

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН И БАЛОК

А. Г. Колпаков

Сибирская государственная академия телекоммуникаций и информатики,
630009 Новосибирск

Предложена модификация метода усреднения, позволяющая производить расчет усредненных характеристик стержневых конструкций периодического строения типа мачт, ажурных перекрытий и т. п. методами сопротивления материалов.

Введение. Вопросы описания стержневых конструкций типа мачт, ажурных перекрытий и т. п. при помощи непрерывных моделей, как и обратная задача [1], поднимаются в литературе по мере развития расчетных методов, как математических, так и численных. Состояние вопроса до 1988 г. освещено в [2, 3]. В последнее время к решению задачи применялся появившийся в 70-х годах метод гомогенизации (усреднения) [4–7].

Полученные в конце 80-х годов результаты [8–11] позволяют построить инженерную теорию расчета стержневых конструкций на основе метода гомогенизации [4, 5] и классических методов сопротивления материалов. В [12] такое комбинирование методов было использовано для расчета конструкций с элементами типа пластин.

Основным элементом метода гомогенизации является решение так называемой ячеистой задачи (ЯЗ). В работах [8, 9] эта задача сведена к задаче теории пластин/балок и получены оценки возникающих погрешностей. Интерес к задачам усредненного описания стержневых структур делает целесообразным дальнейшее развитие методов расчета, основанных на теории усреднения. Данная работа посвящена построению моделей усредненного описания конструкций малой толщины (конструкций типа неоднородных пластин и балок [13, 14]). На рис. 1 представлены примеры конструкций, подобных пластине (а) и балке (б), справа показаны ячейки периодичности этих конструкций (P_1 — области, занятые материалом, m — период, γ — боковая поверхность ЯП).

1. Постановка задачи. Основным результатом математической теории усреднения [4, 5] является доказательство того, что неоднородной периодической среде (в частности, среде с пустотами, к которой относятся конструкции) можно поставить в соответствие однородное тело, близкое по механическому поведению, если характерный размер ячейки периодичности (ЯП) неоднородного тела $\varepsilon \ll 1$ (рис. 1). В [13] эти результаты обобщены на пластины, в [14] — на балки. Отметим, что параметр ε характеризует также и тонкостенность конструкции.

Соответствие между локальными упругими постоянными неоднородной среды $a_{ijkl}(\mathbf{y})$ и ее усредненными постоянными устанавливается следующим образом [12–14]. Решается ячеистая задача:

для балок

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha}}{\partial y_l} + a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha^\nu \right) &= 0 \text{ в } P_1, \\ \left(a_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha}}{\partial y_l} + a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha^\nu \right) n_j &= 0 \text{ на } \gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

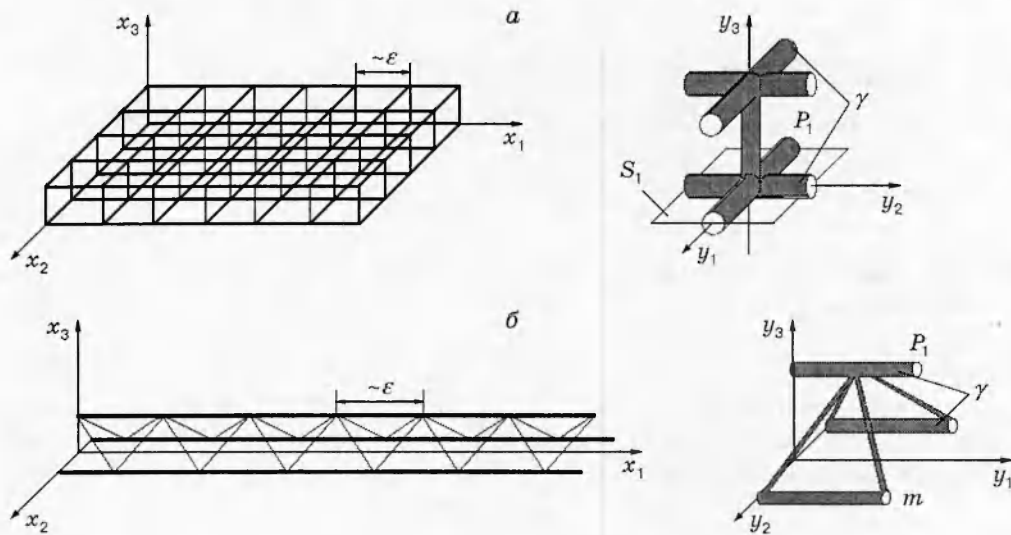


Рис. 1

$\langle N^{\nu\alpha} \rangle(y)$ периодична по y_1 с периодом m , $\langle N^{\nu\alpha} \rangle = 0$);
для пластин

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl}(y) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha\beta}}{\partial y_l} + a_{ij\alpha\beta}(y) y_3^\nu \right) = 0 \text{ в } P_1, \quad (1.2)$$

$$\left(a_{ijkl}(y) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha\beta}}{\partial y_l} + a_{ij\alpha\beta}(y) y_3^\nu \right) = 0 \text{ на } \gamma$$

$\langle N^{\nu\alpha\beta} \rangle(y)$ периодична по y_1, y_2 с ЯП S_1 , $\langle N^{\nu\alpha\beta} \rangle = 0$, $\nu = 0, 1$).

Здесь P_1 — ячейка периодичности в безразмерных координатах $y = x/\varepsilon$; γ — ее боковая поверхность, на которой не ставится условие периодичности (рис. 1); $L_1 = [0, m]$ — проекция ЯП на ось Oy_1 для балки; S_1 — проекция ЯП на плоскость Oy_1y_2 для пластины; $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\text{mes} S_{\text{пр}}} \int_{P_1} \cdot dy$ — среднее по ЯП P_1 ; $S_{\text{пр}} = L_1$ или S_1 .

После решения ЯЗ характеристики тела как однородного вычисляются по формулам: для балок [9]

$$S_{\alpha\beta}^{\nu+\mu} = \left\langle \left(a_{1111}(y) y_\alpha^\nu + a_{11kl}(y) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha}}{\partial y_l} \right) y_\beta^\mu \right\rangle; \quad (1.3)$$

для пластин [8]

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\nu+\mu} = \left\langle \left(a_{\alpha\beta\gamma\delta}(y) y_3^\nu + a_{\alpha\beta kl}(y) \frac{\partial N_k^{\nu\gamma\delta}}{\partial y_l} \right) y_3^\mu \right\rangle. \quad (1.4)$$

Индексы ν, μ принимают значения 0, 1; индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ принимают значения 1, 2 для балок и 2, 3 для пластин. Здесь S_{\dots}^0 — жесткости на растяжение-сжатие, S_{\dots}^1 — перекрестные жесткости, S_{\dots}^2 — жесткости на изгиб-кручение усредненных конструкций (балок, пластин).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для однородного цилиндрического стержня ЯЗ (1.1) и формулы (1.3) приводятся к полученным в [7]. Для сетчатых оболочек описанный подход приводит к результатам, полученным в [3] (см. [12]).

2. Сведение ЯЗ к задачам сопротивления материалов. Задачи (1.1), (1.2) являются задачами теории упругости специального вида. Специфика этих задач состоит в наличии свободных членов вида $(\partial/\partial y_j)(a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})y_\beta^k)$ и периодических краевых условий. С последними не удастся сделать каких-либо преобразований, приводящих их к более традиционным, за исключением частных случаев симметричной ЯП. Впрочем, это не вызывает проблем, так как условия периодичности хорошо переформулируются в терминах теории сопротивления материалов.

Сложности при решении ЯЗ создают свободные члены, соответствующие нетипичным массовым силам, от которых можно избавиться при $\nu = 0$ известной заменой [4, 5]: для балок

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}^0 + y_1 \mathbf{e}_1, \tag{2.1}$$

для пластин

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}^{0\alpha\beta} + y_\alpha \mathbf{e}_\beta,$$

в результате чего для перемещений \mathbf{W} получаем из (1.1), (1.2) стандартные уравнения теории упругости без массовых сил.

Покажем, что аналогичную (2.1) замену можно сделать и при $\nu = 1$ (для задачи изгиба и кручения). Для этого достаточно проверить, что существуют такие перемещения ξ , что для деформаций $e_{kl} = (1/2)(\partial \xi_k / \partial y_l + \partial \xi_l / \partial y_k)$ выполнены равенства: для балок

$$a_{ijkl}(\mathbf{y})e_{kl} + a_{ij11}(\mathbf{y})y_\beta = 0, \tag{2.2}$$

для пластин

$$a_{ijkl}(\mathbf{y})e_{kl} + a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})y_\beta = 0$$

или что равносильно (2.2) для балок

$$e_{kl} = -c_{klj}(\mathbf{y})a_{ij11}(\mathbf{y})y_\beta, \tag{2.3}$$

для пластин

$$e_{kl} = -c_{klj}(\mathbf{y})a_{ij\alpha\beta}(\mathbf{y})y_\beta,$$

где $\{c_{ijkl}\}$ — тензор жесткостей, обратный $\{a_{ijkl}\}$.

Из (2.3) следует, что для балок

$$e_{kl} = -\delta_{k1}\delta_{l1}y_\beta, \tag{2.4}$$

для пластин

$$e_{kl} = -\delta_{kl}\delta_{l\beta}y_\beta.$$

Здесь $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Можно проверить, что деформации (2.4) удовлетворяют классическим условиям совместности [15].

Таким образом, искомые перемещения ξ существуют. Ниже для конкретных случаев они выписаны в явном виде.

Обозначим через $\xi^{\nu\alpha\beta}$ следующие функции: для балок

$$\xi^{\nu\alpha\beta} = \xi^{\nu\alpha}, \quad \xi^{0\alpha} = y_1 \mathbf{e}_1, \quad \xi^{1\beta} = \xi; \tag{2.5}$$

для пластин

$$\xi^{0\alpha\beta} = y_\alpha e_\beta, \quad \xi^{1\alpha\beta} = \xi. \quad (2.6)$$

Отметим, что функция ξ зависит от β для балок и от α, β — для пластин.

Используя функции (2.5), (2.6), ячеечную задачу (1.1), (1.2) можно записать единообразно

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl}(y) \frac{\partial W_k}{\partial y_l} \right) = 0 \text{ в } P_1, \quad a_{ijkl}(y) \frac{\partial W_k}{\partial y_l} n_j = 0 \text{ на } \gamma, \quad (2.7)$$

где функция $\mathbf{W} - \xi$ периодична по $y \in S_{\text{пр}}$, $\langle \mathbf{W} - \xi \rangle = 0$,

$$\xi = \xi^{\nu\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

При решении задач следует иметь в виду определения (2.5), (2.6).

3. Метод решения ЯЗ (2.7). Задача (2.7) представляет собой типичную задачу теории упругости, которую можно свести к задачам теории балок/стержней [8–11]. В [8, 9] показано, что ей соответствует задача теории балок, записанная в соответствии со следующими условиями:

- 1) массовые и поверхностные силы равны нулю;
- 2) во внутренних узлах сопряжений балок выполнены условия жесткого сопряжения, суммы усилий и моментов в узлах сопряжений равны нулю;
- 3) в граничных узлах выполнены условия периодичности для перемещения $\mathbf{W} - \xi$ соответствующих им сил и моментов.

Под внутренними узлами понимаются узлы сопряжения балок/стержней, под граничными — узлы, лежащие на поверхностях ЯП, на которых ставятся условия периодичности.

В [8–11] результаты получены для трехмерной (не тонкой) структуры. Однако поскольку ЯЗ (2.7) оказывается единой для всех случаев (для трехмерного композита, тонкой конструкции, конструкции малого диаметра меняется только функция $\xi^{\nu\alpha\beta}$ в (2.8)), то все результаты переносятся на два последних случая дословным повторением рассуждений из [8–11]. Некоторые затруднения возникают при наличии шарнирных соединений, которым не соответствует задача теории упругости в описанном выше виде. Шарнирные соединения можно описать в рамках контактных задач при помощи вариационных неравенств. Для таких задач вопрос об усреднении решается положительно [16, 17]. Рассмотрение ЯЗ для ячеечной конструкции с шарнирными соединениями приводит к задаче с условиями 1, 3, где вместо условия 2 используется условие: во внутренних узлах выполнены условия сопряжения для перемещений и усилий при отсутствии моментов.

Поведение балок и стержней можно описывать в терминах обобщенных перемещений [18] их концов ($\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-$).

Усилия \mathbf{N} , \mathbf{Q} (осевые и поперечные) и моменты M_α относительно оси Oy_α в балке/стержне при отсутствии массовых сил (см. условие 1) определяются обобщенными перемещениями. Эта зависимость может быть записана как в локальной (связанной с балкой/стержнем) системе координат, так и в системе координат $y_1 y_2 y_3$.

Условия сопряжения во внутренних точках (см. условие 2) могут быть удовлетворены путем введения обобщенных перемещений узлов.

Условие периодичности $\mathbf{W} - \xi$ (см. условие 3) также можно сформулировать в терминах обобщенных перемещений узлов:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{\Gamma(i)}, \quad (3.1)$$

где i — узел, принадлежащий грани ЯП; $\Gamma(i)$ — соответствующий узел, принадлежащий противоположной грани; $\{\mathbf{u}_i\}$ — обобщенные перемещения, соответствующие $\mathbf{W} - \xi$.

Условия для усилий и моментов (см. условие 2) для внутренних узлов имеют вид

$$\sum_{j \in K_i} [\mathbf{N}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) + \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)] = 0, \quad \sum_{j \in K_i} M_\alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0 \quad (3.2)$$

(K_i — узлы, соединенные с узлом i конструктивными элементами).

Условия периодичности для сил и моментов (см. условие 3) в граничных точках имеют вид (3.2), если для узла i , лежащего на грани ЯП, заменить K_i на

$$K_i \cup K_{\Gamma(i)}. \quad (3.3)$$

Из (3.1)–(3.3) перемещения \mathbf{W} определяются с точностью до перемещения твердого тела. Поэтому условие $\langle \mathbf{W} - \boldsymbol{\xi} \rangle = 0$ может быть заменено на $\langle \mathbf{W} \rangle = 0$ и записано в виде

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{u}_i = 0 \quad (3.4)$$

(m — общее число узлов). Условие (3.4) не возникает из вычисления интегралов в равенстве $\langle \mathbf{W} \rangle = 0$, но равносильно ему.

Уравнения (3.1)–(3.4) представляют собой алгебраическую систему вида

$$T\{\mathbf{u}_i\} = \mathbf{b}. \quad (3.5)$$

Система (3.5) есть ячеечная задача, записанная в терминах теории сопротивления материалов.

4. Вычисление усредненных жесткостей. Формулы (1.3), (1.4) предполагают интегрирование по структурным элементам ЯП. Это можно осуществить, представляя решения ЯЗ через обобщенные перемещения $\{\mathbf{u}_i\}$. Однако можно получить выражения (1.3), (1.4) через напряжения на гранях ЯП, аналогичные выражениям для однородных пластин и балок. Покажем, как это можно осуществить. Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\nu\alpha} &= a_{ij11}(y)y_\alpha^\nu + a_{ijkl}(y) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha}}{\partial y_l} \quad \text{для балок,} \\ \sigma_{ij}^{\nu\alpha\beta} &= a_{ij\alpha\beta}(y)y_\beta^\nu + a_{ijkl}(y) \frac{\partial N_k^{\nu\alpha\beta}}{\partial y_l} \quad \text{для пластин.} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отметим, что величины $\sigma_{ij}^{\nu\alpha}$ и $\sigma_{ij}^{\nu\alpha\beta}$ равны $a_{ijkl}(\partial W_k / \partial y_l)$, где \mathbf{W} является решением задачи (2.7).

Ячейку периодичности считаем (что не ограничивает общности) равной $[-1/2, 1/2]$ для балок и равной $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ для пластин.

ЯЗ можно записать для напряжений σ_{ij} (под σ_{ij} понимаются $\sigma_{ij}^{\nu\alpha}$ или $\sigma_{ij}^{\nu\alpha\beta}$ в зависимости от рассматриваемой задачи) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} = 0 \quad \text{в } P_1, \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (4.2)$$

Изложим метод подсчета величин $S_{\alpha\beta}^{1+\nu}$ для балки. Умножим уравнения в (4.2) на $y_\beta y_1$ ($\beta = 2, 3$) и результат проинтегрируем по частям. С учетом краевого условия в (4.2) получим

$$-\langle \sigma_{i1}^{\nu\alpha} y_\beta \rangle - \frac{1}{\text{mes} S_{\text{нп}}} \int_{P_1} \sigma_{i\beta}^{\nu\alpha} y_1 dy + \frac{1}{\text{mes} S_{\text{нп}}} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sigma_{i1}^{\nu\alpha} y_1 y_\beta dy = 0. \quad (4.3)$$

Здесь $\langle \sigma_{i1}^{\nu\alpha} y_\beta \rangle$ равно $S_{\alpha\beta}^{1+\nu}$ (см. (1.3), (4.1)); Γ_+ , Γ_- — противоположные грани ЯП (рис. 1). При этом $\sigma_{i1}^{\nu\alpha}$ периодичны, $y_1 = \pm 1/2$ на Γ_\pm ; $\text{mes} S_{\text{пр}} = 1$. Тогда интеграл в последнем слагаемом в (4.3) равен

$$\int_{\Gamma_+} \sigma_{i1}^{\nu\alpha} y_\beta dy = \sum_{i \in \Gamma_+} [(\mathbf{N}^{\nu\alpha} + \mathbf{Q}^{\nu\alpha})_{1i} y_{\beta i} + M_{\beta i}^{\nu\alpha}], \quad (4.4)$$

где $(\mathbf{N}^{\nu\alpha} + \mathbf{Q}^{\nu\alpha})_{1i}$ — проекция сил в i -м граничном узле на ось Oy_1 ; $y_{\beta i}$ — координата i -го граничного узла по оси Oy_β ; $M_{\beta i}^{\nu\alpha}$ — момент в i -м граничном узле ($\beta = 2, 3$).

При этом в i -м граничном узле

$$\mathbf{N}^{\nu\alpha} = \sum_{j \in K_i} \mathbf{N}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j), \quad \mathbf{Q}^{\nu\alpha} = \sum_{j \in K_i} \mathbf{Q}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j), \quad M_{\beta i}^{\nu\alpha} = \sum_{j \in K_i} M_\beta(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j). \quad (4.5)$$

Интеграл по P_1 в (4.3) равен нулю. Чтобы убедиться в этом, умножим уравнения в (4.2) на y_1^2 и проинтегрируем результат по частям. С учетом граничного условия из (4.2) получим

$$-2 \int_{P_1} \sigma_{i1}^{\nu\alpha} y_1 dy + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \sigma_{i1}^{\nu\alpha} y_1^2 dy = 0. \quad (4.6)$$

В последнем интеграле в (4.6) обе функции σ_{i1} и y_1^2 периодичны по y_1 , в силу чего интеграл по $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ равен нулю. Откуда при $i = \beta$ и следует наше утверждение.

После чего из (4.3), (4.4) получаем равенство

$$S_{\alpha\beta}^{1+\nu} = \sum_{i \in \Gamma_+} [(\mathbf{N}^{\nu\alpha} + \mathbf{Q}^{\nu\alpha})_{1i} y_{\beta i} + M_{\beta i}^{\nu\alpha}]. \quad (4.7)$$

Аналогично можно получить выражение

$$S_{\alpha\beta}^{0+\nu} = \sum_{i \in \Gamma_+} (\mathbf{N}^{0\alpha} + \mathbf{Q}^{0\alpha})_{1\alpha},$$

используя равенство [13]

$$\int_{P_1} \sigma_{\beta 1}^{\nu\gamma\delta} y_1 dy = 0.$$

Для пластин выражения $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{u+\nu}$ через граничные значения сил и моментов можно получить путем умножения уравнения (4.2) на $y_\beta y_\gamma y_\delta$ и интегрирования результата по частям. Выкладки аналогичны приведенным выше. Формулы для $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{1+\nu}$, $S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{0+\nu}$ совпадают с (4.7), только следует учесть, что σ_{ij} и \mathbf{N} , \mathbf{Q} , M_α имеют соответствующие индексы. Отметим, что \mathbf{N} , \mathbf{Q} , M_α определяются через $\{\mathbf{u}_i\}$ — решения задачи (3.5).

5. Стержневые конструкции. Рассмотрим стержневую ячеичную конструкцию. Элементы ячеичной конструкции работают только на растяжение-сжатие. Тогда $Q = 0$, $M_\beta = 0$, а осевые усилия в стержне есть

$$\mathbf{N} = E(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-, \mathbf{l})\mathbf{l}/|\mathbf{l}|, \quad (5.1)$$

где E — жесткость стержня; \mathbf{l} — его направляющий вектор; $|\mathbf{l}|$ — длина вектора.

Уравнения (3.1) с учетом (5.1) принимают вид

$$\sum_{j \in K_i} E_{ij}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \mathbf{l}_{ij})\mathbf{l}_{ij}/|\mathbf{l}_{ij}| = 0 \quad (5.2)$$

(индексом ij — помечен стержень, идущий из i -го узла в j -й; E_{ij} — жесткость этого стержня).

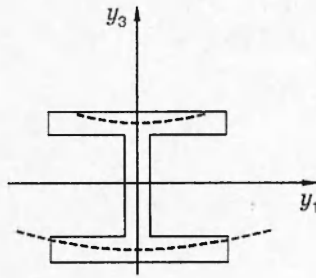


Рис. 2

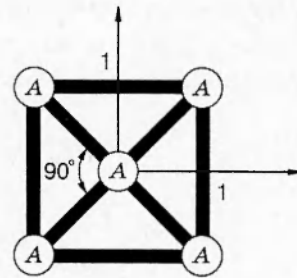


Рис. 3

Из (4.7) для рассматриваемого случая получаем

$$S_{\alpha\beta}^{1+\nu} = \sum_{i \in \Gamma_+} N_{1i}^{\nu\alpha} y_{\beta i}, \quad S_{\alpha\beta}^{0+\nu} = \sum_{i \in \Gamma_+} N_{1i}^0. \tag{5.3}$$

Решение (2.4) для балки, рассматриваемой как трехмерное тело, имеет вид [19]

$$\xi_1 = y_1 y_2, \quad \xi_2 = (1/2)y_1^2 + y_3, \quad \xi_3 = -y_2;$$

для балки, рассматриваемой как плоское тело:

$$\xi_1 = y_1 y_3, \quad \xi_3 = -(1/2)y_3^2. \tag{5.4}$$

6. Примеры расчета усредненных жесткостей. Однородная балка. Пусть ЯП состоит из одного элемента, лежащего на оси Oy_1 . Тогда $y_3 = 0, Q = 0, N_{11} = E, M_1^{\nu 3} = D$, где E, D — жесткости балки на растяжение и изгиб.

Балка с ЯП I-образной формы. Плоская I-образная ЯП представлена на рис. 2 (деформированная ЯП показана штриховой линией). В силу симметрии ЯП и наличия симметрии у функции (5.4) деформация ЯП сводится к растяжению (сжатию) верхней (нижней) балки ЯП и смещению ЯП по оси как твердого тела. С учетом формулы (5.4) получим $Q^1 = 0, M^{13} = 0, N_i^{13} = \pm(1/2)E$ для верхней (нижней) балки, $y_{3i} = \pm(1/2)H$. Жесткость на изгиб, согласно (4.7), равна

$$S_{33}^2 = \sum_{i=1}^2 N_{1i}^{13} y_{3i} = 2E \left(\pm \frac{1}{2} \right) \left(\pm \frac{1}{2} H \right) = \frac{1}{2} H E.$$

Рассмотрим изображенную на рис. 3 плоскую ячеичную конструкцию ($P_1 = [-1, 1] \times [-1, 1]$) как стержневую (A — шарниры) и как балочную (A — жесткие соединения).

Стержневая конструкция. С учетом симметрии задача сводится к расчету деформаций при перемещении узлов ЯП в направлении оси Oy_1 . Верхние узлы смещаются друг от друга, нижние — друг к другу. Усилия в верхнем и нижнем горизонтальных стержнях равны $\mp(1/2)E$. С учетом $y_3 = \pm 1$ из (5.3) получим жесткость на изгиб: $S_{33}^2 = E_1$.

Балочная конструкция. Необходимо решить задачу о растяжении — изгибе системы балок. Из решения этой задачи и (4.7) следует выражение для жесткости на изгиб

$$S_{33}^2 = E_1 + 6(\sqrt{2} + 1) \frac{D}{6D/E + 1/\sqrt{2}}. \tag{6.1}$$

Здесь E_1 — жесткость на растяжение горизонтальных балок (считается равной для обеих балок); E, D — жесткости на растяжение и изгиб наклонных балок (тоже считаются равными). Как видно, если жесткость на изгиб мала ($D \ll E$), то в (6.1) последним слагаемым можно пренебречь по сравнению с E_1 при E, E_1 одного порядка.

7. Термоупругие характеристики балок. Задача термоупругости для трехмерных композиционных тел рассмотрена в [20, 21], для пластин — в [22–24], для балок — в [25]. Ячеечная задача термоупругости имеет вид [22–25]

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k^0}{\partial y_l} + \beta_{ij}(\mathbf{y}) \right) = 0 \quad \text{в } P_1,$$

$$\left(a_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k^0}{\partial y_l} + \beta_{ij}(\mathbf{y}) \right) n_j = 0 \quad \text{на } \gamma.$$

Здесь $\mathbf{N}^0(\mathbf{y})$ — периодическая функция (см. (1.1), (1.2)).

Термоупругие характеристики вычисляются по формулам: для балок

$$\alpha_{\beta}^{\nu} = \left\langle \left(\beta_{11}(\mathbf{y}) + a_{11kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k^0}{\partial y_l} \right) y_{\beta}^{\nu} \right\rangle,$$

для пластин

$$\alpha_{\alpha\beta}^{\nu} = \left\langle \left(\beta_{\alpha\beta}(\mathbf{y}) + a_{\alpha\beta kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial N_k^0}{\partial y_l} \right) y_{\beta}^{\nu} \right\rangle.$$

Индекс ν принимает значения 0, 1, значения индексов α, β см. в п. 1.

Вводя напряжения $\sigma_{ij} = \beta_{ij}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y}) \partial N_k^0 / \partial y_l$, получаем запись ЯЗ в виде (4.2). При этом \mathbf{N}^0 могут интерпретироваться как перемещения.

После чего получаем, что $\alpha_{\beta}^0, \alpha_{\beta}^1, \alpha_{\alpha\beta}^0, \alpha_{\alpha\beta}^1$ даются формулами (4.7), в которых $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, M_{\alpha}$ определяются из решения ЯЗ термоупругости. ЯЗ термоупругости формируется исходя из условий 1–3. Величины $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, M_{\alpha}$ для элементов ячеечной конструкции находят по определяющим соотношениям термоупругих стержней/балок:

$$N = E(\varepsilon - \beta\theta), \quad M = D(\rho - \beta^*\theta),$$

где E, D — жесткости на растяжение и изгиб; β, β^* — коэффициенты теплового расширения (осевого и изгибного). Для однородных цилиндрических балок $\beta^* = 0$.

8. Стержневые термоупругие балки и управление их характеристиками. Рассмотрим стержневую конструкцию малого диаметра, образованную из стержней. Ее определяющие уравнения как одномерной балки имеют вид [13]

$$N = A^0 \varepsilon + A_{\alpha}^1 \rho_{\alpha} + B_0 \varphi + C \theta, \quad M_{\alpha} = A_{\alpha}^1 \varepsilon + A_{\alpha\beta}^2 \rho_{\beta} + B_{\alpha} \varphi + C_{\alpha} \theta,$$

$$M = A_{\varepsilon} + A_{\alpha}^m \rho_{\alpha} + B \varphi + C^m \theta, \quad (8.1)$$

где N, M_{α}, M — осевое усилие, изгибные моменты и момент кручения.

Как следует из (8.1), температура может вызвать все виды деформаций: осевое удлинение/сжатие, изгиб, кручение.

Уравнения (8.1) могут быть получены из (5.3). Температура войдет в (5.3) неявно при замене (5.2) уравнениями

$$\sum_{j \in K_j} E_{ij} ((\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \mathbf{l}_{ij}) / |\mathbf{l}_{ij}| - \beta) \mathbf{l}_{ij} = 0.$$

Имея возможность менять структуру балки (связи $\{K_i\}$ и жесткости $\{E_{ij}\}$) можно поставить задачу управления: за счет выбора характеристик структурных элементов балки придать усредненным жесткостям в (8.1) заданные значения. Приведем несколько примеров качественного характера, показывающих возможные результаты управления.

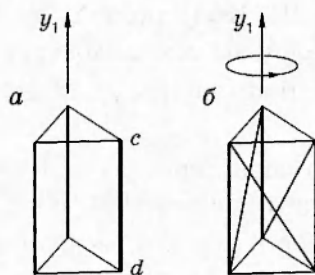


Рис. 4

ЯП может состоять из нескольких типов конструкций (назовем их ярусами), расположенных по оси y_1 (рис. 4). Приведем примеры ярусов с явно выраженными механическими свойствами:

1) секция при нагревании равномерно удлиняется в направлении оси конструкции (все вертикальные стержни одинаковые) (рис. 4, а);

2) секция при нагревании удлиняется и изгибается в направлении элемента $c - d$, который имеет отличный от других коэффициент теплового расширения (рис. 4, а);

3) секция при нагревании удлиняется и закручивается вокруг оси y_1 (рис. 4, б). Элементы ярусов, выполненные из разных материалов, показаны на рис. 4 линиями разной толщины.

Ярусы приведенных типов сопрягаются (соединяются) друг с другом. Получаемая трехъярусная ячеечная конструкция придает усредненной балке способность удлиняться, изгибаться и закручиваться при нагреве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hrennikoff A. Solution of problem of elasticity by the framework method // J. Appl. Mech. Dec. 1941. P. 169–175.
2. Noor A. K. Continuum modeling for repetitive lattice structures // Appl. Mech. Reviews. 1988. V. 41, N 7. P. 285–296.
3. Пшеничнов Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982.
4. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
5. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
6. Tollenaere H., Caillerie D. Continuous modeling of lattice structures by homogenization // Civil-Comp. News. 1995. N 28.
7. Панасенко Г. П. Асимптотические решения системы теории упругости для стержневых и каркасных конструкций // Мат. сб. 1982. Т. 183, № 2.
8. Колпаков А. Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов // Прикл. математика и механика. 1985. Вып. 6. С. 969–977.
9. Колпаков А. Г. Усредненные характеристики термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. С. 53–61.
10. Kolpakov A. G. Mechanics of composite frameworks // Шести нац. конгрес по теор. и прикл. мех. Резюме. Варна, 1989.
11. Колпаков А. Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 3. С. 66–73.

12. Аннин Б. Д., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1993.
13. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984. N 6. P. 159–191.
14. Колпаков А. Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // Прикл. математика и механика. 1991. Вып. 3. С. 440–448.
15. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
16. Колпаков А. Г. Тонкие упругие пластинки с системой односторонних контактов // ПМТФ. 1991. № 5. С. 136–142.
17. Колпаков А. Г. Конструкции малого диаметра с внутренними односторонними контактами // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 128–135.
18. Хог К., Чой К., Комков В. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988.
19. Колпаков А. Г. Жесткости упругих цилиндрических балок // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 102–109.
20. Колпаков А. Г. Эффективные термоупругие характеристики неоднородного материала // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 49. С. 45–55.
21. Ene H. I. On linear thermoelasticity of composite materials // Intern. J. Eng. Sci. 1983. V. 21, N 5. P. 443–448.
22. Колпаков А. Г. К задаче термоупругости неоднородных пластинок // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, вып. 3. С. 487–494.
23. Колпаков А. Г. Дополнение к статье «К задаче термоупругости неоднородных пластинок» // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 5. С. 860–861.
24. Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. Analysis, Design and Optimization of Composite Structures. Chichester, N.Y. etc.: John Wiley and Sons, 1997.
25. Колпаков А. Г. Асимптотическая задача термоупругости балок // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 113–123.

*Поступила в редакцию 12/II 1996 г.,
в окончательном варианте — 28/X 1996 г.*
