ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейланд В. Я.** К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4.
2. **Stewarston K., Williams P.** Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc., A, 1969, vol. 312, N 1509.
3. **Нейланд В. Я., Соколов Л. А.** Влияние энтропийного слоя на отрыв пограничного слоя в гиперзвуковом потоке.— Учен. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 3.
4. **Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.** О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
5. **Нейланд В. Я., Соколов Л. А.** Влияние энтропийного слоя на обтекание гиперзвуковым потоком аэродинамических органов управления.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1.

УДК 532.50

АЭРОДИНАМИКА ГИПОЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ (О ТЕЧЕНИЯХ С МАЛЫМИ ЧИСЛАМИ МАХА)

Р. Х. Зейтунян

(*Лилль, Франция*)

1. **Введение.** Эта работа является результатом размышлений о понятии слабосжимаемого течения и связанных с ним разнообразных эффектов нестационарности, вязкости и акустики. Рассматриваются только течения совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями при отсутствии силы тяжести. С самого начала не учитываются эффекты вращения, силы Кориолиса и электрических и магнитных полей, так что исходными уравнениями являются классические уравнения Навье — Стокса. Эта работа в том ее виде, в каком она представлена здесь читателю, возможно удивит его тем, что здесь нет детального исследования конкретной задачи, а, скорее, содержится перечень вопросов, которые в настоящее время ставит требование правильного учета слабой сжимаемости при математическом моделировании разнообразных физических явлений. Рассуждения иллюстрируются несколькими простыми задачами, и для некоторых из них даются элементы решений.

Предложен общий термин «гипозвуковой» для характеристики этих слабосжимаемых течений газа. Таким образом, данная работа представляется в большей степени как программа.

Рассмотрим движения совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями c_p и c_V, который может быть вязким и теплопроводным; будем называть эти движения просто течениями. Кинематическое описание рассматриваемого течения осуществляется с использованием переменных Эйлера: времени t и координат x_i ($i = 1, 2, 3$) жидкой частицы течения в ортонормированной декартовой системе координат. Обозначения классические: $\mathbf{u}$ — скорость с компонентами u_i; p, ρ и T — давление, плотность и температура. Предполагается, что в качестве величин для обезразмеривания выбраны: U_∞ — для скорости, t_0 — для времени, L_0 — для вектора положения, p_∞, ρ_∞, T_∞ — для термодинамических элементов. В этом случае в безразмерных переменных и с использованием тех же обозначений для различных величин уравнения, описывающие рассматриваемое течение, принимают классический вид [1]:

$$\rho\frac{D\mathbf{u}}{Dt}+\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\nabla p=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\Delta\mathbf{u}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right\},\tag{1.1}$$

$$\frac{D\log\rho}{Dt}+\nabla\cdot\mathbf{u}=0,$$

$$\rho\frac{DT}{Dt}-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Dp}{Dt}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta T+(\gamma-1)\frac{M^2}{\mathrm{Re}}\Phi,\quad p=\rho T,$$

где $D/Dt = S\partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$, $\Delta = \nabla^2$. На уровне уравнений (1.1) предполагаем, что коэффициент объемной вязкости равен нулю (гипотеза Стокса) и что коэффициенты динамической вязкости μ_0 и теплопроводности k_0 постоянны. Через Φ обозначена вязкая объемная диссипация (известная функция **u**). Наконец, $\gamma = c_p/c_V$ и $R = c_p - c_V$; $\mathrm{S} = L_0/t_0U_\infty$ — число Струхаля; $\mathrm{M}_\infty = U_\infty/c_\infty$ —число Маха, где $c_\infty^2 = \gamma RT_\infty$; $\mathrm{Re} = U_\infty L_0/(\mu_0/\rho_0)$— число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} = \mu_0 c_p/k_0$ — число Прандтля.

Обычно в классической аэродинамике предполагается, что число Маха M_∞ является важным параметром для течений, в которых достигается область больших скоростей, и в этом случае оно характеризует влияние сжимаемости на течение с большой скоростью [2]. Напротив, течения с малыми числами Маха ($\mathrm{M}_\infty \ll 1$) традиционно связываются с понятием несжимаемости [3]. Однако многочисленные работы по генерированию аэродинамического шума течениями, начало которым положено в [4, 5], основываются в некоторой своей части на тонком механизме, согласно которому течение с малым числом Маха является течением, где сжимаемость играет существенную роль при условии, что наблюдение за ним осуществляется на достаточном расстоянии или в течение короткого промежутка времени после выхода из состояния покоя.

Многие физические задачи вытекают из теории течений при $\mathrm{M}_\infty \ll 1$, и в связи с этим следует указать работу [6]. Приведем здесь только два примера *: с одной стороны, это течение, соответствующее фазе сжатия в двигателе внутреннего сгорания, с другой стороны, сильно нестационарное явление входа поезда на большой скорости в туннель. Все, что было сказано выше, побуждает нас в настоящее время рассматривать различные последствия концепции течения с малым числом Маха на математическое моделирование многочисленных физических явлений в мире, который нас окружает.

Ниже будем использовать термин гипозвуковой для того, чтобы характеризовать эти задачи о течениях с $\mathrm{M}_\infty \ll 1$.

2. Общие соображения для случая $\mathrm{S} \neq 0$, $\mathrm{Re} \neq \infty$. Когда рассматривается течение, описываемое уравнениями (1.1), нужно в соответствии с решаемой физической задачей наложить начальные условия, условия на стенке Σ области, ограничивающей течение, и, возможно, когда эта область простирается до бесконечности (внешняя задача), условия поведения на бесконечности.

Оказывается, что переход к пределу $\mathrm{M}_\infty \to 0$, который выделяет акустические волны, делает некорректно поставленной (в классическом смысле Адамара) задачу Коши с начальными условиями, заданными исходя из уравнений (1.1). В настоящее время не умеют строить равномерно справедливое асимптотическое представление (во времени и во всем физическом пространстве, занимаемом течением) слабосжимаемого течения около трехмерного препятствия, исходя из уравнений Навье — Стокса (1.1) с учетом начальных условий, граничных условий на стенке Σ и поведения на бесконечности (внешняя задача). Когда $\mathrm{S} = O(1)$ и $\mathrm{Re} = O(1)$, эта задача очень сложна, поскольку представляется затруднительным анализ поведения начального и конечного решений, которые описывают гипозвуковое течение в окрестности $t = 0$ и в окрестности бесконечности соответственно. С другой стороны, необходимо также учитывать условие для температуры на Σ; условие этого типа может быть записано в виде

$$T = 1 + \tau_0\Theta \text{ на } \Sigma, \tag{2.1}$$

где $\tau_0 = \Delta T_\infty/T_\infty$, а ΔT_∞ — характерное изменение температуры, связанное с тепловым полем Θ, которое предполагается известным на Σ.

---

* Мы не рассматриваем атмосферные течения, которые вполне естественно являются течениями при $\mathrm{M}_\infty \ll 1$ и для которых слабая сжимаемость играет важную роль при взаимодействиях, являющихся следствием силы Кориолиса, бароклинности и стратификации; по этой теме можно отослать читателя к работам [7, 8], а также к [9]. Что касается влияния слабой сжимаемости на магнитогидродинамические течения, то можно найти некоторые результаты в [10]. Наконец, остается создать асимптотическую теорию динамики океанов, используя единый подход, основанный на гипотезе (очень реалистической) о том, что $\mathrm{M}_\infty \ll 1$ для жидкостей.

С учетом этого факта представляется достаточно естественным рассматривать двойной переход к пределу:

$$M_\infty \to 0 \text{ и } \tau_0 \to 0.$$

Существует приближенное выражение для решения внешней задачи при M_∞ и τ_0, стремящихся к нулю, в виде разложения, содержащего только один малый параметр, которое удовлетворяет двум частным случаям [11]: M_∞ фиксировано, $\tau_0 \to 0$, $M_\infty \to 0$; τ_0 фиксировано, $M_\infty \to 0$, $\tau_0 \to 0$. Это описание, называемое промежуточным, имеет физический смысл, оно состоит в том, что два малых параметра M_∞ и τ_0 устремляются к нулю одновременно таким образом, что поправка на слабую сжимаемость имеет тот же порядок, что и поправка, учитывающая тепловой эффект. Этот способ рассмотрения является обобщением принципа наименьшего вырождения, применяемого к задачам с многими малыми параметрами, который требует, чтобы все параметры стремились к нулю так, чтобы сохранялся максимум членов в первой поправке.

В работе [3] при $S = 0$ рассмотрен случай $\tau_0 = \Lambda_0 M_\infty^\lambda$, $M_\infty \to 0$ с фиксированным Λ_0 порядка единицы. Оказалось, что тогда нужно рассматривать три различные ситуации, соответствующие $0 < \lambda < 2$, $\lambda = 2$ и $\lambda > 2$. Естественно, в этом случае полученные асимптотические представления являются равномерно справедливыми в рассматриваемом физическом пространстве.

3. Случай гипозвукового течения внутри ограниченной области. Задача о гипозвуковом течении внутри ограниченной области, граница которой является деформируемой и подвергается действию теплового поля, рассмотрена в [12, 13]. Для того чтобы прояснить особенный характер предельного перехода $M_\infty \to 0$, исследуется поведение гипозвукового течения с малой вязкостью в начальной фазе движения, где безразмерное время имеет порядок $O(M_\infty)$. Это означает, что выбран такой масштаб времени, который соответствует одному выходу и возвращению звуковой волны в ограниченной области. При этом масштабе времени вновь появляются производные по времени и, следовательно, имеется возможность удовлетворить налагаемым начальным условиям; уравнениями движения являются уравнения классической акустики. Собственные моды колебаний возбуждаются таким образом, как если бы стенка ограниченной области была приведена в движение. Когда это движение стенки осуществляется в шкале времени порядка $O(M_\infty)$, независимо от того, будет оно внезапным или постепенным в этой шкале, возникает задача о том, какими станут эти собственные колебания во временном периоде $O(1)$, на котором нужно исследовать течение несжимаемой жидкости. Но так как акустические волны проходят весь начальный период без ослабления, нужно ожидать их существования в течение длительного периода времени. Если бы с учетом этого факта было осуществлено формальное разложение по степеням M_∞, то для того, чтобы оправдать концепцию несжимаемого течения, пришлось бы прийти к явлению, состоящему в длительном существовании акустических осцилляций. Как раз это явление детально рассмотрено сначала в рамках совершенной жидкости [12] с использованием техники многих масштабов, которая требует бесконечного набора таких масштабов быстрых времен, представляющих различные собственные акустические моды газа, содержащегося в ограниченной области в момент времени t. В первом приближении при $M_\infty \ll 1$ гипозвуковое течение является суперпозицией осредненного течения, которое почти несжимаемо, и акустических колебаний, закон эволюции амплитуд которых был получен с использованием правила исключения членов порядка $O(M_\infty^2)$. Оказалось, что амплитуда каждой моды колебаний удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, зависящему только от характеристик среднего течения. Результат, который нам представляется важным для возможных приложений, состоит в том, что эффект акустических колебаний сводится на уровне среднего течения почти несжимаемой жидкости к введению дополнительного члена, связанного с квадратами амплитуд акустических колебаний, в интеграл Бернулли. В рассмотренном случае движение начинается из состояния покоя и скорости достигают своего значения $O(\mathrm{M}_\infty)$ в течение начальной фазы продолжительностью $O(\mathrm{M}_\infty)$, что влечет за собой ускорения порядка $O(1)$ в течение этого периода, тогда как они имеют порядок $O(\mathrm{M}_\infty)$ в течение последующего периода времени. Возбуждение акустических волн связано с этим возрастанием скорости в течение очень короткого промежутка времени. Если возрастание скорости происходит в течение промежутка порядка $O(1)$, то акустические колебания появляются только во втором приближении, а первое приближение сводится к схеме классического несжимаемого течения.

С другой стороны, поскольку акустические колебания всегда затухают вследствие диссипации вязким трением на стенке, было рассчитано [13] влияние этого трения в слоях Стокса толщины $O(\sqrt{\mathrm{M}_\infty/\mathrm{Re}})$ для каждой собственной моды и для каждой из них был получен закон ослабления. Оказалось, что масштаб времени, на котором происходит ослабление акустических волн вследствие вязкого трения на стенке, предполагавшейся холодной, есть $O(\sqrt{\mathrm{Re}\mathrm{M}_\infty})$, что значительно больше единицы. Итак, теория, построенная в [12, 13], соответствует следующему процессу предельного перехода: M_∞ фиксировано, $\mathrm{Re} \to \infty$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$, так как $\mathrm{M}_\infty/(1/\mathrm{Re}) \gg 1$. Остается осветить один важный вопрос, касающийся поведения слоя Рэлея (см. [14]) при $t \geqslant O(1)$. Действительно, при анализе начального слоя $t = O(\mathrm{M}_\infty)$ в маловязкой жидкости имеется слой Рэлея на стенке толщины $O[(t/\mathrm{M}_\infty)^{1/2}]$, и, когда $t = O(\mathrm{M}_\infty)$ и тем более $t = O(\sqrt{\mathrm{Re}\mathrm{M}_\infty}) \gg 1$, этот слой, если бы он существовал как таковой, охватил бы всю ограниченную область. Таким образом, важно понять, как этот слой Рэлея преобразуется при $t \geqslant O(1)$. Это очень трудная задача, которая некоторым общим образом связана с выводом уравнений нестационарного сжимаемого пограничного слоя.

Наконец, заметим, что если задана температура на стенке порядка $O(1)$, то наблюдается несогласованность между температурой стенки и температурой газа внутри ограниченной области. Следовательно, обязательно имеется температурный погранслой порядка $O(1)$, в то время как исследование, проведенное в [13], основывается на температурном (и динамическом) пограничном слое порядка $O(\mathrm{M}_\infty)$. Эта трудность была обойдена с помощью сделанного в [13] предположения о том, что стенка холодная.

Остается рассмотреть общий случай

$$\mathrm{Re}\mathrm{M}_\infty = A_0 = O(1), \ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

и убедиться в том, что теория Зейтуняна и Гиро соответствует предельному случаю $A_0 \to \infty$.

4. Влияние слабой сжимаемости на вязкость. Рассмотрение поведения решений системы (1.1) при условии (2.1), когда $\mathrm{Re} \to \infty$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ и $\tau_0 \to 0$, одновременно поднимает много еще не решенных вопросов.

Рассмотрим простой случай плоского стационарного течения ($\mathrm{S} = 0$, $\partial/\partial x_3 \equiv 0$) совершенного газа с постоянными c_p и c_V около плоской полубесконечной пластины, каждая точка которой имеет определенную температуру ($\Theta \equiv 1$) и которая занимает всю полуось $Ox_1 > 0$ и помещена в течение, имеющее равномерную скорость U_∞, параллельную оси Ox_1. При частных условиях

$$(1/\sqrt{\mathrm{Re}})/\mathrm{M}_\infty^2 = 1, \quad \tau_0/\mathrm{M}_\infty^2 = \Lambda_0 = O(1)$$

коэффициент трения на стенке плоской полубесконечной пластины дается формулой (при $\mathrm{Pr} \equiv 1$)

$$c_f \cong \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x_1}}} + \sqrt{x_1}\,\frac{0{,}664\Lambda_0 + 2f''(0)}{\mathrm{Re}_{x_1}} + \ldots, \tag{4.1}$$

где $\mathrm{Re}_{x_1} = U_\infty x_1/(\mu_0/\rho_0)$ — местное число Рейнольдса. Функция $f(\eta)$, где $\eta = x_2/\sqrt{x_1}$, есть решение задачи

$$2f''' + Ff'' + F''f = 4\Lambda_0 F''^2 + (\gamma - 1)[6F'F''^2 - 2F''^2],$$
$$f(0) = f'(0) = f'(\infty) = 0,$$

где $F(\eta)$ — решение классической задачи Блазиуса. Заметим, что член, пропорциональный $\sqrt{x_1}/\mathrm{Re}_{x_1}$, появляется из-за эффекта слабой сжимаемости и малой вязкости.

Остается извлечь выводы из (4.1) и в особенности обобщить первые результаты, представленные выше, на произвольное препятствие. Кроме того, можно ограничиться случаем параболы, например, для которой в случае несжимаемой жидкости используются результаты [15—17]. Это позволит обсудить ту часть, которая учитывает влияние слабой сжимаемости, и ту часть, которая появляется во втором приближении несжимаемого пограничного слоя.

Можно также поставить задачу о поведении решений (1.1) при

$$\mathrm{Re} \to 0 \text{ и } M_\infty \to 0 \tag{4.2}$$

так, что число Кнудсена $M_\infty/\mathrm{Re} \ll 1$ (предполагается, что газ — сплошная среда).

Некоторые размышления показывают, что переход к пределу (4.2) должен совершаться при ограничении

$$\mathrm{Re}^{1+a}/M_\infty = O(1), \quad a > 0. \tag{4.3}$$

Если, в частности, предположить, что $\mathrm{Re}^a \equiv M_\infty/\mathrm{Re} \ll 1$, то при $\mathrm{Re} \to 0$ можно исследовать решение уравнений Навье — Стокса (1.1) следующего вида:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + o(1), \quad p = 1 + \mathrm{Re}^{1+2a}(p_1 + o(1)), \tag{4.4}$$
$$\rho = \rho_0 + o(1), \quad T = T_0 + o(1).$$

Тогда для $\mathbf{u}_0$, p_1, ρ_0 и T_0 получаем предельную систему, которую запишем в трех частях:

$$\Delta T_0 = 0; \tag{4.5}$$

$$\rho_0 = 1/T_0; \tag{4.6}$$

$$\Delta \mathbf{u}_0 = \nabla \pi, \quad \pi = \frac{1}{\gamma} p_1 + \frac{1}{3} \frac{D \log \rho_0}{Dt}, \tag{4.7}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \log \rho_0 = S\partial \log \rho_0/\partial t,$$

где $D/Dt = S\partial/\partial t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$.

Уравнение (4.5) определяет T_0, как только заданы условия, относящиеся к температуре; например, на стенках, где задана температура, или на холодных стенках. Соотношение (4.6) определяет поле ρ_0 плотности. Наконец, система (4.7) должна допускать определение поля скоростей $\mathbf{u}_0$ и возмущения давлений p_1. Заметим, что структура уравнений (4.7) близка к структуре классических уравнений Стокса, хотя они и более сложные. С учетом этого факта необходимо рассмотреть совместно с (4.4) локальное представление в окрестности начального момента времени и другое представление в окрестности бесконечности (в случае внешней задачи). Мы не сможем в дальнейшем продолжать обсуждение этой модели, исходя из (4.2)—(4.4), и здесь еще предстоит серьезный анализ.

5. Теория малых возмущений для гипозвуковых течений. Обсудим задачу о гипозвуковом обтекании тонкого тела. Если в общем случае течение вверх по потоку предполагается переменным, то наряду с значением M_∞, являющимся постоянной характеристикой переменного числа Маха вверх по потоку от препятствия, появляются два малых параметра, которые являются соответственно относительной толщиной h тела и долей μ_∞

неравномерности потока, падающего на тело, которая связана с изменением числа Маха в области вверх по потоку.

Таким образом, в совершенной жидкости теория малых возмущений для гипозвуковых течений приводит к вопросу о выяснении асимптотического поведения стационарного течения невязкого нетеплопроводного газа, являющегося результатом тройного перехода к пределу:

$$h \to 0, \ \mathrm{M}_\infty \to 0, \ \mu_\infty \to 0 \tag{5.1}$$

при условии, что эти три предела не достигаются независимо, а при условии наложения двух соотношений подобия:

$$\mathrm{M} = H_0 h^{1/2}, \ \mu_\infty = \mathrm{M}_0 h, \ h \to 0, \tag{5.2}$$

где H_0 и M_0 остаются величинами порядка единицы при $h \to 0$. Естественно, что в первом приближении (с нулевым порядком) обнаруживается классическое несжимаемое течение, но начиная со второго приближения появляются дополнительные члены источников, связанные с параметрами для гипозвукового течения подобия H_0 и M_0. В настоящее время в общем случае тонкого трехмерного препятствия неизвестен точный характер влияния этих членов на аэродинамические характеристики возмущенного течения. Заметим, что в [18] проделан детальный анализ потенциального обтекания тонкого трехмерного крыла для случая $\mathrm{M}_0 \equiv 0$, говоря точнее, этот анализ соответствует следующему предельному переходу:

$$\mathrm{M}_\infty^2 = \widehat{\mathrm{M}}_\infty h, \ h \to 0,$$

где $\widehat{\mathrm{M}}_\infty$ фиксировано и имеет порядок единицы, так что поправка на толщину крыла имеет тот же порядок, что и поправка на слабую сжимаемость.

Рассмотрим еще раз случай плоского ($\partial/\partial x_3 \equiv 0$) стационарного течения ($\mathrm{S} = 0$) невязкого и нетеплопроводного газа ($\mathrm{Re} \equiv \infty$); тонкий плоский профиль симметричен и сплющен вдоль оси x_1; угол падения нулевой, так что наклон течения повсюду очень мал. В плоскости Ox_1x_2 с началом координат в точке O уравнение этого профиля имеет вид

$$x_2 = h\eta(x_1), \ \eta(0) = \eta(1) = 0. \tag{5.3}$$

При сделанных выше предположениях относительно профиля след за телом, начинающийся от задней кромки $x_1 = 1$, и линия тока, приходящая на переднюю кромку $x_1 = 0$, совпадают соответственно с прямыми $x > 1$ и $x < 0$. Двумя неизвестными в нашей задаче являются вариация $\delta(x_1, x_2)$ линии тока в течении, возмущаемом тонким профилем ($h \ll 1$) (5.3) относительно ее положения на бесконечности вверх по потоку при $x_1 = -\infty$, и возмущение ω плотности, возникающее в этом возмущенном течении. Эти две неизвестные функции удовлетворяют интегралу Бернулли и выражению, определяющему компоненту вихря, перпендикулярную к плоскости Ox_1x_2. Если постулировать решение в виде

$$\delta = \delta_0 + h^\alpha \delta_\alpha + \ldots, \ \omega = h^\beta \omega_\beta + \ldots,$$

то из интеграла Бернулли следует, что $\beta = 2$, и затем из выражения для компоненты вихря, нормальной к плоскости течения, находим, что $\alpha = 1$. Следуя по этому пути, находим второе из соотношений подобия (5.2). Итак,

$$\omega_2 = H_0^2 \mathrm{M}_\infty^2(x_2) \frac{\partial \delta_0}{\partial x_2},$$

где $\mathrm{M}_\infty(x_2)$ обозначает переменное число Маха вверх по потоку, являющееся функцией x_2. Функции δ_0 и δ_1 есть решения следующих задач:

$$\frac{\partial^2 \delta_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \delta_0}{\partial x_2^2} = 0, \ \delta_0(x_1, 0) = \eta(x_1), \ x_1 \in [0,1], \tag{5.4}$$

$$\lim \delta_0 = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 \to \infty;$$

$$(5.5) \qquad \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial x_2^2} = -H_0^2 \mathrm{M}_\infty^2(x_2) \frac{\partial^2 \delta_0}{\partial x_2^2} - \mathrm{M}_0 \frac{d}{dx_2}\left(\log \mathrm{M}_\infty^2(x_2)\right) \frac{\partial \delta_0}{\partial x_2},$$

$$\delta_1(x_1, 0) = -\eta(x_1) \frac{\partial \delta_0}{\partial x_2}(x_1, 0), \ x_1 \in [0,1],$$

$$\lim \delta_1 = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 \to \infty.$$

Справедливость вышеизложенной теории требует, чтобы передняя кромка профиля имела форму идеально острого клина; если это условие не выполнено, необходимо провести локальное исследование окрестности передней кромки, предполагаемой скругленной, и осуществить сращивание локальных решений, полученных таким образом с (основными) решениями задач (5.4), (5.5).

Ситуация несколько осложняется, когда хотят учитывать малую вязкость ($\mathrm{Re} \gg 1$). В этом случае наряду с малыми параметрами h, M_∞ и μ_∞ появляются два новых малых параметра, которые являются числом, обратным числу Рейнольдса, и долей тепловой неоднородности τ_0 поверхности тонкого тела, которая входит в краевое условие (2.1). Тогда мы должны рассматривать вместо (5.1) многократный переход к пределу:

$$h \to 0, \ \mathrm{M}_\infty \to 0, \ \mu_\infty \to 0, \ 1/\sqrt{\mathrm{Re}} \to 0, \ \tau_0 \to 0,$$

причем совместно с (5.2) должны удовлетворяться также два соотношения подобия

$$\tau_0 = T_0 h, \ 1/\sqrt{\mathrm{Re}} = R_0 h, \ h \to 0,$$

где T_0 и R_0 остаются порядка единицы при $h \to 0$.

В этом случае при обтекании тонкого тела, когда $h \to 0$, получается описание, которое теряет силу в окрестности поверхности крыла, где в соответствии с общим правилом нужно исследовать локальное представление. В совершенной жидкости ($T_0 \equiv 0$ и $R_0 \equiv 0$) эта трудность преодолевается путем исследования поведения главной части решения в окрестности поверхности крыла. Но в слабовязкой жидкости и для передней кромки это более невозможно, и, напротив, знание поведения на бесконечности локального представления должно позволить выполнение расчета пограничного слоя исходя из решения на передней кромке, задаваемого из условия сращивания.

В [19] рассмотрен случай крыла малой толщины, но намного более толстого, чем ширина пограничного слоя в несжимаемой жидкости:

$$h \gg 1/\sqrt{\mathrm{Re}} \Leftrightarrow h \text{ фиксировано, } 1/\sqrt{\mathrm{Re}} \to 0, \text{ тогда } h \to 0.$$

Заметим, что на задней кромке в окрестности порядка $O(\mathrm{Re}^{-3/8})$ анализ течения обнаруживает механизм сингулярного сращивания в тройных слоях по [20, 21] между пограничным слоем и потенциальным течением, которое проявляется главным образом в виде эффекта двугранного угла. Этот анализ, в который входит отношение $\mathrm{Re}^{-1/4}/h$, выполнен в [22] для несжимаемой жидкости, там построена схема отрывного течения, включающего две зоны рециркуляции с постоянной завихренностью; однако неизвестно влияние слабой сжимаемости на эту схему.

Вообще нужно хорошо осознать тот факт, что мы в настоящее время очень мало знаем о вещах, которые касаются влияния слабой сжимаемости на течения маловязкого газа около тонкого крыла, несмотря на очевидный интерес к подобным исследованиям в связи с приложениями к различным реальным физическим явлениям.

6. Случай $\mathrm{Re} \equiv \infty$. Внешняя нестационарная задача. В этом случае отправным пунктом являются уравнения Эйлера нестационарных течений сжимаемых жидкостей. Жидкость, являющаяся совершенным газом с постоянными удельными теплоемкостями c_p и c_V, простирается до бесконечности во всех направлениях и изнутри ограничена конечной замкнутой поверхностью Σ. На больших расстояниях от Σ жидкость находится в состоянии равномерного покоя. Справедливо использовать систему координат, связанную с покоящейся жидкостью вдали, по отношению к которой Σ совершает произвольное перемещение, но с достаточно малой скоростью; в более общем случае скорость жидкости в каждой точке предполагается «очень малой» по сравнению с местной скоростью звука (гипозвуковое движение). Решение уравнений Эйлера (на уровне уравнений (1.1) делают переход к пределу $\mathrm{Re} \to \infty$ при t и x_i фиксированных) должно удовлетворять начальным условиям (покой при $t = 0$) и краевым условиям, совместным с начальными, с одной стороны, на бесконечности, где существует состояние равномерного покоя, с другой стороны, на Σ. Предполагается, что эти условия достаточны для единственности решения, если, очевидно, заданы положение и форма Σ. Только в [23, 24] было замечено, что нестационарный механизм генерирования звука гипозвуковыми течениями совершенной жидкости, являющийся результатом конечного смещения препятствий в бесконечной атмосфере, возникал при применении метода сращиваемых асимптотических разложений; решение в окрестности генерирующей зоны было приблизительно несжимаемым, тогда как решение, которое справедливо вдали, исходит из уравнений линейной акустики. При этом замечено, что классическое разложение Янцена — Рэлея (см. [25]), которое осуществляется по четным степеням M_∞ в стационарном режиме совершенной жидкости, переходит в нестационарный гипозвуковой режим ($\mathrm{S} = O(1)$), и в несжимаемой зоне генерации звука нечетные степени начинаются с M_∞^3, присутствие которых не подозревалось бы, если бы не имелся в распоряжении мощный метод сращиваемых асимптотических разложений. Заметим, что в [26] можно найти формализованное изложение теории Вивьяна — Кроу и, в частности, детальный анализ промежуточной области между ближней областью несжимаемого течения и дальней акустической областью.

Но при $\mathrm{M}_\infty \to 0$ предельный режим несжимаемого течения необязательно является совместным с начальными данными (покой), связанными с режимом сжимаемого течения, и с учетом этого факта необходимо провести подробный анализ окрестности начального момента $t = 0$. Изучение окрестности начального момента обнаруживает в первом приближении еще раз уравнения линейной акустики. В случае внешней задачи акустические возмущения, связанные с адаптацией к начальным данным, ослабляются дисперсией акустической энергии в области, объем которой стремится к бесконечности, и с учетом этого факта не следует ожидать, по меньшей мере в первом приближении, существования начального возмущения поля почти несжимаемого течения, справедливого до $t = O(1)$. Нельзя гарантировать априори, что не будет проявляться влияние высших порядков такое, чтобы формальный анализ нельзя было провести. С этой целью необходимо извлечь пользу из теории «рассеяния» для неоднородного волнового уравнения в области, являющейся внешней по отношению к заданной замкнутой поверхности (по этой теме можно отослать читателя к [27]).

Асимптотический анализ гипозвуковых течений ставит в настоящее время многочисленные проблемы, которые до сих пор не решены. Эти проблемы важны для лучшего понимания роли слабой сжимаемости при математическом моделировании разнообразных физических явлений мира. Ясно, что мы выбрали термин гипозвуковое течение для того, чтобы придать симметрию классификаций течений по числу Маха (от гипозвукового течения к гиперзвуковому). Поскольку гиперзвуковая аэродинамика необходима для изучения явлений при большой скорости, имеющих место на очень большой высоте (космос), динамика гипозвуковых течений представляется нам необходимой для систематического исследования явлений при малой скорости.

Поступила 23 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука, 1973.
2. **Von Karman Th.** De l'Aérodynamique à l' Astronautique. Paris: Gauthier — Villars, 1967.
3. **Zeytounian R. Kh.** Analyse asymptotique des écoulements de fluides visqueux compressibles à faible nombre de Mach. I. Cas des fluides non pesants.— ЖВММФ, 1977, т. 17, № 1.
4. **Lighthill M. J.** On sound generated aerodynamically; I — general theory.— Proc. Roy. Soc., 1952, vol. A 211, p. 565.
5. **Lighthill M. J.** On sound generated aerodynamically; II — Turbulence as a source of sound.— Proc. Roy. Soc., 1954, vol. A222, p. 1.
6. **Седов Л. И.** О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
7. **Zeytounian R. Kh.** La météorologie du point de vue du mécanicien des fluides.—In: Fluid Dynamics Transactions. Vol. 8. Warszawa, 1976.
8. **Zeytounian R. Kh.** Les équations de Navier — Stokes et l'atmosphère; 1 ère partie initiation.— Publications de l'U. E. R. de Maths. Pures et Appl. I. R. M. A. Univ. de Lille I, 1981, vol. 3, Fasc. 1, p. VIII + 93.
9. **Монин А. С.** Прогноз погоды как задача физики. М.: Наука, 1969.
10. **Зейтунян Р. Х.** О магнитной гидродинамике тяжелых жидкостей.— ПМТФ, 1980, № 2.
11. **Darrozes J. S.** The method of matched asymptotic approximation applied to problems involving two singular parameters.— In: Fluid Dynamics Transactions. Vol. 6, pt II. Warszawa, 1971.
12. **Zeytounian R. Kh. et Guirand J. P.** Evolution d'ondes acoustiques sur une longue période: le concept d'écoulement incompressible avec densité fonction du temps— C. r. Acad. Sci. Paris, ser. B, 1980, t. 290, p. 75.
13. **Zeytounian R. Kh. et Guirand J. P.** Evolution d'ondes acoustiques dans une enceinte et concept d'incompressibilité. A. A. A. F., 7éme Colloque d'Acoustique aérodynamique, Lyon, 4 et 5 novembre 1980, 36 p.
14. **Zeytounian R. Kh.** Sur la forme limite des équations de Navier — Stokes, aux grands nombres de Reynolds et au voisinage d'une paroi et de l'instant initial.— C. r. Acad. Sci. Paris, sér. A, 1980, t. 290, p. 567.
15. **Van Dyke M. D.** Higher approximations in boundary-layer theory. Pt 1. General analysis.— J. Fluid. Mech., 1962, vol. 14, p. 161.
16. **Van Dyke M. D.** Higher approximations in boundary-layer theory. Pt 2. Application to leading edges.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, p. 481.
17. **Van Dyke M. D.** Higher approximations in boundary-layer theory. Pt 3. Parabola in uniform stream.— J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, p. 145.
18. **Darrozes J. S.** Comportement d'un écoulement subsonique au voisinage du bord d'attaque d'une aile mince. Note Technique O. N. E. R. A., 1976 — 16, 39 p.
19. **Darrozes J. S.** Comportement singulier des écoulements à grand nombre de Reynolds au voisinage du bord d'attaque d'une aile mince.— In: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 594. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
20. **Stewartson K. et Williams P. G.** Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc., 1969, vol. A312, p. 181.
21. **Нейланд В. Я.** К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ. 1969, № 4.
22. **Guiraud J. P.** Ecoulement décollé au voisinage du bord de fuite d'une aile mince tridimensionnelle.— J. de Mécanique, 1974, t. 13, p. 409.
23. **Viviand H.** Etude des écoulements instationnaires à faible nombre de Mach avec application au bruit aérodynamique.— J. de Mécanique, 1970, t. 9, N 4.
24. **Crow S. C.** Aerodynamic sound emission as a singular perturbation problem.— Studies Appl. Math., 1970, vol. 49, N 1.
25. **Imai I.** Approximation methods in compressible fluid dynamics. Techn. Note BN-95, March 1957. (Univ. of Maryland; The Inst. for Fluid Dyn. and Appl. Maths.)
26. **Obermeier F.** The application of singular perturbation methods to aerodynamic sound generation.— In: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 594. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
27. **Wilcox C.** Scattering theory for the d'Alembert eduation in exterior domains.— In: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 442. Berlin: Springer-Verlag, 1975.