

Здесь $\mu = 2Fr(1 + \varepsilon)a_1/h$, $c = 2h + \mu$.

В этом случае скорость жидкости в области D_- имеет вид

$$\bar{u}_-(z) = 1 + \frac{a_1^2}{i(z+ih)} - \frac{a_1}{i(z-ih)} - \frac{\mu(a_1+h)}{(z-ih)^2} + \frac{2\mu i h a_1}{(z-ih)^3},$$

а отображающая функция $q(\psi)$ и скорость жидкости в области D_+ будут соответственно

$$q(\psi) = \frac{2h - \mu}{i\psi - i} - ih + i\mu - \frac{\mu}{2}\psi;$$

$$\bar{u}_+(z) = 1 - \frac{\mu h}{(z+ih)^2}.$$

Линия разрыва плотности жидкости имеет форму уединенной волны, выпуклость которой зависит от знака циркуляции (фиг. 3)

$$y = \frac{\mu h^2}{x^2 + h^2}.$$

Поступила 20 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. — «Технические заметки ЦАГИ», 1935, вып. 52.
2. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении погруженных в жидкость тел. Соч. т. II. М., Изд-во АН СССР, 1949.
3. Некрасов А. И. О точечном вихре под поверхностью тяжелой идеальной жидкости в плоскопараллельном потоке. Соч. т. II. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. Тер-Крикоров А. М. Точное решение задачи о движении вихря под поверхностью жидкости. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1958, т. 22, вып. 2.
5. Филиппов И. Г. О движении вихря под поверхностью жидкости. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.

УДК 539.374

О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ИДЕАЛЬНО НЕУПРУГОЙ СРЕДЕ И УСТОЙЧИВОСТИ КУМУЛЯЦИИ

И. В. Симонов

(Москва)

Явление фокусировки ударных волн привлекало внимание многих авторов (обзор этих работ содержится в [1]). Исследованию в основном подвергался автомодельный режим схождения ударной волны. Поскольку сама задача фокусировки достаточно сложна, вопрос устойчивости этого явления изучен слабо. В поле нашего зрения имеется только одна работа [2] по устойчивости сходящейся ударной волны, в которой используется приближенный подход.

В предлагаемой работе рассматривается краевая задача о сходящейся ударной волне в цилиндре и сфере, а также эволюция малых неоднородных возмущений при движении этой волны к центру в идеально неупругой среде, материал которой испытывает постоянное уплотнение на фронте ударной волны, не зависящее от амплитуды волны. Подобная схема использовалась при расчете движения расходящейся ударной волны [3]. Она моделирует поведение некото-

рых реальных материалов (порошков, сильно пористых тел) в области высоких нагрузок. Решение этой задачи представляет интерес для такого рода приложений, как, например, прессование деталей из порошковых материалов. В теоретическом аспекте задача интересна как один из случаев кумуляции, допускающий достаточно полное исследование. Результаты сопоставляются со случаем сходящегося акустического скачка, причем это сопоставление замечательно следующим. Для произвольной идеальной среды введем переменный параметр κ , равный отношению скорости фронта ударной волны к скорости звука за фронтом. Заметим, что в силу необходимого условия устойчивости $0 \leq \kappa \leq 1$. Случай $\kappa=1$ отвечает акустике. Рассматриваемая среда характеризуется значением этого параметра $\kappa=0$. Таким образом, акустическая среда и рассматриваемая модель идеально неупругой среды являются диаметрально противоположными асимптотическими по параметру κ случаями произвольных сред.

Касательными напряжениями здесь можно пренебречь, поскольку они ограничены пределом текучести, а амплитуда давления возникающей сильной ударной волны растет при приближении к центру. На фронте возникают высокие температуры вследствие больших потерь на необратимую деформацию, а предел текучести должен обращаться в нуль в состоянии плавления.

Решение задачи о симметричном сжатии ударной волны к центру или оси строится аналогично [3]. Исследована асимптотика решения при $R \rightarrow 0$ (R — радиус фронта). Оказалось, что амплитуда растет существенно сильнее, чем в изученных ранее случаях однородных сред [1, 4, 5]. Система уравнений для амплитуд гармоник возмущений дважды интегрируется и сводится к одному обыкновенному интегро-дифференциальному уравнению для возмущения поверхности фронта. При малой величине уплотнения становится возможным асимптотический анализ решения. При значениях параметра уплотнения порядка единицы уравнение решалось с использованием численных методов. Отмечена неустойчивость нулевой и первой гармоник. Остальные гармоники устойчивы.

1. Пусть имеется однородная сфера (или цилиндр) радиуса R_0 , к поверхности которой в момент времени $t=0$ внезапно прикладывается давление $P_0(t)$. Нагрузка мгновенно достигает своего максимального значения, а затем монотонно убывает. Первоначальная плотность среды — ρ_0 . Примем, что при достижении в точке среды давления, сколь-нибудь большего нуля, плотность становится равной $\rho_1 = \text{const}$. Такая простейшая схема применяется в качестве модели пористых тел в области высоких давлений. Очевидно, от поверхности к центру тогда будет распространяться ударная волна. Пусть $r=R(t)$ и $r=R_1(t)$ — законы движения фронта ударной волны и поверхности, U — массовая скорость.

Сформулируем математическую задачу. Найти границы области движения $R(t)$ и $R_1(t)$ и функции $P(r, t)$ и $U(r, t)$, определенные в области $R_1(t) < r < R(t)$ и удовлетворяющие следующим уравнениям движения и неразрывности внутри области и условиям на фронте ударной волны и поверхности:

$$(1.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{1}{r^\nu} \frac{\partial (Ur^\nu)}{\partial r} = 0; \quad R_1(t) < r < R(t);$$

$$\begin{aligned} U &= \theta_0 \dot{R}; & P &= \rho_0 \theta_0 \dot{R}^2 & (r=R(t)); \\ P &= P_0(t); & U &= R_1 & (r=R_1(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\nu=1, 2$ соответствуют случаю цилиндра или сферы, $\theta_0 = (\rho_1 - \rho_0)/\rho_1$, $R_1(0) = R_0$, точка сверху означает производную по времени (\dot{R} — скорость фронта ударной волны).

Из уравнения неразрывности и первого условия на фронте следует

$$(1.2) \quad U = \theta_0 \dot{R} (R/r)^\nu; \quad R_1^{\nu+1} = (1 - \theta_0) R_0^{\nu+1} + \theta_0 R^{\nu+1}.$$

Подставляя выражение для U в первое уравнение (1.1) и интегрируя по r от $r=R$ до $r=R_1$, получим

$$R\ddot{R} + \frac{1}{2} A_\nu \dot{R}^2 = B_\nu, \quad (R(0) = R_0, \dot{R}(0) = \sqrt{P_0(0)/\rho_0\theta_0});$$

$$A_1 = 2 + \frac{2 - \theta_0(1 + R^2/R_1^2)}{\ln(R/R_1)}; \quad A_2 = 4 + \frac{2 - \theta_0(1 + R^4/R_1^4)}{R/R_1 - 1};$$

$$B'_1 = \frac{P_0(t)}{\rho_1\theta_0 \ln(R/R_1)}; \quad B'_2 = \frac{P_0(t)}{\rho_1\theta_0(R/R_1 - 1)}.$$

Полагаем $x=R/R_0$, $g=\rho_0\theta_0\dot{R}^2/P_0(0)$ и будем считать далее, не меняя обозначения, что $P_0=P_0(x)$, т. е. нагрузка задана как функция радиуса фронта. В данном случае это не является существенным ограничением. Отметим, что всякой монотонно убывающей функции $P_0(x)$ будет соответствовать монотонно убывающая функция $P_0(t)$, а чтобы решить задачу для конкретного вида нагрузки $P_0(t)$, здесь требуется подбирать $P_0(x)$ таким образом, чтобы это соответствие было соблюдено (так называемый полуобратный метод). Главной целью является исследование поведения решения при $x \rightarrow 0$, которое, как оказалось, не зависит от граничного условия. Для длительного импульса на поверхности, который можно моделировать «ступенькой», это допущение не является существенным.

Уравнение (1.2) в безразмерных переменных примет вид

$$(1.3) \quad x \frac{d^2g}{dx^2} + A_\nu g = B_\nu \quad (g(1) = 1),$$

$$B_1 = \frac{2(1-\theta_0)P_0(x)}{\ln(R/R_1)P_0(0)}; \quad B_2 = \frac{2(1-\theta_0)P_0(x)}{(R/R_1-1)P_0(0)}; \quad \frac{R}{R_1} = \left[\frac{1-\theta_0}{x^{\nu+1}} + \theta_0 \right]^{-\frac{1}{\nu+1}}.$$

При $x \rightarrow 1$ A_ν и B_ν имеют особенности: A_1 и B_1 — логарифмическую, A_2 и B_2 — степенную. Можно показать, что решением (1.3) является несобственный интеграл

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \exp[-F_\nu(x, \varepsilon)] \int_{1-\varepsilon}^x \xi^{-1} B_\nu(\xi) \exp[F(\xi, \varepsilon)] d\xi \right\},$$

где

$$F_\nu(x, \varepsilon) = \int_{1-\varepsilon}^x \xi^{-1} A_\nu(\xi) d\xi.$$

В результате выделения особенностей решение можно свести к квадратурам

$$(1.4) \quad g = \frac{\exp[-G_1(x)]}{(x \ln x)^2} \int_1^x \xi (\ln \xi)^2 B_1(\xi) \exp[G_1(\xi)] d\xi \quad (\nu = 1);$$

$$g = \frac{\exp[-G_2(x)]}{x^2(1-x)^2} \int_1^x \xi (1-\xi)^2 B_2(\xi) \exp[G_2(\xi)] d\xi; \quad (\nu = 2).$$

Здесь

$$G_1(x) = \int_1^x \left[\frac{2 - \theta_0(1 + \bar{\xi}^2)}{\ln \bar{\xi}} - \frac{2}{\ln \bar{\xi}} \right] \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}};$$

$$G_2(x) = \int_1^x \left[\frac{2}{1-\bar{\xi}} - \frac{2 - \theta_0(1 + \bar{\xi}^4)}{1-\bar{\xi}} \right] \frac{d\bar{\xi}}{\bar{\xi}};$$

где

$$\bar{\xi} = \xi(1 - \theta_0 + \theta_0 \xi^{1+\nu})^{-1/(1+\nu)}.$$

Функцию $U(r, x)$ можно определить из первого соотношения (1.2); для того чтобы получить $P(r, x)$, следует проинтегрировать первое уравнение (1.1) от некоторой точки r внутри области до $r=R_1$ (а не от $r=R$, как это было сделано ранее). Выражения для этих величин на фронте следуют из (1.1). Выпишем их

$$U = \sqrt{\rho_0^{-1} \theta_0 P_0(0) g(x)}, \quad P = P_0(0) g(x).$$

Зависимость $x=x(t)$ можно получить из уравнения

$$t = R_0 \sqrt{\frac{\rho_0 \theta_0}{P_0(0)}} \int_1^x \frac{dx'}{\sqrt{g(x')}},$$

а тогда остальные искомые функции и функция P_0 будут известны как функции переменных r, t или только t .

Из (1.4) следует асимптотика функций g при $x \rightarrow 0$

$$g \sim \frac{1}{x^2 |\ln x|^{2-\theta_0}} \quad (\nu=1); \quad g \sim \frac{1}{x^{2+\theta_0}} \quad (\nu=2).$$

Асимптотика функций P, U на фронте при $x \rightarrow 0$ такова:

$$(1.5) \quad P \sim \frac{1}{x^2 |\ln x|^{2-\theta_0}}; \quad U \sim \frac{1}{x |\ln x|^{1-\theta_0/2}} \quad (\nu=1);$$

$$P \sim \frac{1}{x^{2+\theta_0}}; \quad U \sim \frac{1}{x^{1+\theta_0/2}} \quad (\nu=2).$$

Здесь полезно отметить, что $0 < \theta_0 < 1$.

Как и следовало ожидать, граничное условие не влияет на характер асимптотики.

Для сопоставления приведем случай сходящегося акустического скачка (линейная акустика) и сходящейся ударной волны в идеальном газе. Рост амплитуды давления в акустическом случае $P \sim x^{-1/2}$ при $\nu=1$ и $P \sim x^{-1}$ при $\nu=2$. В идеальном газе [4,6] $P \sim x^{-k}$, где $k \approx 0,79$ для показателя адиабаты $\gamma=7/5$, $k \approx 0,49$ при $\gamma=0$, $k \rightarrow 1,4$ при $\gamma \rightarrow \infty$ ($\nu=2$). Как следует из (1.5), изучаемый случай отличается от перечисленных существенно большей особенностью (степенью кумуляции) величин на фронте. Причиной столь сильной кумуляции здесь является не кривизна фронта, как в акустике (иначе показатель степени был бы вдвое больше у сферы, чем у цилиндра), а резкое торможение части сферы или цилиндра, пришедшей в движение на ударной волне при приближении последней к центру.

Рассмотрим поведение функций внутри области при $x \rightarrow 0$. Из соотношений для $U(r, x)$ и $P(r, x)$ следует при фиксированном r и $x \rightarrow 0$

$$(1.6) \quad U \sim \frac{1}{r |\ln x|^{1-\theta_0/2}}; \quad P \sim \frac{\ln(r/R_1)}{x^2 |\ln x|^{3-\theta_0}} \quad (\nu=1);$$

$$U \sim \frac{x^{1-\theta_0/2}}{r^2}; \quad P \sim \frac{1-r/R_1}{x^{1+\theta_0}} \quad (\nu=2).$$

Полная кинетическая энергия среды

$$E = 2\pi\nu\rho_1 \int_{R_1}^R U^2 r^\nu dr$$

при $x \rightarrow 0$, имеет асимптотику

$$(1.7) \quad E \sim |\ln x|^{\theta_0-1} \quad (\nu=1); \quad E \sim x^{1-\theta_0} \quad (\nu=2).$$

Таким образом, как любая фиксированная точка, так и вся среда в целом останавливается при $x \rightarrow 0$ ((1.6), (1.7)).

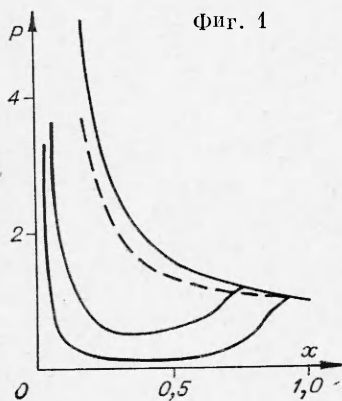
Можно показать из энергетических соображений, что после фокусировки движения не возникает и решение имеет вид

$$P(r, t) = P_0(t); \quad U(r, t) = 0.$$

Из (1.6) следует, что давление в каждой точке $R_1 < r < R$ имеет особенность при $R \rightarrow 0$. Однако плотность внутренней энергии остается ограниченной вследствие ограниченности деформации. Распределение удельной внутренней энергии e (на единицу массы) имеет вид

$$e = \frac{1}{2} \rho_0^{-1} \theta_0 P_0(0) g(r/R_0).$$

Это выражение для функции e получено с учетом того, что в данной модели вся внутренняя энергия является тепловой энергией (упругая энергия не запасается), а теплопроводностью пренебрегается. Если сделать дополнительное предположение о связи температуры T с внутренней энергией, то можно получить зависимость $T = T(r)$.



Фиг. 1

Для иллюстрации проведены некоторые расчеты. На фиг. 1 приведены графики зависимости амплитуды давления на фронте от координаты фронта (цилиндр). Форма прикладываемой к поверхности нагрузки — «ступенька» (верхняя сплошная кривая) и прямоугольник (две следующие сплошные кривые) длительности, равной времени прохождения волной половины и четверти массы цилиндра соответственно. Значение θ_0 при этом выбиралось равным 0,25. Штрихом показана кривая для $\theta_0 = 0,5$ и случая ступенчатой нагрузки. При постоянно действующей нагрузке наблюдается непрерывный рост давления на фронте, причем вначале чем меньше θ (т. е. чем «жестче» среда), тем рост

амплитуды больше вследствие меньших потерь на необратимую деформацию. Однако, как показывает численный счет и следует из формул (1.5), кумуляция несколько сильнее в среде с большим θ_0 (на графике это не очень заметно).

Если импульс конечный, то давление на фронте растет, пока действует нагрузка, затем после сбрасывания нагрузки оно довольно резко падает — наступает процесс затухания из-за необратимых потерь, достигает минимума и, наконец, где-то значительно ближе к центру, чем в случае «ступеньки», выходит на асимптотику, согласно (1.5).

При изучении явления неограниченной кумуляции всегда возникает вопрос устойчивости [1]. В п. 2 решена более сложная задача об эволюции малых возмущений за фронтом движущейся к центру ударной волны и сделаны некоторые выводы об устойчивости кумуляции.

2. В линейной постановке рассмотрим влияние малых неоднородных возмущений на движения среды, которые изучались в п. 1. Источником возмущений является граница, на которой задаются малые возмущения прикладываемой нагрузки. Подробнее остановимся на случае цилиндрической сходящейся волны. Считаем, что возмущения вдоль образующей цилиндра постоянны (такие вариации возмущений, очевидно, не влияют

на устойчивость кумуляции). Тогда система уравнений для малых возмущений в полярных координатах r, φ примет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial(Uu')}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p'}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{U}{r} \frac{\partial(w'r)}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1 r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial(u'r)}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial \varphi} &= 0, \quad (R_1(t) < r < R(t)). \end{aligned}$$

Здесь p', u' и w' — малые возмущения давления и скоростей по r и φ соответственно.

Уравнение поверхности фронта будем искать в виде

$$r = R(t) - f'(\varphi, t),$$

где f' — малое возмущение поверхности фронта.

Аналогично плоскому случаю [7, 8] из законов сохранения на скачке получим условия на цилиндрическом фронте ударной волны $r = R(t)$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p' &= -2\rho_0\theta_0\dot{R} \frac{\partial f'}{\partial t}; \quad u' = -\theta_0 \frac{\partial f'}{\partial t}; \\ w' &= \frac{\theta_0\dot{R}}{R} \frac{\partial f'}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

При $r = R_1(t)$ должны выполняться следующие условия:

$$(2.3) \quad p' = p_0'(\varphi, t); \quad f' = f_0'(\varphi).$$

Физически второе условие означает малую неодновременность начала действия внешней нагрузки в разных точках поверхности цилиндра.

Задача о малых возмущениях за сходящейся цилиндрической ударной волной сводится, таким образом, к математической задаче определения функций u', w', p', f' , удовлетворяющих системе уравнений (2.1) и условиям (2.2), (2.3). По своему типу система уравнений (2.1) эллиптическая, и для нее поставлена краевая задача.

Совершим замену переменных

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u &= u'R_0/r; \quad w = w'r/R_0; \quad p = p'R_0/(\rho_1 R\dot{R}); \quad f = f'\theta_0/R_0; \\ h &= r^2/R_0^2; \quad \tau = R^2/R_0^2; \quad \tau_1 = R_1^2/R_0^2 = 1 - \theta_0 + \theta_0\tau \end{aligned}$$

и будем искать неизвестные функции в виде рядов Фурье: u, p, f — по $\sin n\varphi$, а w — по $\cos n\varphi$. Система уравнений (2.1) и условия (2.2), (2.3) для амплитуд гармоник приводятся к виду

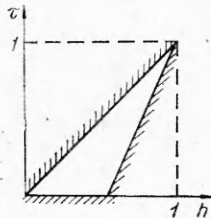
$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial \tau} + \theta_0 \frac{\partial u_n}{\partial h} + \frac{\partial p_n}{\partial h} &= 0; \\ \frac{\partial w_n}{\partial \tau} + \theta_0 \frac{\partial w_n}{\partial h} + \frac{np_n}{2} &= 0; \quad \frac{\partial(u_n h)}{\partial h} - \frac{nw_n}{2h} = 0; \\ &(\tau_1 < h < \tau); \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad p_n = -4(1 - \theta_0)\dot{R} \frac{df_n}{d\tau}; \quad u_n = -2\dot{R} \frac{df_n}{d\tau}; \quad w_n = n\dot{R}f_n \quad (h = \tau);$$

$$(2.7) \quad p_n = p_{n0}(\tau); \quad f_n = f_{n0} \quad (h = \tau_1),$$

где n — номер гармоники ($n=0, 1, 2, \dots$), переменные p_n, u_n и w_n имеют размерность скорости, остальные переменные — безразмерные; аналогично предыдущему пункту будем задавать возмущение нагрузки как функцию радиуса фронта h , не меняя обозначения, считаем далее, что $\dot{R} = \dot{R}(\tau)$.

Замена переменных (2.4) удобна тем, что первые два уравнения (2.5) имеют постоянные коэффициенты, а область интегрирования в плоскости h, τ есть треугольник (фиг. 2), $0 < \tau < 1$, $1 - \theta_0 + \theta_0 \tau < h < \tau$ со сторонами $h = \tau$ (фронт ударной волны), $h = 1 - \theta_0 + \theta_0 \tau$ (поверхность цилиндра), $\tau = 0$ (момент фокусировки).



Фиг. 2

Исключим из первых двух уравнений (2.5) p_n , затем проинтегрируем получившиеся соотношения между u_n и w_n от произвольной точки фронта $h = \tau$ в глубь области интегрирования вдоль линии, параллельной границе $h = 1 - \theta_0 + \theta_0 \tau$, и, наконец, исключим из получившегося уравнения и третьего уравнения (2.5) функцию u_n . Придем к уравнению относительно w_n

$$(2.8) \quad h^2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial h^2} + h \frac{\partial w_n}{\partial h} - \frac{n^2}{4} w_n = \psi_n.$$

$$\text{Здесь} \quad \psi_n = h \frac{\partial}{\partial h} \left\{ h \left[(w_n)_h(\eta, \eta) - \frac{n}{2} u_n(\eta, \eta) \right] \right\},$$

$$\text{где} \quad \eta = \frac{h - \theta_0 \tau}{1 - \theta_0}.$$

Уравнение (2.8) замечательно тем, что левая часть его не содержит производных по τ , а правая часть зависит от значений w_n и u_n на фронте $h = \tau$. Желая в дальнейшем свести задачу к определению одной функции, выразим u_n и dw_n/dh на фронте через f_n . Функция $u_n(\tau, \tau)$ связана с $f_n(\tau)$ вторым соотношением (2.6). Дифференцируя третье соотношение (2.6) в системе координат, движущейся вместе с невозмущенным фронтом

$$\frac{\partial w_n}{\partial \tau} + \frac{\partial w_n}{\partial h} = n \frac{d(\dot{R}f_n)}{d\tau} \quad (h = \tau),$$

и исключая $dw_n/d\tau$, благодаря второму уравнению системы (2.5) и первому из условий (2.6), получим

$$\frac{\partial w_n}{\partial h} = \frac{n}{1 - \theta_0} \frac{d(\dot{R}f_n)}{d\tau} - 2n\dot{R} \frac{df_n}{d\tau};$$

$$\psi_n = h \frac{\partial}{\partial h} \left\{ h \left[\frac{n}{1 - \theta_0} \frac{d(\dot{R}f_n)}{d\eta} - n\dot{R} \frac{df_n}{d\eta} \right] \right\}.$$

Здесь зависимость всех функций в квадратных скобках от переменной η получается формальной заменой τ на η .

Из второго уравнения (2.5) следует условие для w_n на поверхности цилиндра, совместное с третьим условием (2.6)

$$w_n = -\frac{n}{2} \int_1^\tau p_{n0}(\tau') d\tau' + n\dot{R}(1) f_{n0} \equiv \mu(\tau) \quad (h = 1 - \theta_0 + \theta_0 \tau).$$

Введем новую независимую переменную $\zeta = (n \ln h)/2$. Имеем

$$(2.9) \quad A < \zeta < B: \quad \frac{\partial^2 w_n}{\partial \zeta^2} - w_n = \tilde{\psi}_n;$$

$$(2.10) \quad \zeta = A: \quad w_n = \mu_1(\tau); \quad \frac{\partial w_n}{\partial \zeta} = \mu_2(\tau);$$

$$\zeta = B: \quad w_n = \mu(\tau);$$

$$\left(f_n(1) = f_{n0}, \quad \frac{df_n}{d\tau} \Big|_{\tau=1} = -\frac{p_{n0}(1)}{4(1-\theta_0)\dot{R}(1)} \right).$$

Здесь

$$A = \frac{n}{2} \ln \tau; \quad B = + \frac{n}{2} \ln(1 - \theta_0 + \theta_0 \tau); \quad \mu_1 = n \dot{R} f_n;$$

$$\mu_2 = 2\tau \left[\frac{1}{1 - \theta_0} \frac{d(\dot{R} f_n)}{d\tau} - 2\dot{R} \frac{df_n}{d\tau} \right]; \quad \tilde{\Psi}_n[\zeta(h), \tau; f_n] = \Psi_n(h, \tau; f_n).$$

Первоначальная задача, таким образом, сведена к задаче определения двух функций: $w_n(\zeta, \tau)$ и $f_n(\tau)$, удовлетворяющих уравнению (2.9) и краевым условиям (2.10). Последняя обладает следующими особенностями. В уравнение (2.9) входит производная w_n только по τ . Функция $f_n(\tau)$ и ее первая производная входят в правую часть (2.9) и в условия (2.10) в качестве граничной функции. Это позволяет процесс построения решения разбить на два этапа. Сначала, рассматривая (2.9) как обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение для w_n , найдем его решение. При этом считаем f_n известной функцией, переменную τ рассматриваем как параметр, а поскольку условий для решения этого уравнения на одно больше, чем требуется, примем во внимание только второе и третье краевые условия (2.10). В полученном решении w_n будет выражена через f_n . Затем, удовлетворяя первому условию (2.10), придем к уравнению для одной функции f_n .

Функция Грина $F(\zeta, \xi)$ для уравнения (2.9), удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=A} = 0, \quad F(B, \xi) = 0;$$

есть

$$F = \begin{cases} \frac{\text{ch}(\zeta - A) \text{sh}(\xi - B)}{\text{ch}(B - A)}, & \zeta \leq \xi, \\ \frac{\text{ch}(\xi - A) \text{sh}(\zeta - B)}{\text{ch}(B - A)}, & \zeta \geq \xi. \end{cases}$$

Решение уравнения (2.9) с указанными краевыми условиями записывается в виде

$$w_n = \int_A^B F(\zeta, \xi) \tilde{\Psi}_n(\xi, \tau; f_n) d\xi + \mu_2 \frac{\text{sh}(\xi - B)}{\text{ch}(B - A)} + \mu_1 \frac{\text{ch}(\zeta - A)}{\text{sh}(B - A)}.$$

Удовлетворим оставшемуся из числа трех краевых условий (2.10) и после некоторых преобразований придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению для f_n

$$(2.11) \quad a \frac{df_n}{d\tau} = \int_{\tau}^1 \left(b \frac{df_n}{d\eta} + cf_n(\eta) + d \right) d\eta;$$

$$f_n(1) = f_{n0}, \quad \frac{df_n}{d\tau} \Big|_{\tau=1} = - \frac{p_{n0}(1)}{4(1 - \theta_0) \dot{R}(1)}.$$

Здесь

$$a = n^{-1} \tau \dot{R} (1 + \theta) (\alpha_*^{n/2} - \alpha_*^{-n/2}); \quad b = \frac{1}{2} \dot{R} (\alpha^{n/2} - \alpha^{-n/2});$$

$$c = \frac{n(1 + \theta) \dot{R}}{4(\eta + \theta\tau)} (\alpha^{n/2} - \alpha^{-n/2}); \quad d = \frac{1}{2} p_{n0}(\tau); \quad \alpha = (\eta + \theta\tau)/(1 + \theta\tau);$$

$$\alpha_* = (1 + \theta)\tau/(1 + \theta\tau); \quad \theta = \theta_0/(1 - \theta_0); \quad \dot{R} = \dot{R}(\tau).$$

После того, как f_n найдена (численное решение задачи (2.11) не представляет больших затруднений), остальные искомые функции находятся, поскольку они могут быть выражены через f_n .

Проведем исследование решения задачи при малых значениях параметра θ . Дифференцируя обе части уравнения (2.11) по τ и пренебрегая

при $\theta \ll 1$ малыми членами, придем к уравнению

$$\frac{d^2 \bar{f}_n}{dx^2} - \frac{1}{x} \left[1 + x \frac{d \ln \dot{R}(x)}{dx} + \frac{2n(1+x^{2n})}{x^{2n}-1} \right] \frac{d \bar{f}_n}{dx} + \frac{n^2}{x^2} \bar{f}_n = \frac{2n \dot{R}(x) p_{n0}(x)}{x^2(x^{-n} + x^n)},$$

где

$$\bar{f}_n(x) = f_n(\tau(x)) = f_n(x^2).$$

К этому же уравнению можно прийти, если в уравнениях (2.1) пренебречь малыми высшего порядка и свести получившуюся упрощенную задачу к уравнению для одной функции f_n .

Асимптотика функции \bar{f}_n при $x \rightarrow 0$ (обозначим ее \tilde{f}_n) удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{d^2 \tilde{f}_n}{dx^2} - 2nx \frac{d \tilde{f}_n}{dx} + n^2 \tilde{f}_n = 0,$$

общее решение которого

$$\tilde{f}_n = c_1 x^{\lambda_n^{(1)}} + c_2 x^{\lambda_n^{(2)}},$$

где c_1 и c_2 — константы, а $\lambda_n^{(1),(2)} = n + \frac{1}{2} \pm \sqrt{n + \frac{1}{4}}$.

Асимптотическое поведение f_n при $x \rightarrow 0$ определяется значением наименьшего показателя степени, т. е.

$$(2.12) \quad \bar{f}_n(x \rightarrow 0) \sim x^{n + \frac{1}{2} - \sqrt{n + \frac{1}{4}}},$$

причем $n + \frac{1}{2} - \sqrt{n + \frac{1}{4}} \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Устойчивость или неустойчивость симметричной фокусировки характеризует отношение амплитуды возмущения поверхности фронта к радиусу фронта

$$(2.13) \quad \frac{\bar{f}_n}{x} \sim x^{\alpha_n}; \quad \alpha_n = n - \frac{1}{2} - \sqrt{n + \frac{1}{4}} = \begin{cases} -1, & n = 0 \\ -0,618, & n = 1 \\ 0, & n = 2 \end{cases}$$

$$\alpha_n > 0, \quad n > 2.$$

Таким образом, первая гармоника неустойчива, вторая гармоника относительно устойчива, гармоника с $n > 2$ абсолютно устойчива (очевидно, поведение гармоники с $n=0$ никак не сказывается на устойчивости фокусировки). В то же время заметим, что $\bar{f}_n \rightarrow 0$ ($n=1, 2, \dots, x \rightarrow 0$), т. е. фронт стягивается к центру оси, но несимметрично из-за $\bar{f}_1/x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow 0$).

Так как на фронте величины p'_n/P , u'_n/U и $d\bar{f}_n/dx$ одного порядка при $x \rightarrow 0$, то асимптотические формулы для относительных величин возмущений давления и скорости аналогичны (2.13).

Сопоставим полученные результаты с акустическим случаем. Рост возмущений на фронте сходящегося акустического скачка $\sim x^{-1}$. Следовательно, в акустике неустойчивость проявляется существенно сильнее: при $n=1$ скорость роста возмущений значительно больше, чем в рассмотренном случае; при $n > 1$ особенность в акустике остается, а в (2.13) — пропадает. В акустике [1] фокусировка расстраивается, «размазывается» на конечную область. В данном случае фронт стягивается к центру. Но поскольку из-за роста возмущений полученное решение теряет силу, вопрос о несимметричной фокусировке остается открытым.

Для учета зависимости поведения \bar{f}_n и P'_n на фронте от параметра θ была составлена программа численного решения уравнения (2.14) методом конечных разностей.

Результаты проиллюстрированы на фиг. 3—6. Сплошными кривыми показана зависимость $\bar{f}_n = \bar{f}_n(x)$, штриховыми — $\frac{P'_n}{P} = \frac{P'_n(x)}{P(x)}$ для значений $\theta = (\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 = 0,1; 2, 0$. Входными данными при расчетах являлись

$$\bar{f}_{n0} = 1; \quad \left. \frac{d\bar{f}_n}{dx} \right|_{x=1} = -1; \quad P_0(x) = p_{n0}(x) = \text{const.}$$

При $\theta = 0,1$, как видно из графиков, асимптотика наступает при $x \approx 0,2-0,3$ и находится в согласии с результатами (2.12), (2.13), полученными для $\theta \ll 1$. Сравнивая эти кривые с кривыми, соответствующими значению $\theta = 2,0$, можно заметить некоторые качественные различия: при $\theta = 2,0$ наблюдаются колебания возмущений. Однако вопрос устойчивости при значениях θ порядка единицы решается так же, как и при $\theta \ll 1$.

Для того, чтобы выяснить, как ведут себя возмущения в области вне фронта, рассчитывалось возмущение нормальной скорости частиц поверхности цилиндра u'_n . Это возмущение монотонно растет, оставаясь ограниченным при $x \rightarrow 0$. Такое поведение u'_n является естественным, так как жидкий цилиндр под действием несимметрического давления на поверхности будет расплываться с течением времени.

Остановимся коротко на случае сферы. При $\theta \ll 1$ для асимптотики радиальной составляющей возмущения поверхности фронта f_{nm} аналогично предыдущему получим уравнение

$$x^2 \frac{d^2 \tilde{f}_{nm}}{dx^2} - (2n+1)x \frac{d\tilde{f}_{nm}}{dx} + n(n+1)f_{nm} = 0.$$

Наименьший показатель степени λ_n у частных решений этого уравнения x^{λ_n} есть $\lambda_n = n+1 - \sqrt{n+1}$. Асимптотическая формула для f_{nm}/x имеет вид

$$f_{nm}/x \sim r^n - \sqrt{n+1}.$$

При $n=1$ показатель степени равен $\approx -0,43$; при $n > 1$ — положительный.

Таким образом, все выводы относительно неустойчивости фокусировки в цилиндрическом случае остаются в силе и для сферического случая.

В заключение отметим следующее. Простота выбранного уравнения состояния позволила задачу о сжатии ударной волны исследовать математически с достаточной полнотой. Рассмотренный случай физически интересен тем, что он отличается от других изученных случаев фокусировки ударных волн в однородных средах наибольшей степенью кумуляции. Исследование асимптотики гармоник возмущений показало, что растут только две из них (нулевая и первая), причем особенность гармоники с $n=1$ меньше, чем в акустике. Таким образом, найден случай наиболее сильной кумуляции, обладающий в то же время «наибольшей устойчивостью».

Тот факт, что идеально неупругая и акустическая среды являются предельными моделями идеальных сред по параметру κ , как это было отмечено во введении, позволяет высказать предположение, что для идеальной среды, существенно отличающейся от этих предельных лишь значением параметра κ , результаты будут иметь промежуточный характер.

