УДК 532.592

СОПРЯЖЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ПЛАВНЫЕ БОРЫ В СЛАБОСТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Н. И. Макаренко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача об установившихся течениях в слое непрерывно стратифицированной жидкости. Дается достаточное условие существования семейств сдвиговых потоков, согласованных в смысле законов сохранения массы, импульса и энергии с равномерным течением. Получены приближенные решения типа плавного бора, описывающие волновые переходы для пар сопряженных течений первой спектральной моды.

Плавные внутренние боры — это стационарные волновые конфигурации в слое жидкости в виде непрерывного перехода между двумя разными горизонтальными течениями слева и справа на бесконечности. Гладкий бор в двухслойной жидкости «под крышкой» описывается моделью второго приближения теории длинных волн (модель Л. В. Овсянникова [1]); слабонелинейная KdV-асимптотика получена в [2], а существование соответствующих точных решений уравнений Эйлера доказано в [3–5]. В случае непрерывной стратификации приближенные решения типа бора получались в работах [6, 7]. В лабораторных экспериментах бор наблюдался в случае как двухслойного распределения плотности [8], так и непрерывного [9]. В настоящей работе для стратификации, близкой к линейной или экспоненциальной, дается достаточное условие существования семейств сдвиговых течений, сопряженных с равномерным течением. Структура бора исследуется для течений, соответствующих первой спектральной моде скоростей.

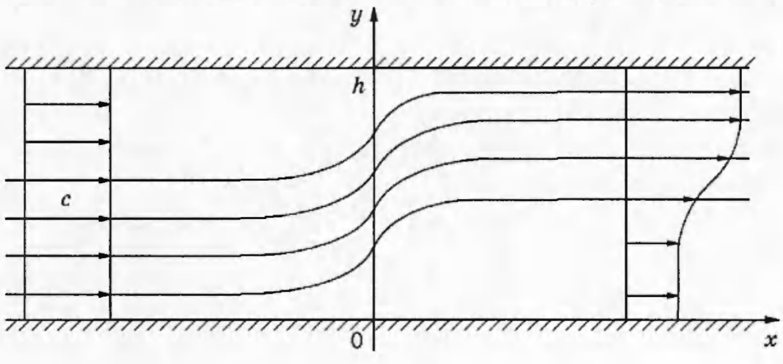

Рис. 1

1. Исходные уравнения. Рассматривается установившееся движение невязкой несжимаемой жидкости в слое «под крышкой» $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < h$, схема которого представлена на рис. 1. Картина течения полностью определяется функцией тока ψ поля

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта № 43 СО РАН «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости» при финансовой поддержке программы «Ведущие научные школы» (код проекта 96-15-96283).

скоростей $\boldsymbol{u} = (\psi_y, -\psi_x)$: плотность ρ ввиду условия несжимаемости постоянна вдоль каждой из линий тока $\psi(x, y) = \text{const}$, так что $\rho = \rho(\psi)$, а давление в жидкости определяется по известным ρ и ψ из интеграла Бернулли. В этой ситуации система уравнений Эйлера сводится к уравнению Дюбрей-Жакотэн — Лонга для ψ [10]

$$\rho(\psi)\,\Delta\psi + \rho'(\psi)\Big(gy + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2\Big) = B'(\psi)$$

с условиями непротекания на дне $y = 0$ и крышке $y = h$ и условием $\psi \to \psi^{\pm}(y)$ при $x \to \pm\infty$, где $\psi^+ \neq \psi^-$. Предполагается, что при $x \to -\infty$ течение стремится к равномерному потоку с $\boldsymbol{u} = (c, 0)$ и заданным распределением плотности $\rho_\infty(y)$. В отсутствие замкнутых линий тока получаем следующий вид функции $\rho(\psi)$ и функции Бернулли $B(\psi)$:

$$\rho(\psi) = \rho_\infty(\psi/c), \qquad B'(\psi) = \rho'(\psi)\Big(\frac{g\psi}{c} + \frac{1}{2}\,c^2\Big).$$

Пусть N_0 — характерная величина частоты Брента — Вяйсяля N, $N^2(y) = -g\,\rho'_\infty(y)/(\rho_\infty(y))$. Основными безразмерными константами в задаче являются параметр Буссинеска σ и приведенное число Фруда λ:

$$\sigma = \frac{N_0^2 h}{\pi g}, \qquad \lambda = \frac{\sigma g h}{\pi c^2}.$$

Введем безразмерные переменные, выбирая в качестве масштабов для x, y, ψ, ρ величины $h/\pi\sqrt{\sigma}$, h/π, ch/π, $\rho_\infty(0)$ соответственно. Рассмотрим состояния при $x = -\infty$, имеющие распределение плотности по глубине

$$\rho(y, \sigma) = 1 - \sigma y - \sigma^2\rho_1(y, \sigma), \tag{1.1}$$

где $\rho_1(0, \sigma) = 0$ согласно выбору масштаба для ρ. Указанная зависимость как частные случаи включает линейный закон и экспоненциальную стратификацию $\rho = \exp(-\sigma y)$, возмущая их величинами порядка $O(\sigma^2)$ в пределе слабой стратификации $\sigma \to 0$. Далее предполагается, что функция ρ определена при $\sigma \in [0, \sigma_0]$ с некоторым $\sigma_0 > 0$ и обладает следующими свойствами.

Условие 1. Функция $\rho_1 \in C^k([0, \pi] \times [0, \sigma_0])$ при $k \geqslant 4$ такова, что $\rho > 0$, $\rho_y < 0$ при $(y, \sigma) \in [0, \pi] \times (0, \sigma_0]$.

Задача о течениях типа бора ставится следующим образом. При заданном значении σ требуется определить вещественный положительный параметр λ и функцию $v(x, y) = \psi(x, y) - y$, которые в полосе $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$ и на ее границе удовлетворяли бы уравнениям

$$F(v, Dv, D^2v, y; \sigma, \lambda) \equiv \operatorname{div}_\sigma(\rho\nabla_\sigma v) - \rho'\Big(\sigma^{-1}\lambda v + \frac{1}{2}\,|\nabla_\sigma v|^2\Big) = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \tag{1.2}$$

$$v = 0 \qquad (y = 0, \quad y = \pi); \tag{1.3}$$

$$v \to v^{\pm}, \quad \nabla v \to \nabla v^{\pm} \qquad (x \to \pm\infty). \tag{1.4}$$

Здесь $\operatorname{div}_\sigma = \nabla_\sigma\cdot$; $\nabla_\sigma = (\sqrt{\sigma}D_x, D_y)$; $\rho = \rho(y + v, \sigma)$; $\rho' = \rho_y(y + v, \sigma)$. Равномерному потоку в (1.4) соответствует $v^-(y) \equiv 0$, а сопряженному с ним течению — ненулевое решение $v^+(y)$ уравнения (1.2) с однородными условиями при $y = 0$ и $y = \pi$. Согласно формуле (1.1) и условию 1 функция F из (1.2) допускает представление в виде

$$F = v_{yy} + \lambda v + \sigma\Big(v_{xx} + \lambda\rho_0'(y + v)v - (y + v)v_{yy} - v_y - \frac{1}{2}\,v_y^2\Big) + \sigma^2 F_1$$

с гладкой функцией F_1 класса C^{k-1} и коэффициентом $\rho_0(y) = \rho_1(y, 0)$, который характеризует тонкую структуру стратификации на фоне основного распределения плотности.

Поскольку плотность $\rho(y,\sigma)$ определена только для $y \in [0,\pi]$, значения обезразмеренной функции тока ψ должны лежать в том же промежутке:

$$0 \leqslant y + v(x,y) \leqslant \pi, \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{1.5}$$

Кроме того, данные на бесконечности должны удовлетворять условиям согласования, вытекающим из законов сохранения. Установленный выше вид зависимостей ρ и B от ψ автоматически влечет совпадение потоков массы и энергии для любой пары решений уравнений (1.2), (1.3), зависящих только от y. Иначе обстоит дело с законом сохранения импульса. Соответствующее условие согласования естественным образом получается с помощью вариационного принципа [11], согласно которому (1.2) является уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала с плотностью действия

$$L = -\frac{1}{2}\rho\,|\nabla_\sigma v|^2 + \sigma^{-1}\lambda \int\limits_y^{y+v} (\rho(\psi,\sigma) - \rho(y+v,\sigma))\,d\psi.$$

Ввиду инвариантности данного лагранжиана относительно группы переносов по x дифференциальный оператор F в (1.2) по теореме Э. Нётер допускает преобразование к дивергентной форме

$$v_x F(v;\sigma,\lambda) = D_x\left(L - v_x L_{v_x}\right) + D_y(-v_x L_{v_y})$$

(здесь и далее аргументы Dv, D^2v, y функции F для краткости опускаются). Интегрирование этого равенства по y с учетом условий на дне и крышке показывает, что при каждом x должно выполняться соотношение

$$l(v;\,\sigma,\lambda) \equiv \int\limits_0^\pi (L + \sigma\rho v_x^2)\,dy = \text{const}. \tag{1.6}$$

Для решений с асимптотикой (1.4) при $x \to -\infty$ константа в (1.6) равна нулю, и мы имеем ограничение для данных при $x = +\infty$: все состояния v^+, сопряженные с равномерным течением v^-, являются критическими точками функционала l (рассматриваемого для функций $v = v(y)$), но допустимы только те из них, которые лежат на одинаковой с основным состоянием поверхности уровня $l = 0$.

2. Сопряженные течения. Постановка задачи о сопряженных стратифицированных течениях как бифуркационной задачи принадлежит Т. Бенджамину [12], но вопрос о совместности всех трех физических законов сохранения никем не исследовался. Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения для $v = v^+(y)$

$$(\rho v_y)_y - \rho'\left(\sigma^{-1}\lambda v + \frac{1}{2}v_y^2\right) = 0, \qquad v(0) = v(\pi) = 0 \tag{2.1}$$

с дополнительным условием согласования (1.6). При $\sigma = 0$ невозмущенный оператор $F(v;0,\lambda) = v_{yy} + \lambda v$ порождает счетное семейство мод собственных функций и собственных значений $v_n^+ = b\sin ny$, $\lambda_n = n^2$ ($b \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$). Возмущенное решение $v^+(y) = b\sin ny + bw(y)$ найдем в классе функций $C_0^k[0,\pi] = \{v \in C^k\colon v(0) = v(\pi) = 0\}$ (k из условия 1) для чисел Фруда λ, близких к одному из собственных значений λ_n. Пусть Q_n — ортогональный проектор на дополнение к $\sin ny$ в $L_2[0,\pi]$ и $\mu(v;\,\sigma,\lambda) = \int\limits_0^\pi F(v(y);\sigma,\lambda)\,\sin ny\,dy$ — дефектный функционал, задающий уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта для задачи (2.1). Функция $w \in Q_n C_0^k[0,\pi]$ и вещественные параметры b, σ, λ должны удовлетворять системе уравнений

$$w_{yy} + n^2 w = Q_n f^+(w;b,\sigma,\lambda); \tag{2.2}$$

$$l(v^+;\sigma,\lambda)=0,\qquad \mu(v^+;\sigma,\lambda)=0, \tag{2.3}$$

где правая часть f^+ при $b\neq 0$ имеет вид

$$bf^+(w;b,\sigma,\lambda)=F(v^+;0,n^2)-F(v^+;\sigma,\lambda)$$

и доопределяется по непрерывности в точке $b=0$. Заметим, что для $v=v(y)$ лагранжиан $L(v;\sigma,\lambda)$ имеет структуру

$$L=\frac{1}{2}\,(\lambda v^2-v_y^2)+\sigma\Big\{\frac{1}{2}(y+v)v_y^2+\lambda\int\limits_y^{y+v}(\rho_0(y+v)-\rho_0(\psi))\,d\psi\Big\}+\sigma^2L_1$$

с регулярным при $\sigma\to 0$ остатком L_1. Легко видеть, что для $\sigma=0$ и $\lambda=\lambda_n$ оба уравнения (2.3) выполнены с $w=0$ при произвольном вещественном b. Ограничение на амплитудный параметр b следует из условия (1.5); здесь потребуем выполнения более сильного условия

$$(n\cos ny+w'(y))b>-1,$$

согласно которому в сопряженном течении отсутствует возвратный ток жидкости. Для w из шара $B_\delta=\{w\in Q_nC_0^k[0,\pi]:\ \|w\|_{C^k}<\delta\}$ требуемое ограничение заведомо выполнено при условии $|b|<1/(n+\delta)$. Имея это в виду, в пространстве параметров выделим область

$$\Pi_n(\delta)=\{(b,\sigma,\lambda):\quad |b|<1/(n+\delta),\ \ \sigma>0,\ \ \sigma+|\lambda-\lambda_n|<\delta\}.$$

Лемма 1. *Существует такое $\delta>0$, что при $(b,\sigma,\lambda)\in\Pi_n(\delta)$ уравнение (2.2) имеет единственное в шаре B_δ решение w. Отображение $(b,\sigma,\lambda)\to w$ является гладким и при (σ,λ), близких к $(0,n^2)$, имеет асимптотику*

$$w(y;b,\sigma,\lambda)=-\sigma b^{-1}\int\limits_0^\pi \mathcal{G}_n(y,z)Q_nF_\sigma(b\sin nz;0,n^2)\,dz+O(\sigma^2+\sigma|\lambda-n^2|),$$

где

$$\mathcal{G}_n(y,z)=\frac{1}{\pi n}(z-\pi)\sin ny\cos nz+\frac{1}{n}\begin{cases}\sin n(y-z) & (0<z<y),\\ 0 & (y<z<\pi),\end{cases}$$

а оценка остатка равномерна относительно b.

Для доказательства леммы уравнение (2.2) сводится к нелинейному интегродифференциальному уравнению с функцией Грина $\mathcal{G}_n$. Существование и единственность решения при достаточно малых δ, а также равномерное свойство асимптотики следуют из оценки

$$\|f^+(w_1;b,\sigma,\lambda)-f^+(w_2;b,\sigma,\lambda)\|_{C^{k-2}}\leqslant C(\sigma+|\lambda-\lambda_n|)\|w_1-w_2\|_{C^k},$$

в которой константа C зависит только от δ и C^k-нормы функции ρ.

Теперь рассмотрим систему уравнений (2.3), в которой v^+ определено через функцию w, описанную в лемме 1. Пусть l^+ и μ^+ обозначают суперпозицию функционалов l и μ с указанным выше отображением v^+. Система для параметров b и $\boldsymbol{a}=(\sigma,\lambda-\lambda_n)$ имеет вид

$$A_n(b)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{a};b) \tag{2.4}$$

с матрицей Якоби

$$A_n=\frac{\partial(l^+,\mu^+)}{\partial(\sigma,\lambda)}\Big|_{\sigma=0,\lambda=\lambda_n}$$

и гладкой вектор-функцией $\boldsymbol{X}:\Pi_n(\delta)\to\mathbb{R}^2$, допускающей равномерную по b оценку $|\boldsymbol{X}(\boldsymbol{a};b)|\leqslant C|\boldsymbol{a}|^2$. Так как $(w,\sin ny)_{L_2[0,\pi]}=0$, элемент w, имеющий согласно лемме 1 одинаковый с σ порядок малости, не дает вклада в линейную часть уравнения (2.4). Отсюда, а также из потенциальности оператора F (являющегося градиентом функционала l) следует, что A_n имеет структуру матрицы Вронского

$$A_n(b) = \begin{pmatrix} s_n(b) & m_n(b) \\ s_n'(b) & m_n'(b) \end{pmatrix}$$

с коэффициентами $m_n(b) = \pi b^2/4$ и

$$s_n(b) = n^2 \int\limits_0^\pi \int\limits_y^{y+b\sin ny} (\rho_0(y + b\sin ny) - \rho_0(\psi))\, d\psi\, dy + \frac{1}{8}(\pi n b)^2 + \frac{n}{6}(1 - (-1)^n) b^3.$$

Обозначим через $\Delta_n(b) = \det A_n(b)$ вронскиан функций s_n и m_n,

$$\Delta_n(b) = -\frac{1}{4}\pi b^4 \left(\frac{s_n(b)}{b^2}\right)'. \tag{2.5}$$

Данная функция играет определяющую роль во всех дальнейших построениях. Если b_0 таково, что $\Delta_n(b_0) \neq 0$, то в достаточно малой полуокрестности точки $(b_0, 0, n^2) \in \partial\Pi_n(\delta)$ система (2.4) не имеет решений $(b, \sigma, \lambda) \in \Pi_n(\delta)$ с $\boldsymbol{a} \neq 0$, поэтому нетривиальные решения могут быть найдены только для значений b вблизи нулей функции Δ_n. Достаточное условие существования решений дается следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть* $b_0 \in (-1/(n+\delta), 1/(n+\delta))$ *— корень функции* $\Delta_n(b)$, *для которого выполнены условия:*

(i) $\Delta_n'(b_0) \neq 0,$ *если* $b_0 \neq 0;$

(ii) $\Delta_n^{(4)}(b_0) \neq 0,$ *если* $b_0 = 0.$

Тогда для данного b_0 *существует единственная непрерывная по* σ *ветвь сопряженных состояний, для которой* $(v_n^+(y;\sigma), \lambda_n^+(\sigma)) \to (b_0 \sin ny, n^2)$ *в* $C_0^k \times \mathbb{R}$ *при* $\sigma \to +0$. *Зависимость от* σ *гладкая, и собственные значения имеют асимптотику*

$$\lambda_n^+(\sigma) = n^2 - \frac{s_n(b_0)}{m_n(b_0)}\sigma + O(\sigma^2). \tag{2.6}$$

Доказательство. При $b_0 \neq 0$ матрица $A_n(b_0)$ имеет одномерное ядро и коядро, порожденные векторами $\boldsymbol{e} = (m_n(b_0), -s_n(b_0))$, $\boldsymbol{e}_* = (m_n'(b_0), -m_n(b_0))$. Следовательно, система (2.4) равносильна одному уравнению разветвления для b и $\tau = |\boldsymbol{e}|^{-2}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}$, которое после отделения тривиального решения $\tau = 0$ принимает форму $t_1(b - b_0) + t_2\tau + \Gamma(b, \tau) = 0$. Здесь $t_1 = A_n'(b_0)\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}_*$, вид коэффициента t_2 несущественен, а $\Gamma(b,\tau) = O(\tau^2 + (b - b_0)^2)$. Из выражений для $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}_*$ следует, что $t_1 = m_n(b_0)\Delta_n'(b_0)$, и поэтому в случае простого ненулевого корня функции Δ_n имеется единственная нетривиальная ветвь решений $b(\tau)$. Поскольку $\boldsymbol{a} = \tau\boldsymbol{e} + O(\tau^2)$ и первая компонента $\boldsymbol{e}$ отлична от нуля, в качестве свободного параметра вместо τ можно взять σ, что одновременно дает асимптотику (2.6).

Теперь рассмотрим корень $b_0 = 0$ вронскиана Δ_n, который является как минимум четырехкратным, а поскольку $s_n(b) = O(b^2)$ при $b \to 0$, матрица $A_n(0)$ нулевая. Неопределенность легко раскрывается, если перейти от (2.4) к равносильной системе того же вида с матрицей

$$B_n(b) = \begin{pmatrix} b^{-2}s_n(b) & b^{-2}m_n(b) \\ b^{-1}s_n'(b) & b^{-1}m_n'(b) \end{pmatrix}$$

вместо A_n. Гладкая вектор-функция $\boldsymbol{X}$, возникающая после такого преобразования в правой части, в силу леммы 1 по-прежнему имеет равномерную относительно b асимптотическую оценку при $|\boldsymbol{a}| \to 0$. Так как $\det B_n(0) = 0$ и $\operatorname{rang} B_n(0) = 1$, дальнейший анализ после сделанных замечаний ничем не отличается от случая (i). Условие (ii) эквивалентно неравенству $t_1 \neq 0$ в уравнении разветвления, а формула (2.6) остается в силе и в этом случае, если в коэффициенте при σ перейти к пределу $b_0 \to 0$. Теорема доказана.

Замечание. Если кратность корня b_0 такова, что условие (i) или (ii) нарушено, то количество ветвей сопряженных течений, рождающихся в каждом из собственных значений, и их асимптотика при $\sigma \to 0$ могут быть определены с помощью диаграммы Ньютона по ненулевым коэффициентам при более высоких степенях τ и $b - b_0$ в уравнении разветвления.

3. Спектр линейной задачи. Выясним взаимное расположение ветвей сопряженных состояний в плоскости (σ, λ) и спектра линейной задачи о малых возмущениях основного состояния при $x = -\infty$. Уравнение (1.2), линеаризованное на нулевом решении, имеет вид

$$\operatorname{div}_\sigma(\rho \nabla_\sigma v) - \lambda \sigma^{-1} \rho' v = f, \tag{3.1}$$

где $\rho = \rho(y, \sigma)$ — заданная функция из (1.1), $\rho' = \rho_y$. Однородное уравнение имеет решения типа плоских волн

$$v_n(x, y;\, \sigma, æ) = e^{iæx} \varphi_n(y;\, \sigma, æ), \qquad æ \in \mathbb{R},\ n \in \mathrm{N}, \tag{3.2}$$

где φ_n — собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

$$(\rho \varphi_y)_y - (\sigma æ^2 \rho + \lambda \sigma^{-1} \rho')\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \tag{3.3}$$

При выполнении условия 1 все ее собственные значения λ_n вещественны и положительны. Известно [10], что $\lambda_n(\sigma, æ)$ строго монотонно растут с ростом $æ^2$, причем $\lambda_n \to +\infty$ при $æ^2 \to +\infty$. Отсюда ясно, что решения вида (3.2) возможны только для (σ, λ), принадлежащих множеству

$$\Sigma = \{(\sigma, \lambda) |\ \sigma \in (0, \sigma_0], \lambda \geqslant \lambda_1(\sigma, 0)\},$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение. Если $\lambda < \lambda_1(\sigma, 0)$, то уравнение (3.1) с $f \in L_2(\Omega)$ однозначно разрешимо в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^2_{2,0}(\Omega) = \{v \in W_2^2(\Omega) |\ v(x, 0) = v(x, \pi) = 0\}$. Это несложно установить, применяя к (3.1) преобразование Фурье по x и используя разложение $\hat{v}(\xi, y)$ по собственным функциям $\varphi_n(y;\, \sigma, \xi)$, которые образуют ортогональный базис в $L_2[0, \pi]$ относительно скалярного произведения с весом $-\sigma^{-1}\rho_y(y, \sigma)$ и базис в $\overset{\circ}{W}{}^1_2[0, \pi]$, ортогональный в скалярном произведении

$$[u(y), v(y)]_\xi = \int\limits_0^\pi \rho(y, \sigma)(u'(y)v'(y) + \sigma \xi^2 u(y)v(y))\, dy.$$

Собственные значения по теореме сравнения Штурма допускают оценку снизу

$$\lambda_n(\sigma, \xi) \geqslant \frac{r(\sigma)}{R(\sigma)}(n^2 + \sigma \xi^2)$$

с величинами $r = \min\limits_{y \in [0, \pi]} \rho(y, \sigma)$, $R = \max\limits_{y \in [0, \pi]} (-\sigma^{-1}\rho_y(y, \sigma))$, поэтому для v имеет место оценка $\|v\|_{W_2^2} \leqslant C(\sigma, \lambda)\|f\|_{L_2}$, справедливая для точек (σ, λ) вне Σ. Из сказанного следует, что при каждом фиксированном $\sigma \in (0, \sigma_0]$ симметричный оператор в (3.1) с областью определения $W_{2,0}^2(\Omega)$ имеет непрерывный спектр, заполняющий вещественную полуось $\operatorname{Re} \lambda \geqslant \lambda_1(\sigma, 0)$ в плоскости комплексных λ. Множество Σ объединяет по параметру σ эти спектры в

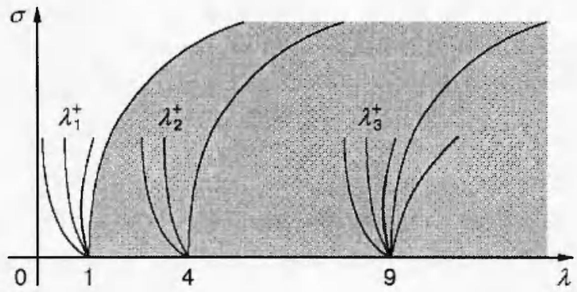

Рис. 2

плоскости вещественных пар (σ, λ); оно устроено таким образом, что каждый раз при переходе через гладкую кривую $\Lambda_n : \lambda = \lambda_n(\sigma, 0)$ в сторону возрастания λ к уже имеющимся обобщенным собственным функциям $v_m(x, y;\, \sigma, \pm|æ|)$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ вида (3.2) добавляется пара функций моды с номером n. Картину расположения спектра хорошо иллюстрирует случай экспоненциальной стратификации $\rho = \exp(-\sigma y)$, для которого $\varphi_n(y;\, \sigma, æ) = \sqrt{2/\pi}\, e^{\sigma y/2} \sin ny$, $\lambda_n(\sigma, æ) = n^2 + \sigma æ^2 + \sigma^2/4$, так что каждая из кривых Λ_n — парабола $\lambda = n^2 + \sigma^2/4$.

В пределе длинных волн $(æ \to 0)$ задача Штурма — Лиувилля (3.3) совпадает с уравнениями сопряженных течений (2.1), линеаризованными на нулевом решении. Вследствие этого линия Λ_n исходит из точки $(0, n^2)$ на оси λ, в которой согласно теореме 1 рождается веер ветвей n-й моды сопряженных течений. Вычисляя возмущения собственного значения $\lambda_n(\sigma, 0)$ по малому параметру σ, для наклона кривой Λ_n в точке бифуркации имеем выражение

$$D_\sigma \lambda_n(0, 0) = -\frac{2n^2}{\pi} \int\limits_0^\pi \rho_0'(y) \sin ny\, dy - \frac{\pi n^2}{2},$$

что совпадает с величиной $-s_n''(0)/m_n''(0)$. Сравнение с асимптотикой (2.6) показывает, что в точке бифуркации кривая Λ_n касается той ветви сопряженных состояний, которая соответствует корню $b_0 = 0$ вронскиана $\Delta_n(b)$. Кривые $(\sigma, \lambda_n^+(\sigma))$, порожденные ненулевыми корнями b_0, ответвляются во внешность множества $\Sigma_n = \{(\sigma, \lambda) \colon \lambda \geqslant \lambda_n(\sigma, 0)\}$, если выполнено неравенство

$$\frac{s_n(b_0)}{m_n(b_0)} > \frac{s_n''(0)}{m_n''(0)}, \tag{3.4}$$

и внутрь Σ_n, если выполнено противоположное строгое неравенство (спектр и ветви сопряженных течений изображены на рис. 2).

4. Структура бора. Рассмотрим более подробно первую моду сопряженных состояний: только для нее могут существовать ветви сопряженных течений, расположенные вне спектра Σ линеаризованной задачи. Зафиксируем один из простых ненулевых корней вронскиана Δ_1; согласно теореме 1 ему соответствует ветвь сдвиговых течений $(\sigma, \lambda_1^+(\sigma))$. В уравнении (1.2) положим $\lambda = \lambda_1^+(\sigma)$, а в (1.4) в качестве предельной возьмем функцию $v^+(y; \sigma)$. Ниже строится приближенное решение задачи (1.2)–(1.4) с указанным поведением на бесконечности. Вид главного члена асимптотики искомого решения $v(x, y; \sigma)$ при $\sigma \to 0$ несложно установить, предполагая v гладким по σ вплоть до значения $\sigma = 0$. Функции $v_0 = v(x, y;\, 0)$ и $v_1 = D_\sigma v(x, y;\, 0)$ должны удовлетворять уравнениям

$$D_y^2 v_j + v_j = f_j \quad (x \in \mathbb{R},\ 0 < y < \pi), \qquad v_j = 0 \quad (y = 0,\ y = \pi),$$

где $f_0 = 0$, $f_1 = -F_\sigma(v_0;\,0,\,1) - D_\sigma\lambda_1^+(0)\,F_\lambda(v_0;\,0,\,1)$. В нулевом приближении имеем $v_0 = a_0(x)\sin y$, где функция a_0 определяется из условия разрешимости неоднородной задачи для v_1: правая часть f_1 при каждом $x \in \mathbb{R}$ должна быть ортогональна $\sin y$ в $L_2([0,\pi])$. Это дает уравнение

$$a_0'' + p'(a_0) = 0 \tag{4.1}$$

с функцией p, которая в силу формулы (2.6) для λ_1^+, свойства потенциальности оператора F и определения коэффициентов s_1 и m_1 имеет вид

$$p(b) = \frac{2}{\pi}\Big(s_1(b) - \frac{s_1(b_0)}{m_1(b_0)}\,m_1(b)\Big).$$

Согласно (2.5) через вронскиан $\Delta_1(b)$ указанная функция выражается следующим образом:

$$p(b) = \frac{8}{\pi^2}\,b^2\int\limits_b^{b_0} t^{-4}\Delta_1(t)\,dt. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) может иметь ограниченные затухающие при $x \to -\infty$ решения только для знакоопределенных функций p, поэтому примем следующее предположение.

Условие 2. Простой корень b_0 функции Δ_1 таков, что всюду в интервале между $b = 0$ (включая эту точку) и $b = b_0$ выполнено неравенство

$$\frac{s_1(b_0)}{m_1(b_0)} > \frac{s_1(b)}{m_1(b)}.$$

Данное требование накладывает ограничения только на коэффициент $\rho_0 = \rho_1(y,0)$ в формуле (1.1), которым полностью определяется функция Δ_1. Оно выполнено, если, например, b_0 является ближайшим к точке $b = 0$ корнем, а знак $\Delta_1(b)$ противоположен знаку b_0. Согласно условию 2 внутри рассматриваемого промежутка $p(b) < 0$, а его концы $b = 0$ и $b = b_0$ — в точности двухкратные корни $p(b)$. В принятых предположениях искомое решение a_0 дается квадратурой

$$x = \operatorname{sign} b_0\int\limits_{b_*}^{a_0}\frac{db}{\sqrt{-2p(b)}},$$

где $b_* = a_0(0) \in (0, b_0)$ фиксируется выбором системы отсчета. Функция $a_0(x)$ строго монотонна, принимает значения от 0 до b_0 при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ и имеет экспоненциальную асимптотику

$$|a_0(x)| \leqslant C\exp(-\alpha_0|x|), \qquad |b_0 - a_0(x)| \leqslant C\exp(-\beta_0|x|)$$

с показателями $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$,

$$\alpha_0^2 = -\frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^{b_0} t^{-4}\Delta_1(t)\,dt, \qquad \beta_0^2 = \frac{8}{\pi^2 b_0^2}\,\Delta_1'(b_0).$$

Условие 2 подразумевает выполнение неравенства (3.4), поэтому полученное приближенное решение описывает непрерывный бор, распространяющийся по однородному состоянию слева на бесконечности со сверхкритической скоростью, квадрат которой с точностью порядка $O(\sigma^3)$ равен $c^2 = \sigma gh/(\pi - 4\sigma\, b_0^{-2}\, s_1(b_0))$. Для сопряженных состояний, порождаемых модами с $n \geqslant 2$, бифуркационные кривые $(\lambda_n^+(\sigma), \sigma)$ находятся внутри спектра линейных волн. Здесь, по всей видимости, бор должен присутствовать в паре с периодической волной, профиль которой в главном члене асимптотики определяется обобщенной собственной функцией (3.2). Данная ситуация аналогична возникающей в задаче о поверхностных волнах с учетом капиллярности при числах Бонда меньше одной трети [13], для которой строго доказано существование стационарных конфигураций в виде уединенных волн с осциллирующими хвостами на бесконечности.

5. Примеры. Рассмотрим профили плотности (1.1), для которых выполнены условия существования сопряженных течений и волн типа бора. Наличие простых ненулевых корней вронскиана Δ_1 проще всего выяснить для полиномиальных зависимостей коэффициента $\rho_0(y)$. Если степень $\rho_0(y)$ не выше двух, то Δ_1 вообще не имеет корней, отличных от нуля. Отсюда и из теоремы 1 следует, что для равномерного потока с чисто экспоненциальным или линейным распределением плотности могут существовать только близкие к нему сопряженные состояния с амплитудным параметром $b(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to 0$. Более интересен случай полиномов высоких степеней

$$\rho_0(y) = \sum_{k=1}^{n} r_{k-1} y^k, \qquad n > 2.$$

В этом случае Δ_1 имеет вид

$$\Delta_1(b) = -\frac{1}{12}\pi b^4 \sum_{k=0}^{n-2} d_{k+1} b^k, \tag{5.1}$$

где вектор коэффициентов $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ линейно выражается через $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_{n-1})$ (пропущенный коэффициент r_0 не влияет на вид Δ_1) по формуле $\boldsymbol{d} = T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}$ с вектором $\boldsymbol{s} = (1, 0, \ldots, 0)$ и верхней треугольной матрицей T, у которой все коэффициенты на главной диагонали и выше ее строго положительны:

$$t_{ks} = 3C_s^k \, \frac{k(s+1)}{k+2} \int_0^{\pi} y^{s-k} \sin^{k+2} y \, dy, \qquad s \geqslant k.$$

Ввиду обратимости преобразования T для любого полинома вида (5.1) всегда можно указать такой закон стратификации (1.1), при котором указанная функция Δ_1 является определителем матрицы системы (2.4). Пусть $n = 2m + 3$ с целым неотрицательным m и все отличные от нуля корни вронскиана образуют геометрическую прогрессию $b_j = q^{2m+2-j} (j = 1, \ldots, 2m+1)$. Для такого Δ_1 и каждой пары соседних интервалов (b_{2i-1}, b_{2i}) и (b_{2i}, b_{2i+1}) $(i = 1, \ldots, m)$ справедливо равенство

$$\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}} t^{-4} \Delta_1(t) \, dt = -\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} t^{-4} \Delta_1(t) \varphi_m(t) \, dt$$

с функцией $\varphi_m(t) = q^{2m+2}(1-t)/(1-q^{2m+1})$. Если q выбрать в пределах $0 < q < 1/2$, то на любом из интервалов (b_{2i}, b_{2i+1}) одновременно будут выполнены неравенства $\Delta_1(t) < 0$ и $0 < \varphi_m(t) < 1$. Следовательно, в формуле (4.2) в качестве b_0 можно взять любой из $m+1$ корней b_j с нечетным номером $j = 2i+1$. Данный пример показывает, что малое возмущение линейной или экспоненциальной стратификации может приводить к появлению любого наперед заданного количества ветвей сопряженных состояний первой моды с конечной амплитудой $b(\sigma)$, не исчезающей в пределе $\sigma \to 0$. При этом каждая из ветвей сопрягается с основным равномерным течением своим стационарным бором. Сильная чувствительность нелинейных волновых структур к малым возмущениям стратификации ранее отмечалась в [7, 14].

В частном случае $m = 0$ определитель $\Delta_1(b)$ является полиномом пятой степени, и для него возможен единственный ненулевой вещественный корень

$$b_0 = -\frac{16}{27}\left(4 + \frac{8r_1 + 3}{3\pi r_2}\right).$$

Сопряженное течение и приближенное решение в виде бора существуют для тех значений коэффициентов r_1 и $r_2 > 0$, при которых выполнены неравенства $|b_0| < 1$, $b_0 \neq 0$. В этом случае

$$p(b) = -\frac{9}{16}\pi r_2 b^2 (b_0 - b)^2,$$

так что уравнение (4.1) представляет собой первый интеграл модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с кубической нелинейностью и волновой профиль в нулевом приближении имеет форму

$$a_0(x) = \frac{b_0}{2}\Big(1 + \operatorname{th}\frac{3}{8}\sqrt{\pi r_2}\, b_0 x\Big).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
2. **Funakoshi M.** Long internal waves in a two-layer fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54, N 1. P. 128–144.
3. **Amick C. J., Turner R. E. L.** Small internal waves in two-fluid systems // Arch. Rational Mech. Anal. 1989. V. 108, N 2. P. 111–139.
4. **Makarenko N. I.** Smooth bore in a two-layer fluid // Intern. Ser. Numer. Math. 1992. V. 106. P. 195–204.
5. **Mielke A.** Homoclinic and heteroclinic solutions in two-phase flow // Adv. Ser. in Nonlinear Dynamics. V. 7: Proc. IUTAM/ISIMM Symp. on Structure and Dynamics of Nonlinear Waves in Fluids, World Scientific, 1995. P. 353–362.
6. **Miles J. W.** On internal solitary waves // Tellus. 1979. V. 31, N 5. P. 456–462.
7. **Борисов А. А., Держо О. Г.** Структура стационарных уединенных волн конечной амплитуды // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1990. № 2. С. 60–70.
8. **Гаврилов Н. В.** Неподвижные в лабораторной системе координат внутренние уединенные волны и плавные боры // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 29–33.
9. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Вынужденный плавный бор в непрерывно стратифицированной жидкости // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 3. С. 327–329.
10. **Yih Chia-Shun.** Stratified flows. N. Y.: Academic Press, 1980.
11. **Benjamin T. B.** Impulse, flow force and variational principles // IMA J. Appl. Math. 1984. V. 32. P. 3–68.
12. **Benjamin T. B.** A unified theory of conjugate flows // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1971. V. 269. P. 587–643.
13. **Beale J. T.** Exact solitary water waves with capillary ripples at infinity // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44. P. 211–257.
14. **Benney D. J., Ko D. R. S.** The propagation of long large amplitude internal waves // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. P. 187–199.

Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.