1] рассмотрим частные случаи:

1)  $\theta_0 = 0, \beta = 0$ .

$$\tau_{\text{инд}} = \frac{\kappa(e + 16) - 1}{6(\kappa e - 1)}. \quad (10)$$

Графически зависимость между  $\tau_{\text{инд}}$  и  $\kappa$  представлена на рис. 3 (1 — по формуле (16), 2 — по работе [1]).

2)  $\beta = 0, 0 \leq \theta_0 < \frac{1}{e-1} \approx 0,6$ .

$$\tau_{\text{инд}} = \frac{8\kappa}{3[\kappa e - (1 + \theta_0)]} + \frac{\kappa}{6(\kappa - \theta_0)}. \quad (11)$$

3)  $\beta = 0, \theta_0 > 0,6$ .

В этом случае вычисления производятся также по формуле (11).

4)  $\theta_0 = 0, \beta \neq 0$ .

$$\tau_{\text{инд}} = \frac{8\kappa}{3\kappa \exp(1/1-\beta) - 1} + \frac{1}{6}$$

Графическая зависимость  $\tau_{\text{инд}}(\kappa)$  для всех разобранных случаев представлена на рис. 4 ( $1 - \theta_0 = 0; 2 - 0 < \theta < \frac{1+\theta_0}{e}; 3 - \theta > \frac{1+\theta_0}{e}$ ).

Отметим, что из (10) и (11) легко определить критические условия. В заключение приведем сопоставление вычислений по формулам (10) и (11) настоящей работы и (5) и (6) из [1]. Данные вычислений сведены в табл. 1.

Рассмотрим задачу о тепловом взрыве с учетом выгорания за период индукции. Система дифференциальных уравнений имеет вид (2) при начальных условиях (3). Функция  $\eta$  связана сложной функциональной зависимостью с безразмерной температурой и характеризует долю прореагировавшего вещества в случае неадиабатического взрыва. Однако эта функция входит в качестве множителя в первом уравнении системы (2). С другой стороны, из [6] следует, что в адиабатическом случае концентрация вещества связана с температурой линейной зависимостью. Учитывая эти обстоятельства, сначала, в первом приближении, для проведения качественного анализа исследуемого вопроса будем учитывать выгорание за период индукции в неадиабатическом случае, используя линейную зависимость между концентрацией вещества и температурой. Уравнение теплопроводности, как известно [6], имеет вид:

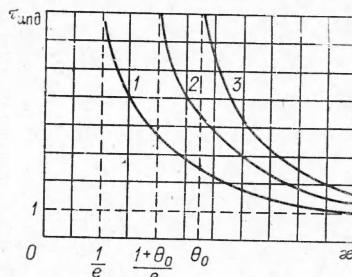


Рис. 4.

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{c_p} m_0^a \left( \frac{T_m - T}{T_m - T_0} \right)^a e^{-\frac{E}{RT}} - \frac{\alpha S}{c_p V} (T - T_0)$$

Далее, переходя обычным способом к безразмерным параметрам, получим:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \left( 1 - \frac{\theta}{\theta_m} \right) e^{\frac{\theta}{1+\beta\theta}} - \frac{\theta}{\kappa} \quad (12)$$

Здесь  $\theta_m = \frac{E(T_m - T_0)}{RT_0^2}$  — максимальная безразмерная температура.

В качестве аппроксимирующей функции безразмерной температуры выберем ряд (4) и ограничимся одним его членом. Проведем обыч-

Т а б л и ц а 1

| Формула    | Значения $\tau_{\text{инд}}$ при $\kappa$ , равном |          |      |        |        |        |       |          |
|------------|--|----------|------|--------|--------|--------|-------|----------|
|            | 0,5  | 1        | 1,5  | 2      | 2,5    | 3      | 4     | $\infty$ |
| (10)*      | 3,88   | 1,71     | 1,47 | 1,37   | 1,31   | 1,285  | —     | 1,15     |
| (5) из [1] | —  | 1,40     | 1,20 | 1,1435 | 1,1118 | 1,0917 | —     | 1        |
| (11)**     | —  | $\infty$ | 2,42 | 1,795  | 1,663  | 1,55   | 1,422 | 1,15     |
| (6) из [1] | —  | $\infty$ | 1,65 | 1,3862 | 1,275  | 1,2165 | 1,14  | 1        |

\*  $\theta_0 = 0$ .

\*\*  $\theta_0 = 1$ .

ную процедуру метода Бубнова — Галеркина с уравнением (12), получим окончательно:

$$A_1 \left(1 - \frac{cN_1}{\theta_m}\right) \exp\left(\frac{cN_1}{1 + \beta cN_1}\right) = \frac{c}{4x},$$

где  $A_1$  и  $N_1$  имеют тот же смысл, что и в формуле (6). Для нахождения критических условий, т. е. ( $x_*$  и  $c_*$ ), необходимо решить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left(1 - \frac{cN_1}{\theta_m}\right) \exp\left(\frac{cN_1}{1 + \beta cN_1}\right) &= \frac{c}{4x} \\ A_1 \exp\left(\frac{cN_1}{1 + \beta cN_1}\right) \left[ \left(1 - \frac{cN_1}{\theta_m}\right) \frac{N_1}{(1 + \beta cN_1)^2} - \frac{N_1}{\theta_m} \right] &= \frac{1}{4x} \end{aligned} \right\}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{1 - \frac{cN_1}{\theta_m}}{\left(1 - \frac{cN_1}{\theta_m}\right) \frac{N_1}{(1 + \beta cN_1)^2} - \frac{N_1}{\theta_m}} = c. \quad (13)$$

Легко видеть, что при  $\theta_m \gg 1$  уравнение (13) переходит в уравнение (8) без учета выгорания. После преобразований уравнение (13) может быть представлено в виде:

$$c^2 N_1^2 (\theta_m \beta^2 + 1) + c N_1 \theta_m (2\beta - 1) + \theta_m = 0. \quad (14)$$

Условие существования вещественных корней квадратного уравнения (14) дает верхнюю границу зависимости  $\gamma(\beta)$ , если учесть, что  $\gamma = 1/\theta_m$ :

$$\gamma \leq \frac{1}{4} - \beta.$$

Более детальное исследование зависимости  $\gamma(\beta)$  и ее связи с вырожденными режимами взрывных процессов приводится ниже, когда будет рассмотрена система (2). Сейчас же переходим к рассмотрению реакций второго порядка ( $a=2$ ). В этом случае соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d\theta}{d\tau} - \left(1 - \frac{\theta}{\theta_m}\right)^2 e^{\frac{\theta}{1+\beta\theta}} - \frac{\theta}{x}.$$

Выбирая аппроксимирующую функцию безразмерной температуры в том же виде и проведя процедуру метода Бубнова — Галеркина, получим аналогично предыдущему:

$$A_1 \left(1 - \frac{cN_1}{\theta_m}\right)^2 \exp\left(\frac{cN_1}{1 + \beta cN_1}\right) = \frac{c}{4x}.$$

Повторив теперь для этого уравнения все рассуждения относительно нахождения критических условий взрыва, изложенные выше, получим уравнение для определения параметра  $c$ :

$$\frac{1 - \frac{cN_1}{\theta_m}}{\left(1 - \frac{cN_1}{\theta_m}\right) \frac{N_1}{(1 + \beta cN_1)^2} - \frac{2N_1}{\theta_m}} = c. \quad (15)$$

Легко видеть, что и в этом случае при  $\theta_m \gg 1$  уравнение (15)

переходит в уравнение (8). После элементарных преобразований получим.

$$\beta^2 N_1^3 c^3 + c^2 N_1^2 (1 + \theta_m \beta^2 + 2\beta) + c N_1 (1 - \theta_m + 2\beta \theta_m) + \theta_m = 0.$$

Пренебрегая членом с  $\beta^2$ , получим квадратное уравнение относительно  $c$ , для которого условие вещественности корней имеет вид:

$$\beta \leq \frac{\theta_m^2 - 6\theta_m + 1}{4\theta_m(1 + \theta_m)}. \quad (16)$$

Если теперь в (16) перейти к зависимости  $\beta(\gamma)$  (8), а затем построить обратную функцию, то график ее будет иметь вид, представленный на рис. 5 (1 — для реакций первого порядка; 2 — для реакций второго порядка). Таким образом, реакции первого и второго порядков имеют весьма схожую в качественном отношении зависимость  $\gamma(\beta)$ , причем и в том и в другом случае кривые, ограничивающие области на рис. 5, представляют собой верхнюю грань возможных значений параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . Однако внутри этих областей при определенных сочетаниях параметров  $\beta$  и  $\gamma$  в соответствии с работой [2] можно выделить три характерные подобласти.

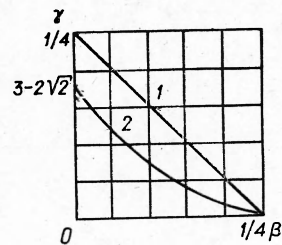


Рис. 5.

Для выяснения этого вопроса переходим к исследованию системы (2). Произведем замену независимой переменной  $\tau$ :

$$z = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}, \quad \tau = \frac{1 + z}{1 - z}, \quad d\tau = \frac{2}{(1 - z)^2} dz.$$

Теперь система (2) примет вид (случай мономолекулярной реакции):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} \cdot \frac{(1-z)^2}{2} &= (1 - \eta) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - \frac{\theta}{z}, \\ \frac{d\eta}{dz} \cdot \frac{(1-z)^2}{2} &= \gamma (1 - \eta) \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \theta(-1) &= \theta(+1) = 0, \\ \eta(-1) &= 0, \quad \eta(+1) = 1. \end{aligned}$$

Аппроксимирующие функции:

$$\theta = c_1 (z + 1)^2 (z - 1)^2; \quad \eta = c_2 (z + 1)^2. \quad (18)$$

Подставим (18) в (17) и проделаем обычную процедуру метода Бубнова — Галеркина. При этом вычисление интегралов, которые содержат экспоненциальную функцию в подынтегральном выражении, производится приближенным методом Гаусса с закрепленными концами [5]  $n = 1$ . Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательно получившуюся систему алгебраических уравнений относительно  $c_1$  и  $c_2$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{128}{315} c_1 &= (1 - c_2 e^{-1}) \frac{4}{3} \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right) - \frac{c_1}{z} \cdot \frac{256}{315}, \\ -0,16c_2 &= \frac{4}{3} \gamma e^{-2} (1 - 4c_2 e^{-2}) + \frac{4}{3} \gamma (1 - c_2 e^{-1}) \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(x) = \frac{128x + 2}{315x}, \quad a(\gamma) = \frac{0,16e}{\gamma} - \frac{16}{3e^3}, \quad A = \frac{4}{3c_1} \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right),$$

$$r_0 = \frac{4}{3e^2 a(\gamma)}, \quad \psi = \frac{ea(\gamma)}{\varphi(x)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{4}{3e\varphi(x)}. \quad (20)$$

Учитывая (20), из (19) легко получить выражение  $c_2$  через  $c_1$

$$c_2 = -\frac{1}{a(\gamma)} \left[ c_1 \varphi(x) + \frac{4}{3e} \right],$$

подставив которое в первое уравнение системы (19), получим

$$c_1 \varphi(x) = \left[ 1 + \frac{c_1}{\psi} + r_0 \right] \frac{4}{3} \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right). \quad (21)$$

Выписав критические условия взрыва для уравнения (21), получим:

$$c_1 \varphi(x) = \left[ 1 + \frac{c_1 \varphi(x) + \frac{4}{3e}}{ea(\gamma)} \right] \frac{4}{3} \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right),$$

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{ea(\gamma)} \cdot \frac{4}{3} \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right) + \frac{1}{(1 + \beta c_1)^2} \left[ 1 + \frac{c_1 \varphi(x) + \frac{4}{3e}}{ea(\gamma)} \right] \times$$

$$\times \frac{4}{3} \exp\left(\frac{c_1}{1 + \beta c_1}\right).$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим после преобразований квадратное уравнение относительно  $c_1$ . Далее если учесть, что  $\beta^2 \ll 1$ , а  $\psi \gg 1$ , окончательно имеем для  $c_1 > 0$ :

$$c_1 = \frac{1}{2} \left\{ (1 - 2\beta)(\psi + \varepsilon_0) \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{(1 - 2\beta)^2 (\psi + \varepsilon_0)}} \right] \right\}.$$

Так как второе слагаемое в подкоренном выражении мало, то

$$c_1^* \approx \frac{1}{1 - 2\beta}. \quad (22)$$

Теперь разрешим уравнение (21) относительно  $x$  с учетом (20)

$$x = \frac{2 \left[ 1 - c_1 \frac{A}{ea(\gamma)} \right]}{2,52(1 + r_0)A - 1 + c_1 \frac{A}{ea(\gamma)}}. \quad (23)$$

Дифференцируя (23) по  $\beta$ , с учетом (20) получим искомую зависимость после приравнивания указанной производной к нулю

$$a(\gamma) = \frac{\frac{8}{3} \exp\left(\frac{\beta}{1 - \beta}\right)}{2 - \frac{1 - 2\beta}{(1 - \beta)^2}}.$$

Пользуясь малостью  $\beta$ , получим после разложения экспоненты и пренебрежения слагаемыми с  $\beta^2$

$$\gamma = \frac{0,16e}{2,932 + 2,67\beta}. \quad (24)$$

На рис. 6 графически даны результаты вычислений по формуле (24) (1) и сравнение с аналогичными данными из работы [2] (2).

Сравнение результатов вычислений для случая мономолекулярной реакции представлено в табл. 2.

Переходим к нахождению  $\kappa_*$ . Подставляя (22) в (21), получим с учетом (20)

$$\kappa_* = \frac{2 \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{ea(\gamma)} \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right) \right]}{2,52(1+r_0) \frac{4}{3} (1-2\beta) \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right) - 1 + \frac{4}{3} \frac{1}{ea(\gamma)} \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right)}$$

Если теперь воспользоваться малостью  $\beta$ , то можно записать:

$$\kappa_* = \frac{2 \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{1+\beta}{a(\gamma)} \right]}{2,52(1+r_0) \frac{4e}{3} (1-\beta) + \frac{4}{3} \cdot \frac{1+\beta}{a(\gamma)}} \quad (25)$$

Из (25) видно, что  $\kappa_*$  слабо меняется при малых  $\beta$  и  $\gamma$ , что также подтверждается результатами работы [2].

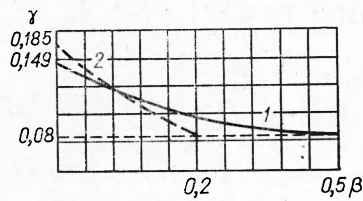


Рис. 6.

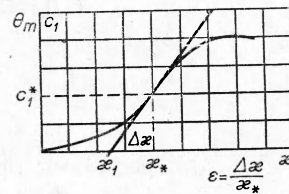


Рис. 7.

Переходим к определению ширины переходной зоны  $\epsilon$ . В работе [2]  $\epsilon$  определяется по рис. 7. В нашем случае  $\theta_{\max} = c_1$ , поэтому необходимо исследовать зависимость  $c_1(\kappa)$ . Практически удобнее исследовать обратную функцию  $\kappa(c_1)$ . Легко видеть, что

$$\Delta \kappa = c_1^* \cdot \kappa'_{c_1}(c_1^*)$$

Дифференцируя (23) по  $c_1$ , получим с учетом (22):

$$\kappa'_{c_1}(c_1^*) = \frac{5,04(1+r_0) \left[ \frac{4\beta(1-2\beta)}{3(1-4\beta)} \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right) + \frac{16(1-2\beta)^2}{9ea(\gamma)} \exp^2\left(\frac{1}{1-\beta}\right) \right]}{\left[ 2,52(1+r_0) \frac{4}{3} (1-2\beta) \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right) - 1 + \frac{4}{3ea(\gamma)} \exp\left(\frac{1}{1-\beta}\right) \right]^2}$$

Отсюда видно, что при  $\beta \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$   $\kappa'_{c_1}(c_1^*) \rightarrow 0$ , а это, в свою очередь, означает, что  $\epsilon \rightarrow 0$ . При этом  $\frac{dc_1}{d\kappa} \rightarrow \infty$ . Критические условия взрыва выражены четко. Наоборот, при  $\beta \rightarrow 0,25$   $\kappa'_{c_1}(c_1^*) \rightarrow \infty$ , из чего следует, что  $\epsilon \rightarrow \infty \gg 1$ .

Автор выражает искреннюю благодарность проф. А. Г. Мержанову и его сотрудникам за постоянную помощь и внимание к проделанной работе.

Таблица 2

| Вычисления      | Значения $\gamma$ при $\beta$ , равном |        |        |       |       |        |       |
|-----------------|--|--------|--------|-------|-------|--------|-------|
|                 | 0                                      | 0,03   | 0,06   | 0,08  | 0,1   | 0,15   | 0,2   |
| По формуле (24) | 0,1485                                 | 0,1445 | 0,1405 | 0,138 | 0,136 | 0,1305 | 0,125 |
| По работе [2]   | 0,185                                  | 0,17   | 0,15   | 0,135 | 0,125 | 0,095  | 0,08  |

Поступила в редакцию  
30/VIII 1971



## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Мержанов, Ю. М. Григорьев. Докл. АН СССР, 1967, 176, 6.
2. А. Г. Мержанов, Е. Г. Зеликман, В. Г. Абрамов. Докл. АН СССР, 180, 1968.
3. С. И. Анисимов, Э. И. Виткин. ПМТФ, 1966, 4.
4. Ю. А. Гостинцев. ФГВ, 1967, 3, 3.
5. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967.
6. Я. Б. Зельдович, В. В. Воеводский. Тепловой взрыв и распространение пламени в газах. М., 1947.

УДК 536.46

### ЗАМЕЧАНИЕ О СТРУКТУРЕ ФАКЕЛА ОДНОРОДНОЙ СМЕСИ

*Л. А. Вулис*

(Ленинград)

1. В настоящее время прикладная теория горения газов совершает медленный, но вполне отчетливый переход от качественного истолкования отдельных явлений к количественному расчету процесса — пока еще для простейших случаев. Трудности на этом пути известны; главные из них — сложность расчета турбулентного течения и горения [1] и отсутствие эффективных («глобальных» — [2]) кинетических констант. Оба эти вопроса, препятствующие полноценному использованию в технике результатов современной теории горения, должны решаться путем сочетания целенаправленности эксперимента и расчета на ЭЦВМ.

В настоящей заметке обсуждается аэродинамическая структура гомогенного факела. Полное решение задачи следовало бы искать в численном расчете двумерного (плоского или осесимметричного) факела, на основе уравнений Навье — Стокса, строгих для ламинарного течения или дополненных эмпирическими данными для турбулентного. В этих уравнениях пришлось бы учесть одну из оправдавших себя в расчете струй и факелов полуэмпирических схем турбулентного переноса и соответствующим образом выбранные константы — характеристики суммарной кинетики реакций горения. Примеры такого рода и подробная методика численного решения эллиптических уравнений с учетом процесса горения при конечной скорости реакций указаны, например, в работе [3].

Целесообразно, не прибегая к столь сложной процедуре, рассмотреть в предварительном плане качественную картину явления и из простых физических соображений выяснить возможности развитой обработки результатов опыта и их последующего истолкования. Это полезно и потому, что численные решения, о которых здесь говорилось, неизбежно должны основываться на подробном эксперименте по исследованию турбулентного факела. Конкретно речь будет идти об обнаруженном сравнительно давно рядом авторов (см., например, [4, 5] и др.) эффекте ускорения газа при пересечении зоны горения свободного турбулентного факела однородной смеси. Курьезно, но в какой-то мере показательно, что на проходившем недавно Третьем Всесоюзном симпозиуме по горению и взрыву в замечаниях по докладу о численном расчете ламинарного факела [6] высказывались отдельные сомнения в правомерности приближенной изобарной схемы потока (расче-