

УДК 536.423

Математическое моделирование пленочных течений жидкости с «сухими» пятнами

Л.И. Мальцев, Д.С. Заварзин

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: maltzev@itp.nsc.ru

Выполнено моделирование пленочных изотермических течений вязкой, весомой, капиллярной жидкости с сухими пятнами. Построен алгоритм расчета формы валика, ограничивающего сухое пятно, и течения жидкости в валике на основе учета сил тяжести, сил поверхностного натяжения и трения, а также инерционных эффектов. Проведено сравнение результатов расчета по данному методу с имеющимися экспериментальными данными и данными расчетов по методу, учитывающему только силы весомости и капиллярные силы. Показано, что при малых числах Рейнольдса методы расчета дают близкие результаты, которые хорошо совпадают с экспериментальными результатами, однако при числах Рейнольдса, больших единицы, результаты расчетов по двум методам различаются существенно.

Ключевые слова: стекающая пленка жидкости, разрыв пленки, сухое пятно, моделирование.

Введение

Жидкие пленки, стекающие под действием сил тяжести или движущиеся под действием касательных напряжений по твердым поверхностям, используются во многих технологиях и привлекают внимание исследователей с давних пор [1].

В этой области одной из наиболее интересных остается задача о формировании сухих пятен в пленках. Чаще всего появление разрывов в пленках и образование сухих пятен связывают с испарительными процессами на неравномерно нагретых поверхностях. Однако разрывы имеют место и в изотермических пленках. Известно [2–7], что существуют устойчивые изотермические пленочные течения с неподвижными областями на стенке, не смоченными жидкостью. В случае пленок, стекающих под действием гравитации, границы этих областей имеют форму, похожую на параболу, обращенную вершиной вверх. Вдоль границ сухого пятна сверху вниз образуются две симметричные струйки жидкости в виде валиков. При этом появление сухого пятна не вносит заметных изменений в течение за пределами пятна.

При анализе пленочных течений с сухими пятнами выделяют две проблемы:

- 1) определение условий, при которых возможно образование сухих пятен;
- 2) расчет формы устойчивого сухого пятна.

По первой проблеме вопрос сводится к определению минимальной толщины пленки, не допускающей образования устойчивых сухих пятен. Широко известен критерий Хартли–Мургатройда, позволяющий по таким характеристикам жидкости и подложки, как плотность, вязкость, коэффициент поверхностного натяжения, краевой угол смачивания, найти критическую толщину пленки [5]. В работе [8] авторами обсуждался механизм развития сухого пятна из малого начального возмущения и указывался критерий, который позволяет не только определить критические параметры пленки, но и оценить какое из начальных возмущений в пленке (дырка) исчезнет, а какое разовьется в устойчивое сухое пятно при толщинах пленки, меньших критического значения.

Работ, посвященных решению второй проблемы, существенно меньше.

В работе [9] выполнены экспериментальные исследования стекания пленок силиконового масла по пластине из стекла и дан приближенный метод расчета формы средней линии валика, образующегося вдоль границ сухого пятна. Метод расчета основан на использовании допущения о балансе между капиллярными силами и силами гравитации, что приемлемо, как указывают и авторы работы [9], только при малых числах Рейнольдса.

Ниже предлагается метод расчета формы сухого пятна, позволяющий дополнительно учитывать силы трения в валике, а также инерционные эффекты. Этот метод снимает ограничения по числу Рейнольдса.

Вывод основных уравнений

Пусть по пластине, наклоненной к горизонту под углом $0 < \alpha \leq \pi/2$, сползает пленка вязкой, капиллярной, весомой жидкости с сухим пятном (рис. 1). Будем считать, что течение в пленке ламинарное. Известно [1], что в этом случае профиль скоростей в пленке имеет вид

$$u(z) = \frac{g_\alpha}{\nu} \left(-zh_0 + \frac{z^2}{2} \right), \quad g_\alpha = g \cdot \sin \alpha. \quad (1)$$

Здесь h_0 — толщина стекающей пленки, ν — кинематическая вязкость жидкости, g — ускорение свободного падения. При заданном удельном расходе жидкости в пленке q толщина пленки $h_0 = \left(\frac{3q\nu}{g \sin \alpha} \right)^{1/3}$, среднерасходная по сечению пленки скорость $v_0 = q/h_0$ и напряжение трения на стенке $\tau = \rho \cdot g \cdot h_0 \cdot \sin \alpha$.

Число Рейнольдса $Re = q/\nu$ течения в валике заметно больше, чем в пленке, но и оно не превышает величин порядка 100, а потому течение в валике можно также считать ламинарным [1]. По аналогии с работами [9, 10] и др. будем также считать, что поперечное сечение валика имеет форму кругового сегмента (рис. 2), причем в каждом поперечном сечении сегмента течение вдоль валика имеет профиль

$$u(\xi, \eta) = (g_{\alpha\gamma}/\nu) \left(\eta^2/2 - \eta \cdot h(\xi) \right),$$

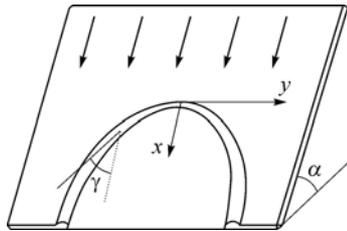
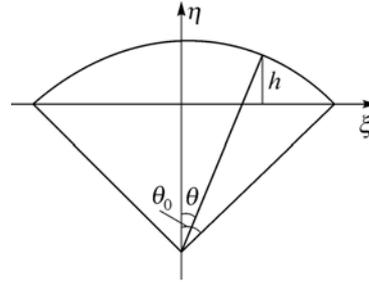


Рис. 1. Схема течения.

Рис. 2. Поперечное сечение кромочного валика.



$g_{\alpha\gamma} = g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma$, т. е. такой же, какой оно имело бы в однородной пленке с толщиной, равной местному значению высоты h . Тогда объемный расход жидкости через сечение валика в единицу времени

$$Q = \frac{2(g_{\alpha\gamma} / \nu) \cdot R^4}{3} \varphi(\theta_0), \quad (2)$$

где

$$\varphi(\theta_0) = \sin \theta_0 \left(-\frac{1}{4} \cos^3 \theta_0 - \frac{13}{8} \cos \theta_0 + \frac{15}{8} \frac{\theta_0}{\sin \theta_0} - \frac{3}{2} \theta_0 \sin \theta_0 \right),$$

а масса элемента валика, описанного выше,

$$\delta m = \rho \cdot Q \cdot \delta t. \quad (3)$$

С другой стороны, масса этого элемента может быть найдена из равенства расходов жидкости в пленке на интервале $[0, y]$ и в валике через его поперечное сечение в точке с ординатой y

$$\delta m = m \delta t, \quad m = \rho h_0 y \nu_0. \quad (4)$$

Из сопоставления формул (3) и (4) текущий радиус кривизны свободной границы (дуги окружности) поперечного сечения струйки может быть найден по формуле

$$R = \left(\frac{3}{2} \frac{\nu h_0 \nu_0 y}{g_{\alpha\gamma} \varphi(\theta_0) \cos \gamma} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

На выделенный элемент в плоскости подложки действуют:

- сила тяжести $\delta m g_{\alpha}$;
- капиллярная сила δN ;
- сила трения элемента о пластинку δT .

Кривизна средней линии валика в установившемся течении с сухим пятном много меньше кривизны свободной границы поперечного сечения валика и ею можно пренебречь. Поэтому капиллярная сила, действующая на элемент, может быть представлена в виде [8]

$$\delta N = \sigma (1 - \cos \theta_0) \nu \delta t.$$

Оценим теперь силу трения элемента валика о пластину. Высота валика в точке $\xi = R \sin \theta$ (рис. 2) равна $h(\xi) = R(\cos \theta - \cos \theta_0)$, а напряжение трения $\tau(\xi) = \rho g_{\alpha\lambda} R(\cos \theta - \cos \theta_0)$. Тогда полное трение элемента валика о подложку $\delta T = T \delta t$, где $T = 2\nu \int_0^{\xi_0} \tau(\xi) d\xi$. Произведя необходимые вычисления, получим

$$T = \nu (\theta_0 - 1/2 \sin 2\theta_0) \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\nu h_0 \nu_0 y g_{\alpha} \cos \gamma}{\varphi(\theta_0)}}.$$

Все силы, действующие на элемент валика, найдены.

Выпишем уравнения движения центра масс рассматриваемого элемента. Масса элемента является функцией времени. Поэтому уравнения движения центра масс выпишем как уравнения движения точки переменной массы в следующей форме [11]:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - N \sin \gamma - T \cos \gamma + \dot{m}(\Delta - \dot{x}), \\ m\ddot{y} = N \cos \gamma - T \sin \gamma + \dot{m}(\Delta_1 - \dot{y}). \end{cases} \quad (6)$$

Здесь точка сверху означает дифференцирование по времени, Δ , Δ_1 — компоненты скорости массы, пополняющей массу элемента. Очевидно, что $\Delta = v_0$, $\Delta_1 = 0$.

Подставив в уравнения (6) выражения для T, N, Δ, Δ_1 , получим уравнения движения центра масс элемента валика в форме

$$\begin{cases} \ddot{x} = g_a - \frac{\sigma(1 - \cos \theta_0)}{\rho h_0 v_0} \frac{\dot{y}}{y} - (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0) \sqrt{\frac{3}{2} \frac{v g_a \cos \gamma}{h_0 v_0 \varphi(\theta_0) y}} \dot{x} + \dot{y}(v_0 - \dot{x})/y, \\ \ddot{y} = \frac{\sigma(1 - \cos \theta_0)}{\rho h_0 v_0} \frac{\dot{x}}{y} - (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0) \sqrt{\frac{3}{2} \frac{v g_a \cos \gamma}{h_0 v_0 \varphi(\theta_0) y}} \dot{y} - \dot{y}^2/y. \end{cases} \quad (7)$$

Переходя к безразмерным переменным \bar{x}, \bar{y} по формулам $x = h_0 \bar{x}$, $y = h_0 \bar{y}$, $\dot{x} = v_0 \dot{\bar{x}}$,

$\dot{y} = v_0 \dot{\bar{y}}$, $t = \frac{h_0}{v_0} \bar{t}$, получим

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}} = 1/\text{Fr}^2 - a\dot{\bar{y}}/\bar{y} - b\dot{\bar{x}}\sqrt{\dot{\bar{x}}/(\bar{y}\sqrt{\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2})} + \dot{\bar{y}}(1 - \dot{\bar{x}})/\bar{y}, \\ \ddot{\bar{y}} = a\dot{\bar{x}}/\bar{y} - b\dot{\bar{y}}\sqrt{\dot{\bar{x}}/(\bar{y}\sqrt{\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2})} - \dot{\bar{y}}^2/\bar{y}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\text{Fr} = v_0/\sqrt{g_a h_0}$, $\text{Re} = v_0 h_0/\nu$, $\text{We} = \rho h_0 v_0^2/\sigma$, $a = (1 - \cos \theta_0)/\text{We}$,

$$b = \frac{(\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0)}{\text{Fr}} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{\text{Re} \cdot \varphi(\theta_0)}}.$$

Для того, чтобы решить систему уравнений движения точки, необходимо задать начальные данные. В соответствии с моделью течения $\bar{x}(0) = \bar{y}(0) = \dot{\bar{x}}(0) = \dot{\bar{y}}(0) = 0$. Однако при таких начальных данных правые части уравнений (8) в начале координат имеют неопределенность типа 0/0.

В работе [9] было показано, что при малых значениях числа Рейнольдса уравнения средней линии кромочного валика сухого пятна, полученные на основе баланса сил весомости жидкости и капиллярных сил, хорошо соответствуют экспериментальным данным. Внутри валика вблизи апекса сухого пятна число Рейнольдса мало. Поэтому начальный участок валика может быть построен по формулам, взятым из [9]:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\bar{r} \cdot \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \\ \bar{y} = \frac{\bar{r}}{3} \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \gamma}{\sin^3 \gamma} - 1 \right) \end{cases} \quad (9)$$

где $\bar{r} = \frac{2}{3} \frac{\varphi(\theta_0)(1 - \cos \theta_0)^2}{(\theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0)^2 \cdot \sin \theta_0} \cdot \frac{\text{Fr}^2 \cdot \text{Re}}{\text{We}^2}$, $\gamma^* \leq \gamma \leq \pi/2$.

Площадь поперечного сечения валика

$$S_0 = R_0^2 \left(\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) / 2. \quad (10)$$

Тогда среднерасходная скорость течения жидкости через сечение валика в точке, определяемой углом γ^* , может быть определена на основании формул (4), (5) и (10):

$$\bar{v}^* = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot \text{Re} \cdot \bar{y}^* \cdot \varphi(\theta_0) \cos \gamma^* / \text{Fr} / \left(\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right)}.$$

Алгоритм решения задачи выстраивается следующим образом. При заданных параметрах жидкости и подложки выбирается число γ^* , мало отличающееся от $\pi/2$, по формулам (9) на интервале $\gamma^* \leq \gamma \leq \pi/2$ находится начальная форма средней линии валика, а затем выстраивается форма основного валика по уравнениям (8) с начальными данными

$$\bar{x}(0) = x^* / h_0, \quad \bar{y}(0) = y^* / h_0, \quad \dot{\bar{x}}(0) = \bar{v}^* \cos \gamma^*, \quad \dot{\bar{y}}(0) = \bar{v}^* \sin \gamma^*. \quad (11)$$

Система уравнений (8) с начальными условиями (11) решается по методу Рунге–Кутты.

Результаты расчетов

На рис. 3 показаны результаты расчетов формы сухих пятен в пленках силиконового масла, стекающего по стеклу, при двух значениях удельного расхода масла и произведено сравнение результатов расчета с расчетными и опытными данными, взятыми из работы [9]. Как можно видеть, результаты наших расчетов полностью совпадают с расчетами [9] и хорошо соответствуют экспериментальным данным. На рис. 4 приведены аналогичные расчеты для пленки воды, стекающей

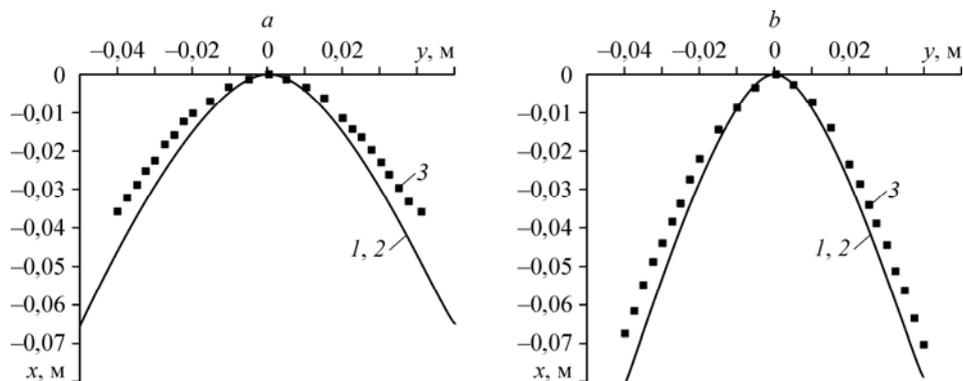


Рис. 3. Расчетные формы сухого пятна в пленке силиконового масла на стекле и их сравнение с расчетными и экспериментальными данными [9] ($\alpha = 15^\circ$, $\theta_0 = 30^\circ$).

$a - q = 7,52 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Re} = 0,0038$; $b - q = 19,7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Re} = 0,01$; 1 — данный метод, 2 — расчет [9], 3 — эксперимент [9].

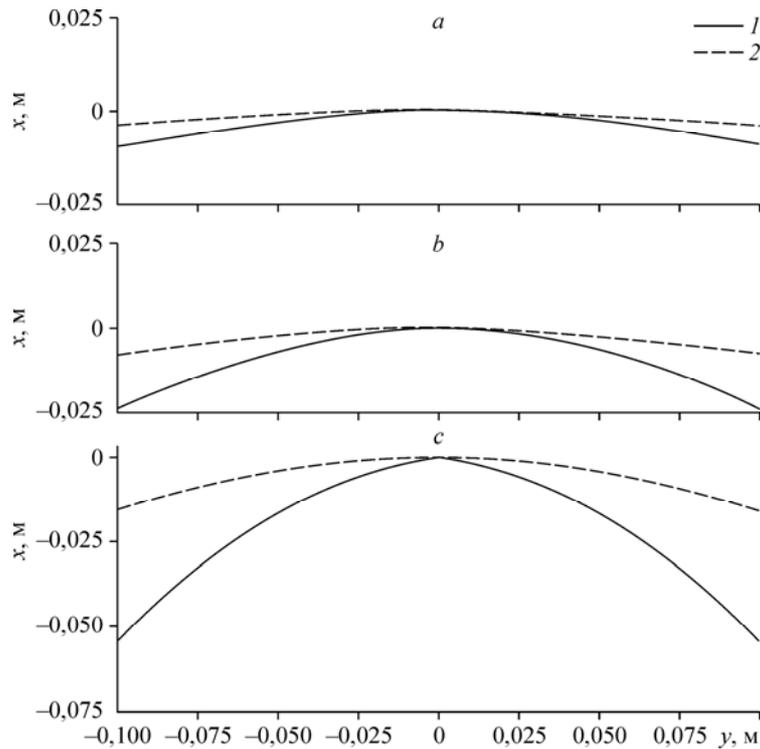


Рис. 4. Сравнение формы сухого пятна в пленке воды на медной пластине, рассчитанной по данному методу (1) и по методу [9] (2) ($\alpha = 90^\circ$, $\theta_0 = 52^\circ$).
 a — $q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Re} = 5$; b — $q = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Re} = 10$; c — $q = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Re} = 20$.

по вертикальной пластине из стекла, установленной под углом 90° к горизонту при расходах $q = 5 \cdot 10^{-6}$, $1 \cdot 10^{-5}$, $2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Числа Рейнольдса этих течений заметно превосходят значения, отвечающие течениям масла, показанным на рис. 3. Как видим, результаты расчетов по нашим уравнениям и по методу [9] в этом случае различаются существенно. На рис. 5 и 6 показаны формы верхних частей сухих пятен в пленке воды, имеющей расход $q = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ и стекающей по стеклу при углах наклона пластины $\alpha = 60^\circ$ и 30° соответственно. Как видим, влияние числа Рейнольдса на форму сухого пятна и, в частности, на точность расчетов по методу [9] остается весьма существенным при любых углах наклона пластины.

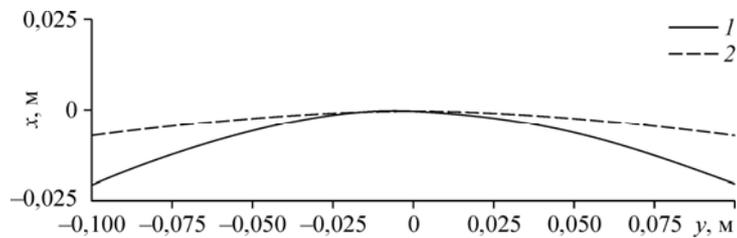


Рис. 5. Форма сухого пятна в пленке воды на медной пластине для случая: $\alpha = 60^\circ$, $q = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\text{Re} = 10$.
 1 — данный метод, 2 — расчет [9].

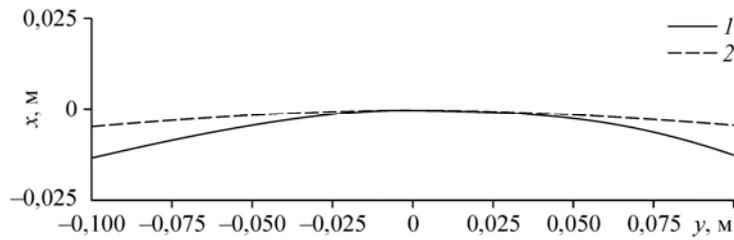


Рис. 6. Форма сухого пятна в пленке воды на медной пластине для случая: $\alpha = 30^\circ$, $q = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $Re = 10$.

1 — данный метод, 2 — расчет [9].

Заключение

Для устойчивых изотермических пленочных течений жидкости по твердым стенкам с сухими пятнами предложен алгоритм расчета формы валиков, охватывающих пятно, и течений внутри валиков. Алгоритм построен на основе учета инерционных эффектов, а также вязкости и весомости жидкости и сил поверхностного натяжения. Результаты расчетов формы сухого пятна по предложенному методу сравниваются с данными расчетов работы [9], где форма валиков, ограничивающих сухое пятно, находится из условия баланса капиллярных сил и сил тяжести, действующих на валик в каждом его сечении. Показано, что при малых числах Рейнольдса оба метода дают близкие результаты и эти данные хорошо совпадают с результатами экспериментов. Однако при числах Рейнольдса, больших 1, различия весьма существенны. В то же время, известно [12, 13], что устойчивые пленочные течения с сухими пятнами существуют и при числах Рейнольдса, на порядки превышающих единицу. Дополнительно отметим, что предложенный метод позволяет не только получить форму сухого пятна в пленке на пластине, но и описать движение жидкости внутри валика, а также рассмотреть пленочное течение с сухим пятном по поверхности сложной геометрии.

Список обозначений

ρ — плотность жидкости,

h_0 — толщина стекающей пленки,

ν — кинематическая вязкость жидкости,

g — ускорение свободного падения,

α — угол наклона пластины к горизонту,

$g_a = g \sin \alpha$,

q — удельный объемный расход жидкости в пленке,

θ_0 — краевой угол смачивания,

$Re = q/\nu$ — число Рейнольдса,

$Fr = v_0/\sqrt{g_a h_0}$ — число Фруда,

$We = \rho h_0 v_0^2/\sigma$ — число Вебера.

Список литературы

1. Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.
2. Hobler T., Czajka J. Minimal wetting of a flat surface // *Chemia Stosow B2*. 1968. P. 169–177.
3. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газо-жидкостных систем // Москва: Энергия, 1976. 296 с.
4. Domansky I.V., Sokolov V.N. Determination of stable work regimes of evaporating apparatus with falling liquid film // *JPC-40*. 1967. No. 2. P. 363–370.
5. Hartley D.E., Murgatroyd W. Criteria for the break-up of thin liquid layers flowing isothermally over solid surfaces // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1964. Vol. 7, No. 9. P. 1003–1015.

6. **Mikilewicz J., Moszynski J.R.** Minimum thickness of a liquid film flowing vertically down a solid surface // Int. J. Heat Mass Transf. 1976. Vol. 19, No. 19. P. 771–776.
7. **Hughes D.T., Bott T.R.** Minimum thickness of a liquid film flowing down a vertical tube // Int. J. Heat Mass Transf. 1998. Vol. 41, No. 2. P. 253–260.
8. **Мальцев Л.И., Заварзин Д.С.** Критерий роста малых сухих пятен в стекающих пленках жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2007. Т. 14, № 2. С. 239–248.
9. **Podgorsky T., Flesseles J.-M., Limat L.** Dry arches within flowing films // Phys. Of Fluids. 1999. No. 11. P. 845–852.
10. **Мещерский М.В.** Труды по механике тел с переменной массой // Москва: Госиздат, 1952. 196 с.
11. **Bankoff S.G.** Minimum thickness of a draining film // Int. J. Heat Mass Transf. 1971. Vol. 14, No. 14. P. 2143–2145.
12. **Ponter A.B., Davies G.A., Ross T.K., Thornley P.G.** The influence of mass transfer on liquid film breakdown // Int. J. Heat Mass Transfer. 1967. Vol. 10, No. 13. P. 349–359.
13. **Гогонин И.И., Дорохов А.Р., Бочагов В.Н.** К вопросу образования “сухих пятен” в стекающих пленках жидкости // Изв. СО АН СССР. 1977. № 13, вып. 3. С. 46–51.

Статья поступила в редакцию 26 июля 2011 г.